Utente: Dan/Elettromagnetismo/Induzione elettromagnetica/Autoinduzione e mutua induzione

A una variazione del flusso del campo magnetico si associa una forza elettromotrice indotta, a cui corrisponde una corrente che varia nel tempo; se invece non varia il flusso del campo magnetico, scompare la corrente indotta.

1 Autoinduzione

Allora, se prendiamo un circuito solo nell'immenso spazio vuoto, e ci mettiamo a scorrere una corrente variabile nel tempo, questa genererà un campo magnetico variabile nel tempo; questo campo magnetico si *autoconcatena* col circuito generante, e il flusso autoconcatenato varierà nel tempo: oltre alla forza elettromotrice che abbiamo inserito nel circuito, quindi, apparirà anche **una forza elettromotrice autoindotta** f_{ai} . Questo fenomeno viene chiamato autoinduzione, **ed è presente in ogni circuito in cui la corrente non è stazionaria** (ovvero in tutti). Questo vuol dire che le equazioni delle maglie che risolvono un circuito, almeno per come le abbiamo scritte finora, *sono sbagliate*, o meglio, incomplete. Manca infatti il termine di autoinduzione, che andiamo ad aggiungere. Supponendo il circuito sia ohmico e presenti solo i termini resistivi, avremo l'equazione del circuito come:

$$f + f_{ai} = RI$$

La forza elettromotrice autoindotta è legata, come abbiamo detto, alla variazione di flusso autoconcatenato col circuito. Il campo magnetico generato dal circuito nello spazio sarà un generico campo della forma:

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l I(t) \frac{d\mathbf{l} \times \Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|^3}$$

Possiamo allora calcolare il flusso del generico campo magnetico generato dal generico circuito (tutti questi generici stanno a indicare che questa è una formula generale):

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \oint_l \frac{\mu_0}{4\pi} I(t) \frac{d\mathbf{l} \times \Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|^3} \cdot d\mathbf{S}$$

Abbiamo introdotto le variazioni temporali come lente; intendevamo dire che **ci troviamo in regime quasi stazionario**, in cui le grandezze variano nel tempo ma non le velocità con cui variano non sono paragonabili alla velocità con cui si trasmette la luce; in pratica, $I(t)$ varia nel tempo ma, *istante per istante*, è uguale in tutti i punti del circuito, quindi può essere portata fuori dal segno di integrale:

$$\Phi_l = I(t) \int_S \oint_l \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|^3} \cdot d\mathbf{S} = IL$$

Dove L è detto **coefficiente di autoinduzione del circuito** o, per la plebe, **induttanza**; osserviamo che non dipende dalle grandezze elettromagnetiche in gioco, ma **dipende solo dalla geometria magnetica del circuito**, cioè a come è disposto nello spazio rispetto alle grandezze magnetiche in gioco. Per come lo abbiamo definito, **L si definisce solo in regime quasi stazionario**: se la velocità con cui varia la corrente è paragonabile a quella della luce, o il circuito è molto lungo, così lungo da non poter assumere che la corrente sia la stessa in tutti i punti istante per istante, allora non possiamo definire un coefficiente di autoinduzione. Da questa espressione del flusso autoindotto ricaviamo la forza elettromotrice autoindotta, che possiamo esprimere come:

$$f_{ai} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

Quindi l'equazione risolvente il nostro circuito è:

$$f + f_{ai} = RI \;\rightarrow\; f = RI + L\frac{dI}{dt}$$

Se l'induttanza è piccola (e, come vedremo, per circuito semplici lo è), può essere trascurato il termine induttivo in questa equazione, e torniamo al classico circuito resistivo. A ogni induttanza è associato un campo magnetico, generato da qualsiasi circuito: per poter generare questo campo magnetico, come vedremo presto, il generatore deve erogare dell'energia in più, che viene immagazzinata nell'induttanza; tuttavia, questa energia non è perduta per sempre, come quella dissipata per effetto Joule sulla resistenza, ma *l'induttanza può resistituirla*: infatti, se viene staccato il generatore, continuerà a scorrere della corrente, e l'energia per farlo ce la da proprio l'induttanza.

