Corso:Meccanica quantistica/Il momento angolare/Addizione di momenti angolari

Sia ora:

$$\vec{J} = \vec{J_1} + \vec{J_2}$$

l'operatore vettoriale che caratterizza il momento angolare di un sistema, somma di due momenti angolari. Si assuma che i due momenti angolari del sistema $\vec{J_1}$ e $\vec{J_2}$ siano compatibili, ovvero che una misura dell'uno non influenzi il valore dell'altro. Formalmente, qussto significa che i due operatori commutano fra loro.

Le varie componenti del momento angolare sono additive, per cui risulta:

$$(J_x, J_y, J_z) = (J_{1x}, J_{1y}, J_{1z}) + (J_{2x}, J_{2y}, J_{2z}) = (J_{1x} + J_{2x}, J_{1y} + J_{2y}, J_{1z} + J_{2z})$$

Naturalmente, il modulo quadro non e' additivo:

$$J^2 = (\vec{J_1} + \vec{J_2})^2 = J_1^2 + J_2^2 + 2\vec{J_1} \cdot \vec{J_2} = J_1^2 + J_2^2 + 2(J_{1x}J_{2x} + J_{1y}J_{2y} + J_{1z}J_{2z})$$

Si vuole studiare lo spettro risultante del momento angolare totale, ovvero degli operatori J^2 e $\hat{J}_z$.

E' bene notare che si tratta comunque di momenti angolari, quindi esiste una base di autovettori comuni a $\hat{J}$ e $\hat{J}_z$ e per gli autovalori simultanei valgono le stesse regole esposte fin qui. In particolare, nell'autospazio in comune V_j gli autovalori j di $\hat{J}^2$ e m di $\hat{J}_z$ soddisfano la stessa regola $-j \leq m \leq j$. Questo autospazio prende il nome di "multipletto".

Risulta importante stabilire le relazioni che sussistono fra gli autovalori e le autofunzioni del momento angolare totale e degli addendi.

Si considerino due momenti angolari addendi e il momento angolare che risulta dalla loro somma. Si denotino gli operatori e i numeri quantici relativi ai moduli quadri e alle componenti z con la notazione usata fin qui.

Fissati i due numeri quantici relativi ai moduli quadri dei momenti addendi, j_1 e j_2 , il numero quantico relativo al modulo quadro del momento risultante deve appartenere all'intervallo $[|j_1 - j_2|, j_1 + j_2]$.

Fissato il numero quantico relativo al modulo quadro del momento angolare totale, il numero quantico relativo alla componente z del momento angolare totale puo' assumere i valori appartenenti all'intervallo $[-j, j]$.

Questo teorema esprime semplicemente la proprieta' triangolare, secondo la quale la lunghezza del lato di un triangolo e' sempre compreso tra la somma degli altri due e la loro differenza. Questo vale evidentemente anche per i moduli dei due vettori addendi e della loro somma, in quanto i vettori formano un triangolo. Questa e' pero' una dimostrazione intuitiva, in quanto j e' il numero quantico associato al modulo quadro del momento angolare risultante e non al suo modulo. La dimostrazione rigorosa e' piu' complessa e viene riportata qui di seguito.

"'DIMOSTRAZIONE RIGOROSA DELLA REGOLA DI SOMMA DEI MOMENTI ANGOLARI"'

Si noti innanzitutto che l'autospazio risultante della somma dei momenti angolari e' la somma direttadegli autospazi dei momenti angolari addendi. Quindi, se le autofunzioni che formano una base comune di $\hat{J}_1^2$ e $\hat{J}_{1z}$ appartengono ad uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}_1$ e le autofunzioni che formano una base comune di $\hat{J}_2^2$ e $\hat{J}_{2z}$ appartengono ad un'altro spazio di Hilbert $\mathcal{H}_2$, allora le autofunzioni che formano una base comune di $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_z$ appartengono allo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ prodotto tensoriale dei due.*[1]

Inoltre, se si considera che il momento angolare e' il generatore infinitesimo delle rotazioni, allora la somma di due momenti angolari puo' essere vista come l'applicazione di due distinte rotazioni al sistema. Passando da queste rotazioni all'operatore unitario che le rappresenta, si vede che questo corrisponde alla somma dei due addendi.

