Corso:Algebra Anelli (Unimib)/Anelli/Fattorizzazione

1 Divisibilità e fattori

Nei domini si ha una nozione di divisibilità.

Definizione (293)

Sia D un dominio e siano $a, b \in D$. Diciamo che a *divide* b e scriviamo $a \mid b$ se esiste $c \in D$ tale che $b = a * c$ (ovvero, b appartiene all'ideale principale generato da a).

Osservazione (294)

$a \mid b$ e $b \mid a$ se e solo se (a) e (b) coincidono, ovvero a e b differiscono per un elemento unitario.

Definizione (295 Fattore)

Se $a \mid b$, diremo che a è un *fattore* di b nel dominio D e diremo che a è un fattore banale se a è unitario o differisce da b per un elemento unitario, cioè $a = ub$ con $u \in U$. Gli altri si chiamano fattori propri.

2 Elementi primi e irriducibili

Definizione (296 Elemento primo)

Sia D un dominio. Un elemento $p \in D$ diverso dallo zero e non unitario si dice *primo* se ogni qualvolta $p \mid xy$, allora $p \mid x$ o $p \mid y$.

Definizione (297 Elemento irriducibile)

Se $p \in D$ non nullo e non unitario, si dice *irriducibile* in D se non ammette fattorizzazioni non banali, cioè se $p = xy$ implica $x \in U$ o $y \in U$.

In $\mathbb{Z}$ un numero primo è diverso da zero e da ± 1 con la proprietà che se divide il prodotto di due interi, divide almeno uno dei due elementi.

Ad esempio, 4 non è primo perché $4 \mid 12 = 4 * 3 = 2 * 6$ e $4 \not| 2$ e $4 \not| 6$. Gli irriducibili sono quelli che si scrivono come $z = z * 1$ o $z = -1 * z$, perché gli unici unitari sono ± 1 .

In $\mathbb{Z}$ le nozioni di numeri primi e irriducibili coincidono, ma in un dominio generico le due nozioni possono indicare classi distinte.

3 Relazione tra primi e irriducibili

Proposizione (298)

In ogni dominio D ogni elemento primo è anche irriducibile, ma in generale non vale viceversa.

Dimostrazione

Sia $p \in D$ primo. Proviamo che è irriducibile.

Supponiamo che $p = b * c$ con $b, c \in D$. Allora p è un fattore del prodotto bc , se scrivo $1 * p = bc$. Siccome p è primo, allora divide uno dei due fattori. Allora se divide b esiste d tale che $b = p * d$. Segue che $p = bc = pdc$ e semplificando ottengo $dc = 1$. Questo significa che d, c sono unitari.

Se $p \nmid b$, allora $p \mid c$ ed esiste $e \in D$ tale che $c = e * p$. Cioè $p = bc = bpe$, allora semplificando per p ottengo $be = 1$ e quindi $b \in U$. Anche in questo caso la fattorizzazione $d = b * c$ è banale.

4 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

4.1 Testo

- **Corso:Algebra Anelli (Unimib)/Anelli/Fattorizzazione** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAlgebra_Anelli_(Unimib)/Anelli/Fattorizzazione?oldid=48242 *Contributori:* Toma.luca95 e Mmontrasio

4.2 Immagini

4.3 Licenza dell'opera