Il coefficiente di autoinduzione si misura in:

$$[L] = \frac{[\Phi(\mathbf{B})]}{[I]} = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \frac{\text{V s}}{\text{A}} = \Omega\,\text{s} = \text{H (Henri)}$$

Per dirlo, H^{-1} è l'unità di misura della *riluttanza* dei circuiti magnetici che abbiamo visto nello scorso capitolo.

Come si calcola L negli esercizi? Semplice, si risolve l'integrale.

Ovviamente no, mai nella vita, basta applicare la formula inversa: vediamolo con un esempio.

Esempio (8.4)

Calcoliamo l'induttanza di un solenoide indefinito, con sezione S , numero di spire N e lunghezza l , con la condizione $l >> \sqrt{S}$ (ovvero condizioni di lunghezza approssimabile indefinita). Di questo conosciamo il campo che è generato al suo interno, vale $\mathbf{B} = \mu_0 nI\,\hat{\mathbf{x}}$, quindi possiamo semplicemente calcolare il flusso autoindotto come $\Phi = BSN = \mu_0 NnIS$. In sintesi, l'induttanza è banale e si calcola come:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$$

Da questo esempio ricaviamo che l'induttanza cresce quadraticamente col numero di spire: se abbiamo un circuito, questo sarà una spira, quindi avrà un'induttanza *molto* piccola (per questo approssimabile a nulla e, per avere termini induttivi rilevabili, si aggiunge a questa un piccolo solenoide con una sua induttanza molto grande). Inoltre, nel caso del solenoide, si può inserire un ferromagnete al suo interno con μ_r molto grande, così da aumentare di μ_r volte il valore dell'induttanza.

2 Risolvere un circuito generico

A questo punto, vediamo come risolvere un circuito generico, comunemente chiamato circuito RL ideale; la differenza tra un RL reale e un RL ideale sta nell'induttanza: si assume, di solito, che l'induttanza aggiunta al circuito non abbia una resistenza interna. In realtà, essendo questa un solenoide di rame (o di metallo ohmico) avrà sempre una sua resistenza, che va aggiunta alla resistenza totale del circuito; in più, come si può facilmente vedere, questa resistenza non è fissa, ma presenta, purtroppo una crescita lineare con il crescere della frequenza della corrente, a causa di isteresi del ferromagnete inserito nel solenoide. Tutto questo esula però dai nostri obiettivi, in quanto riguarda un corso sui circuiti e non sull'elettromagnetismo in generale.

Per un qualsiasi circuito ohmico sarà presente una resistenza (a meno che non si prenda un circuito di superconduttori) e una sua induttanza (questa, invece, è sempre presente). Andiamo a risolvere l'equazione del circuito che abbiamo già visto:

$$f = RI + L\frac{dI}{dt} \;\rightarrow\; \frac{f}{R} = I + \frac{L}{R}\frac{dI}{dt}$$

Chiamiamo $\frac{L}{R} = \tau$ (ha dimensioni di un tempo); osserviamo che $\frac{f}{R}$ è la corrente asintotica che raggiunge il circuito a tempo infinito, che chiameremo I_0 ; riordinando (supponiamo $I(t=0) = 0$:

$$\begin{aligned} I_0 - I &= \tau\frac{dI}{dt} \\ \int_{I(0)}^{I(t)} \frac{dI}{I_0 - I(t)} &= \int_0^t \frac{dt}{\tau} \\ -\log\left(\frac{I_0 - I(t)}{I_0}\right) &= \frac{t}{\tau} \end{aligned}$$