Formalmente, questo si puo' indicare nel modo seguente:

$$\begin{aligned} |j_1, m_1\rangle &\quad \text{Autostato simultaneo di} \hat{J}_1^2 \text{e} \hat{J}_{1z} \\ |j_2, m_2\rangle &\quad \text{Autostato simultaneo d} \hat{J}_2^2 \text{e} \hat{J}_{2z} \\ |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle &\quad \text{Autostato simultaneo di } \hat{J}^2 \text{e} \hat{J}_z \end{aligned}$$

Naturalmente, per il momento angolare addendo $\hat{J}_1$, una volta fissato il numero quantico j_1 il numero quantico azimutale m_{1z} puo' assumere i $(2j_1 + 1)$ valori $\{-j_1, -j_1+1, \ldots, j_1-1, j_1\}$. Ne consegue che i corrispondenti $(2j_1+1)$ autovettori sono degeneri rispetto all'autovalore $j_1(j_1 + 1)\hbar^2$ di $\hat{J}_1^2$, ma distinti rispetto all'autovalore $m_1\hbar$ di $\hat{J}_{1z}$, con $m_1 \in \{-j_1, -j_1 + 1, \ldots, j_1 - 1, j_1\}$. Lo stesso discorso puo' essere fatto per $\hat{J}_2$.

Si consideri ora la base determinata da $\hat{J}$ e $\hat{J}_z$. Siccome la componente z del momento angolare e' additiva, gli autovettori di $\hat{J}_z$ sono espressi dai prodotti tensoriali $\hat{J}_{1z} \otimes \hat{J}_{2z}$ degli autovettori delle singole componenti.*[2] Gli autovalori saranno quindi dati di conseguenza dalla somma $m = m_1 + m_2$.

Questo discorso non puo' essere esteso al momento angolare totale $\hat{J}$, perche' l'autostato relativo non risulta additivo: $\hat{J}^2 \neq \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2$. Rimane comunque il fatto che l'autospazio del momento risultante e' la somma diretta dei due autospazi dei momenti addendi e questo implica che ogni autostato comune di $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_z$ si possa scrivere come prodotto tensoriale $\langle j_1, m_1| \times \langle j_2, m_2|$ dei due autostati di $\hat{J}_1^2$ e $\hat{J}_{1z}$ e di $\hat{J}_2^2$ e $\hat{J}_{2z}$.

Si consideri ora il caso di j_1 e j_2 fissati. Ci si vuole limitare a studiare l'autospazio generato dagli autovettori che abbiano tutti i valori possibili di m_1 e m_2 . Formalmente, questo autospazio e' indicato con:

$$\{\langle j_1, m_1| \otimes \langle j_2, m_2|\}^{j_1;j_2}_{-j_1\leq m_1\leq j_1;-j_2\leq m_2\leq j_2}$$

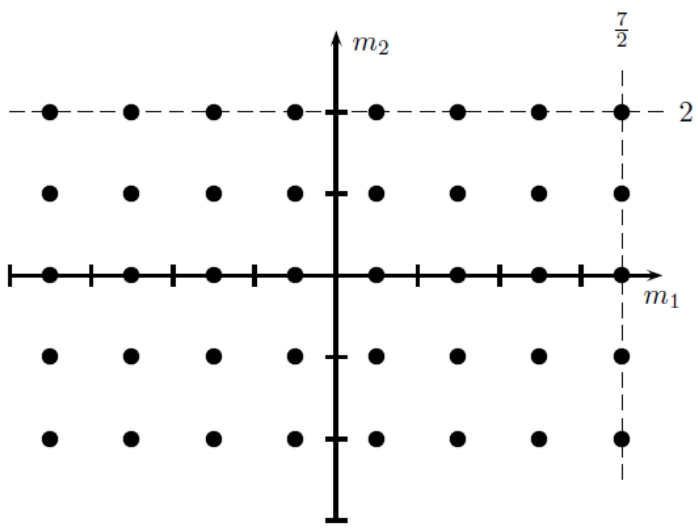
che, siccome i valori di j sono fissati, puo' essere indicata sinteticamente con $\langle m_1, m_2|$. Si tratta di un insieme di autovettori comuni di $\hat{J}$ e $\hat{J}_z$ e siccome $-j_1 \leq m_1 \leq j_1$ e $-j_2 \leq m_2 \leq j_2$ la dimensione di questo autospazio e' $(2j_1+1)\times(2j+1)$. Si consideri ora un determinato autovalore $m\hbar$ di $\hat{J}_z$. Poiche' vale l'additivita' e risulta $m = m_1 + m_2$, ne consegue che l'operatore $\hat{J}_z$ e' degenere in quanto diverse coppie di $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$ (ovvero m_1 e m_2) danno origine allo stesso autovalore m .

Si chiami questo autospazio degenere $W_m = \{|m_1, m_2\rangle\} : m_1 + m_2 = m$ fissato .

Evidentemente, quando entrambi m_1 e m_2 assumono il massimo valore non c'e' degenerazione, perche' esiste una sola scelta possibile e quindi $m = m_1 + m_2 = j_1 + j_2$. L'autovettore di $\hat{J}_z$ relativo all'autovalore massimo e' quindi unico.

L'autospazio W_m relativo all'autovalore $m = j_1 + j_2 - 1$ ha evidentemente dimensione 2 perche'e' generato da due autovettori ortogonali: $|j_1 - 1, j_2\rangle$ e $|j_1, j_2 - 1\rangle$.

Per proseguire nello studio della dimensione del sottospazio W_m e' meglio a questo punto seguire un approccio grafico. Si mettano in un piano cartesiano i valori di m_1 sulle ascisse e i valori di m_2 sulle ordinate. In questo modo si viene a costituire un reticolo finito di passo unitario costituito da un rettangolo di dimensioni $(2j_1 + 1) \times (2j + 1)$. Si considerino ad esempio i due momenti angolari $j_1 = 7/2$ e $j_2 = 2$:

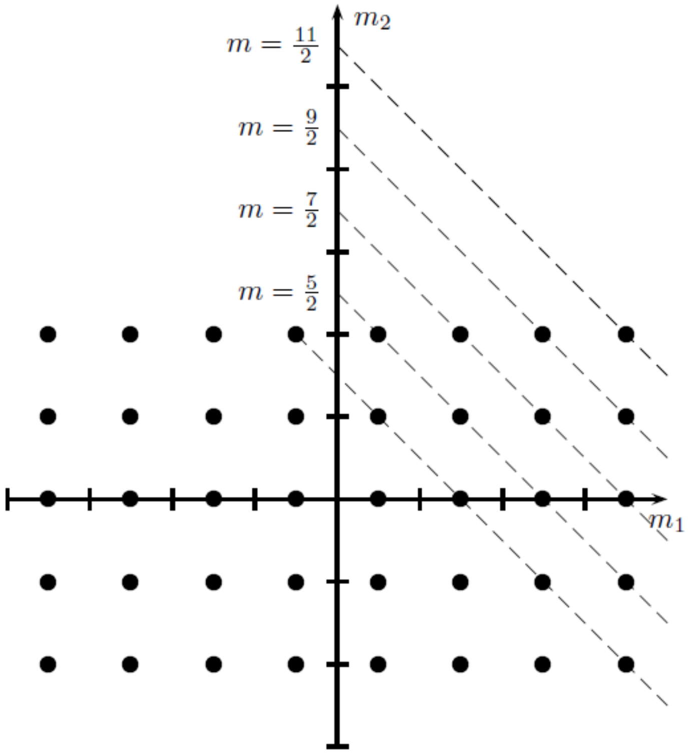


Si noti che siccoma j_1 e' semidispari il valore $m = 0$ non e' permesso, valore che invece e' possibile per j_2 intero.