Da questa otteniamo l'intensità di corrente in funzione del tempo $I(t) = I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$; vediamo che τ è l'intervallo di tempo dopo cui la corrente è a $\frac{1}{e}I_0 = \frac{f}{R}\frac{1}{e}$; l'andamento è una crescita esponenziale fino al valore asintotico. A questo punto, staccando il generatore, avremo una semplice equazione:

$$f_{ai} = RI \;\rightarrow\; -L\frac{dI}{dt} = RI$$

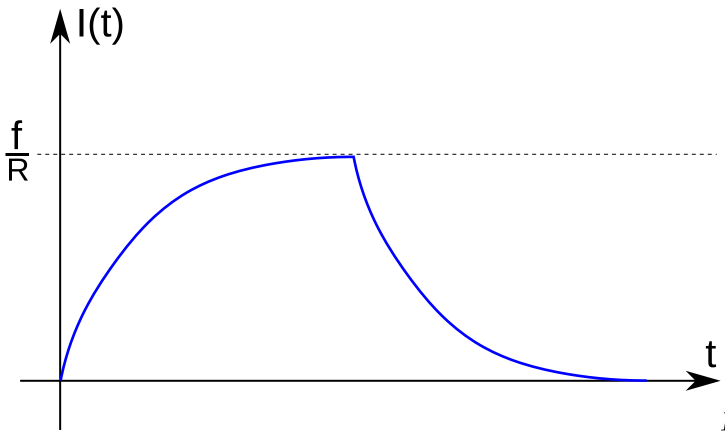

Fig. 8.7: andamento della corrente in funzione del tempo nel circuito RL ideale; quando inizia a scendere, è stato spento il generatore.

Risolvendola otteniamo l'equazione della scarica dell'induttore $I(t) = I(t_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$. In figura 8.7 è rappresentato l'andamento della corrente quando si accende il generatore e quando, poi, lo si stacca. Come avevamo anticipato, dopo aver staccato il generatore continuerà a circolare ancora per un po' corrente, grazie all'energia immagazzinata nell'induttanza.

3 Legge di Felici

Tutto questo può essere utilizzato per misurare campi magnetici: andiamo a spiegare meglio il funzionamento illustrato in figura 7.6 (sezione 7.4). Se inseriamo un circuito senza generatore in un campo magnetico esterno variabile col tempo, la sua equazioen risolvente sarà:

$$f_{ai} + f_i = RI \;\rightarrow\; -L\frac{dI}{dt} - \frac{d\Phi}{dt} = RI$$

Con trucco di magia, moltiplichiamo tutto per dt :

$$-d\Phi = RIdt + LdI$$

Possiamo fare di più, integrando da uno stato iniziale a uno finale:

$$\Phi_i - \Phi_f = \int_{t_0}^{t_1} RIdt + \int_{t_0}^{t_1} LdI$$
$$\Phi_i - \Phi_f = R\Delta Q + L(I(t_1) - I(t_0))$$

Con $\Delta Q = \int I dt$ indichiamo *la carica che passa attraverso il circuito* nell'intervallo di tempo considerato; il termine $\Phi_i - \Phi_f$ riguarda ovviamente il flusso del campo esterno. Osserviamo anche che il termine induttivo può annullarsi in diversi modi: se L è trascurabile, si annulla; se invece il campo esterno è costante nel tempo e il circuito si muove in esso, **trovandosi però fermo a inizio e fine movimento**, allora si annullerà anche stavolta: insomma, mettiamoci in una di queste situazioni in cui si annulla. Avremo allora:

$$\Delta Q = \frac{\Phi_i - \Phi_f}{R}$$

Questa è chiamata **legge di Felici** ed è più utile di quanto si pensi, infatti non dipende dal moto del circuito o dalla variazione del campo ma solo dagli stati iniziale e finale del sistema. Preso allora il caso in figura 7.6, col galvanometro balistico si può misurare facilmente la carica trascorsa (ricordiamo che misura basse intensità di corrente) e da questa si può ricavare il campo magnetico esterno (ricordiamo che il circuito è un solenoide, quindi il flusso è concatenato al solenoide di M spire):

$$\Delta Q = \frac{-\Phi_S}{R} = \frac{BSM}{R} \;\rightarrow\; B = \frac{\Delta Q}{SM} R$$

4 Mutua induzione

Se un circuito si autoinduce, è ovvio pensare che induce anche i circuiti attorno a lui: il campo magnetico che genera varia nel tempo e rientra in uno dei tanti casi in cui si applica la legge di Faraday-Neumann. Se sul circuito indotto circola una corrente propria, questo induce a sua volta il circuito originario, quindi tutti i circuiti in cui circolano correnti quasi-stazionarie variabili col tempo si inducono a vicenda.