Il problema della degenerazione in questo modo puo' essere risolto abbastanza facilmente. L'equazione $m_1 + m_2 = m$ puo' infatti essere riscritta come:

$$m_2 = -m_1 + m$$

che rappresenta una retta di pendenza 45° (*[3]) che interseca l'asse delle ordinate in m :



Si vede quindi chiaramente che quando m ha il valore massimo ($m = j_1 + j_2$) non esiste degenerazione. Man mano che m decresce di una unita', la degenerazione aumenta a sua volta di una unita' fino a diventare massima quando $m = -|j_1 - j_2|$. Il valore della degenerazione vale qui $[2\min(j_1, j_2) + 1]$.

Da questo punto in poi, diminuendo ancora di una unita' il valore di m la degenerazione diminuisce di una unita' alla volta fino a quando m raggiunge il minimo valore possibile ($m = -j_1 - j_2$), dove la degenerazione si annulla in quanto esiste una sola coppia di valori che puo' dare origine a questo valore.

Si consideri ora l'operatore $\hat{J}^2$ e l'autospazio W_m introdotto poco sopra. Si considerino gli operatori gradino associati al momento angolare totale:

$$\hat{J}_+ \equiv \hat{L}_x + i\hat{L}_y$$
$$\hat{J}_- \equiv \hat{L}_x - i\hat{L}_y$$

Se si applica l'operatore di innalzamento all'autospazio W_m questo si trasforma nell'autospazio W_{m+1} in quanto per definizione tutti i vettori di W_m sono autovettori di $\hat{J}_z$ relativi all'autovalore m , e quindi l'innalzamento li fa divenire autovettori relativi all'autovalore $m + 1$.

D'altra parte, per valori $|j_1 - j_2| \leq m \leq j_1 + j_2$ la dimensione*[4] di W_{m+1} e' di un'unita' piu' piccola di W_m . La conseguenza e' che tutti gli autospazi

W_m devono contenere un vettore – lo si denoti con $|\psi\rangle$ – che viene trasformato dall'operatore $\hat{J}_+$ nel vettore nullo: $\hat{J}_+|\psi\rangle = |0\rangle$.

Ricordando ora la relazione Gli operatori gradino L_+ e L_- sugli operatori gradino, si ricava:

$$||0\rangle|^2 = 0 = |\hat{J}_+|\psi\rangle|^2 = \langle\psi \mid \hat{J}_-\hat{J}_+ \mid \psi\rangle = \langle\psi \mid \hat{J}^2 - \hat{J}_z\left(J_z+1\right) \mid \psi\rangle = \langle\psi \mid \hat{J}^2 \mid \psi\rangle - m(m+1)|\psi\rangle = 0$$

ovvero:

$$\langle\psi \mid \hat{J}^2 \mid \psi\rangle = m(m+1)|\psi\rangle$$

Ma $|\psi\rangle$ e' un autovettore di $\hat{J}_z$ relativo all'autovalore m e di $\hat{J}^2$ relativo ad un certo autovalore $j(j+1)$ tale che $-j \leq m \leq j$. Ne consegue quindi che:

$$j(j+1) = m(m+1) \qquad \Rightarrow \qquad j = m$$

L'autovettore dell'autospazio W_m annichilato dall'operatore $\hat{J}_+$ e' quello relativo all'autovalore j , ovvero quello per cui vale $j = m$.

E' utile esprimere questo risultato anche in una forma diversa. Solo gli autospazi W_m che sono formati da autovettori di $\hat{J}_z$ con un numero quantico m tale che $|j_1 - j_2| \leq m \leq j_1 + j_2$ contengono un elemento che e' anche autovettore di $\hat{J}^2$ con numero quantico $j = m$. Gli autospazi invece con m non compreso fra $|j_1 - j_2|$ e $j_1 + j_2$ non contengono un tale autovettore. Questo dimostra che questi autovettori particolari soddisfano la relazione:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

Questa relazione prende il nome di "relazione triangolare" ed esprime il fatto che i due vettori addendi formano un parallelogramma e che il vettore risultante e' sempre inferiore alla somma dei due addenti e superiore alla loro differenza.

Incidentalmente, si dimostra facilmente che non esistono altri numeri quantici. Infatti, negli autospazi W_m con $m \notin [|j_1 - j_2|, j_1 + j_2]$ non esistono autovalori annichilati da $\hat{J}_+$ e quindi nessuno ha numero quantico $m = j$.

Sia j_1 che j_2 possono essere interi o seminteri. Come si e' visto, il massimo valore che puo' assumere il numero quantico j e' $j_1 + j_2$ e puo' variare solo per unita'. Ne consegue che:

$$\begin{aligned} j_1 \text{e} j_2 \text{ entrambi interi o semidispari} \qquad &\Rightarrow \qquad j \text{ e intero} \\ j_1 \text{e} j_2 \text{ uno intero e l'altro semidispari} \qquad &\Rightarrow \qquad j \text{ e semidispari} \end{aligned}$$

da cui:

$$j + j_1 + j_2$$

è sempre intero.

All'inizio di questo discorso la base simultanea di $\hat{J}$ e $\hat{J}_z$ era stata indicata in come:

$$|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |m_1, m_2\rangle$$

L'ultima notazione e' giustificata dal fatto che dare i valori di m_1 e m_2 permette di indentificare completamente lo stato.*[5] Questa rappresentazione indica esplicitamente il fatto che questi autovettori sono ottenuto come prodotti tensoriali degli autovettori dei singoli autospazi.

Se si considera invece il momento angolare totale, si e' appena visto che esiste una base di autovettori comuni a $\hat{J}$ e $\hat{J}_z$ relativa agli autovalori j e m , e rappresentata quindi da:

$$\{|j, m\rangle\}_{-j \leq m \leq j}^{j=0 \to n}$$

dove n rappresenta il valore massimo che puo' assumere il momento totale e che dipende dalla massima energia del particolare sistema.*[6] Questi autovettori sono naturalmente anche autovettori di $\hat{J}_1^2$ e $\hat{J}_2^2$.

Esistono dunque due modi di rappresentare gli autovettori comuni di $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_z$. Si tratta in realta' di due basi ortonormali dello stesso spazio ed e' quindi possibile passare da una rappresentazione all'altra tramite una matrice di trasformazione. Gli elementi di questa matrice sono chiamati "coefficienti di Clebsh-Gordan" e sono evidentemente dati dal prodotto scalare tra gli autovettori delle due possibili rappresentazioni della base comune di $\hat{J}^2$ e $\hat{J}_z$:

$$C_{j,m}^{m_1,m_2} = \langle j_1, m_1; j_2, m_2 \mid j, m\rangle$$

Ulteriori approfondimenti sulla manipolazione dei momenti angolari riguardano generalmente corsi superiori.

1. Cio' deriva senz'altro dall'aver assunto i due momenti angolari compatibili, per cui i due spazi di Hilbert non si "sovrappongono".
2. Questo deriva dall'applicazione del metodo di separazione delle variabili.
3. Il coefficiente angolare e' -1.
4. Si tratta in pratica del livello di degenerazione appena discusso.
5. A parte ovviamente la degenerazione dello stesso.
6. La notazione di questo valore con n richiama l'atomo di idrogeno, come si vedra' nel prossimo capitolo.

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Corso:Meccanica quantistica/Il momento angolare/Addizione di momenti angolari** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_quantistica/Il_momento_angolare/Addizione_di_momenti_angolari?oldid=37900 *Contributori:* Valsdav, Valeb e WikiToBot

1.2 Immagini

- **File:Corso_MQ_Somma_Momenti_angolari1.png** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/5/54/Corso_MQ_Somma_Momenti_angolari1.png *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Corso_MQ_Somma_Momenti_angolari2.png** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/9/99/Corso_MQ_Somma_Momenti_angolari2.png *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

1.3 Licenza dell'opera