Consideriamo un caso semplice, in cui ci sono due circuiti 1 e 2 percorsi da correnti I_1, I_2 (il caso con n si ottiene semplicemente generalizzando questo), i due circuiti generano nello spazio due campi $\mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t)$ che si concatenano l'uno con l'altro. Poiché i campi dipendono dalle correnti, il flusso sul secondo circuiti indotto dal primo sarà proporzionale alla corrente nel primo, ovvero $\Phi_2(\mathbf{B}_1) = M_{2,1} I_1$, dove $M_{2,1}$ è il coefficiente di induzione del primo circuito sul secondo. A questo punto, circola una corrente indotta sul circuito 2, che si aggiunge a quella già presente in una generica I_2 , avremo che il flusso sul primo circuito indotto dal secondo è a sua volta proporzionale alla corrente che circola sul secondo, ovvero $\Phi_1(\mathbf{B}_2) = M_{1,2} I_2$, dove $M_{1,2}$ è il coefficiente di induzione del secondo circuito sul primo. Dimostreremo facilmente che $M_{2,1} = M_{1,2} = M$, per ora assumiamo sia vero.

Infatti, le forze elettromotrici indotte nei due circuiti saranno particolari, ovvero conteranno un termine legato alla corrente che circola nell'altro:

$$f_{2m} = -\frac{d\Phi_2(\mathbf{B}_1)}{dt} = -M\frac{dI_1(t)}{dt}$$
$$f_{1m} = -\frac{d\Phi_2(\mathbf{B}_2)}{dt} = -M\frac{dI_2(t)}{dt}$$

Quindi otterremo due sistemi fisici accoppiati; fate caso al fatto che i circuiti sono i conduttori del campo magnetico, cioè per questi stiamo facendo lo stesso studio che avevamo fatto per i conduttori. Avremo anche risultati concordi, troveremo infatti dei termini associabili a un'energia di interazione tra circuiti magnetici.

Le equazioni che risolvono i due circuiti saranno:

$$\left| \begin{aligned} & f_1 - L_1 \frac{dI_1(t)}{dt} - M \frac{dI_2(t)}{dt} = R_1 I_1 \\ & f_2 - L_2 \frac{dI_2(t)}{dt} - M \frac{dI_1(t)}{dt} = R_2 I_2 \end{aligned} \right.$$

Vediamo che i due coefficienti di induzione sono uguali; calcoliamo esplicitamente il flusso sul secondo circuito:

$$\Phi_2(\mathbf{B}_1) = \int_{S2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_2 = \int_{S2} (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}_1) \cdot d\mathbf{S}_2 = \oint_{l2} \mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{l}_2$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato il teorema di Stokes. Il potenziale vettore generato dal primo circuito in un qualsiasi punto del secondo è noto:

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l1} I_1 \frac{d\mathbf{l}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

Andando a sostituire, otteniamo:

$$\Phi_2(\mathbf{B}_1) = I_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l1} \oint_{l2} \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = I_1 M_{2,1}$$

Nell'espressione del coefficiente $M_{2,1}$ tutte le operazioni sono commutative: invertendo gli indici, l'espressione è identica, quindi avremo $M_{2,1} = M_{1,2}$.

Come si calcola il coefficiente di induzione? Allo stesso modo dell'induttanza, ovvero non calcolando l'integrale.

Esempio (8.5)

Partiamo dal caso più semplice, due solenoidi coassiali di stessa lunghezza l e stessa sezione S (con i fili isolati in modo da non unirsi in un unico circuito), con diversi numeri di spire N_1, N_2 , nella classica condizione $l >> \sqrt{S}$ di solenoidi indefiniti. Conosciamo i campi, sono noti:

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 n_1 I_1 \,\hat{\mathbf{x}} \quad \mathbf{B}_2 = \mu_0 n_2 I_2 \,\hat{\mathbf{x}}$$

Il flusso sul secondo del primo è quindi:

$$\Phi_2(\mathbf{B}_1) = B_1 S N_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S I_1$$

Da cui ricaviamo banalmente $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S$. Notiamo una particolarità: le induttanze dei due solenoidi sono $L_i = \mu_0 \frac{N_i^2}{l} S$ con $i = 1, 2$, solo in questo caso particolare avremo che $M = \sqrt{L_1 L_2}$

Esempio (8.6)

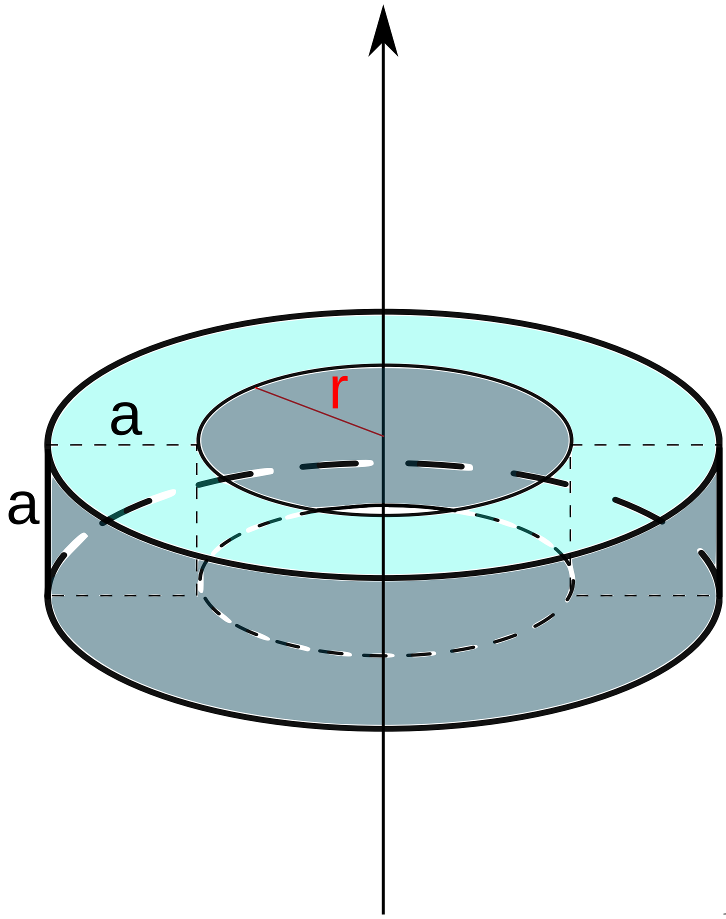

Fig. 8.8.

Abbiamo il sistema in figura 8.8: un filo indefinito percorso da corrente; il filo corrisponde con l'asse di un solenoide toroidale di sezione quadrata, con lato a . Troviamo il coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti.

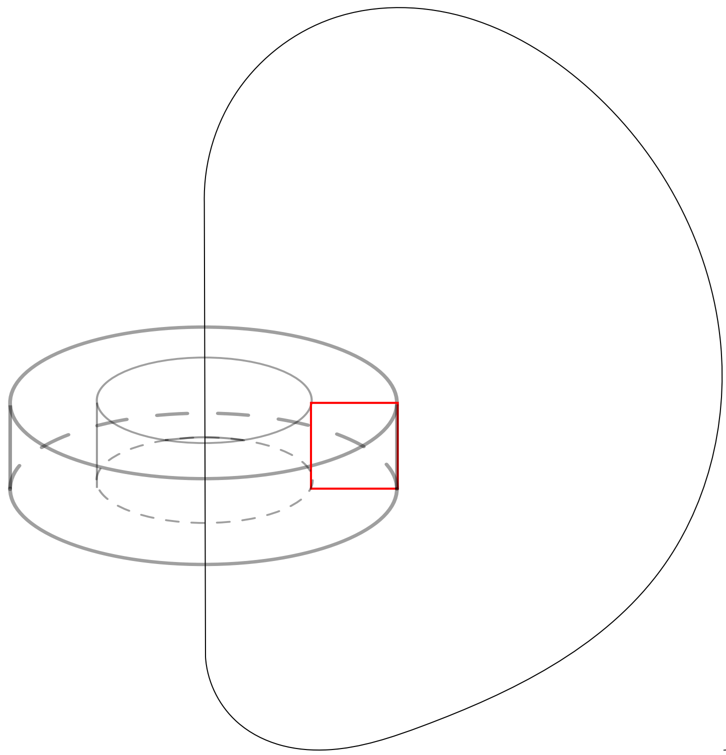

Fig. 8.9.

Possiamo procedere in due modi: calcoliamo il flusso del campo generato dal filo sul solenoide oppure il contrario, calcoliamo il flusso del campo generato dal solenoide sul filo. Che senso ha? Qual è il flusso attraverso un filo? Se consideriamo il filo indefinito, questo si prolungherà fino a ∞ e $-\infty$, che in realtà sono lo stesso punto: il filo forma una spira gigantesca e il solenoide la interseca perpendicolarmente una volta (figura 8.9) con una spira, quindi il flusso del campo del solenoide attraverso il filo è solo in flusso attraverso una sua spira.

Procediamo dal caso semplice; il campo generato dal filo è quello di Bios-Savart:

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi r}\,\hat{\mathbf{t}}$$

Presa una spira del solenoide, poiché le linee di forza sono circonferenze, questa spira è sempre ortogonale al campo magnetico, quindi il flusso sarà:

$$\Phi_{\text{spira}}(\mathbf{B}_1) = \int_{\text{spira}} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{spira}} B_1 dS$$

Poiché il campo è radiale, dividiamo la spira in fili di altezza a e lato dr , con superficie quindi $dS = a\,dr$; il campo su tutto il solenoide sarà N volte il campo attraverso una spira:

$$\Phi_{\text{solen}}(\mathbf{B}_1) = N \int_r^{r+a} \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r'} a\,dr' = N \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} a \log\left(\frac{r+a}{r}\right)$$

Da cui banalmente $M = N \frac{\mu_0 a}{2\pi} \log\left(\frac{r+a}{r}\right)$

Nel caso contrario, invece, il campo del solenoide è:

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 N I_2}{l} = \frac{\mu_0 N I_2}{2\pi r}$$

Perché la lunghezza del solenoide, essendo toroidale, è una circonferenza co raggio variabile tra r e $r + a$; abbiamo detto che il flusso di questo attraverso il filo è in realtà il flusso di questo attraverso una sola spira, che dividiamo in fili di area $dS = a\,dr$ come prima, e quindi:

$$\Phi_1(\mathbf{B}_2) = \int_r^{r+a} \frac{\mu_0 I_2 N}{2\pi r'} a\,dr' = \frac{N\mu_0 I_2}{2\pi} a \log\left(\frac{r+a}{r}\right)$$

Otteniamo lo stesso risultato del caso precedente.

5 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

5.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Induzione elettromagnetica/Autoinduzione e mutua induzione** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Induzione_elettromagnetica/Autoinduzione_e_mutua_induzione?oldid=48640 *Contributori:* Dan

5.2 Immagini

- **File:Figura8-7ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/9/9c/Figura8-7ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura8-9ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/d/d8/Figura8-9ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura_8.8ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/1/1c/Figura_8.8ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

5.3 Licenza dell'opera