Utente:Dan/Elettromagnetismo/Appendice B: riferimenti matematici/Calcolo classico della quarta equazione di Maxwell (laplaciano)

Nella sezione 6.6 calcoliamo il laplaciano del potenziale vettore $\nabla^2 \mathbf{A}$ sfruttando la delta di Dirac e il metodo moderno di trattare il problema. Tuttavia, prima ce venisse studiata la delta l'equazione aveva la stessa forma, quindi il calcolo del laplaciano era diverso. Lo proponiamo qui.

$$\begin{aligned}-\nabla^2 \mathbf{A} = &-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla^2\left(\int_\tau \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\Delta\mathbf{r}|}d\tau'\right) = \\ &-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \nabla^2 \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\Delta\mathbf{r}|}d\tau' = \\ &-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \mathbf{J}(\mathbf{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|}\right)d\tau'\end{aligned}$$

Abbiamo isolato l'unico fattore che dipendesse dalle variabili pure, su cui agisce il laplaciano, che è $\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|}$. Ricordiamo che

$$|\Delta\mathbf{r}| = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Il calcolo delle tre componenti risulterà uguale, quindi lo svolgiamo per una e le altre saranno uguali:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|}\right) = \frac{1}{2}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-\frac{3}{2}} 2(x-x') = -\frac{x-x'}{|\Delta\mathbf{r}|^3}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|}\right) = &-\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|^3} - (x-x')\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|^5}\,2(x-x') = \\ &-\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|^3} + \frac{3(x-x')^2}{|\Delta\mathbf{r}|^5}\end{aligned}$$

Allo stesso modo le altre componenti saranno:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|}\right) = -\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|^3} + \frac{3(y-y')^2}{|\Delta \mathbf{r}|^5}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|}\right) = -\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|^3} + \frac{3(z-z')^2}{|\Delta \mathbf{r}|^5}$$

Mettendo assieme tutto, avremo:

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|}\right) = -\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|^3} + \frac{3|\Delta \mathbf{r}|^2}{|\Delta \mathbf{r}|^5} = \frac{3|\Delta \mathbf{r}|^2 - 3|\Delta \mathbf{r}|^2}{|\Delta \mathbf{r}|^5} = 0$$

In tutto questo, abbiamo ovviamente ipotizzato che $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ perché non ha senso dividere per lo zero. Come possiamo osservare, ci troviamo sempre nella solita situazione della delta di Dirac, che però non era ancora stata teorizzata. In sintesi, ci troviamo a dover calcolare il laplaciano proprio lì dove si annulla $\Delta \mathbf{r}$. Come "aggiriamo" il problema? Consideriamo un volumetto molto molto piccolo, un v' preso attorno al punto $\mathbf{P}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{P}'(\mathbf{r}')$, così piccolo da poter considerare $\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \mathbf{J}(\mathbf{r})$ costante in questo, e integriamo su di esso:

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = &-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \mathbf{J}(\mathbf{r}')\boldsymbol{\nabla}^2\left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|}\right) d\tau' = \\ &-\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{J}(\mathbf{r})\int_{v'} \boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|}\right) d\tau'\end{aligned}$$

Applichiamo allora il teorema della divergenza sulla superficie s' corrispondente al bordo del volumetto:

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = &-\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{J}(\mathbf{r})\int_{s'} \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|}\right)\cdot \hat{\mathbf{n}}\, ds' = \\ &-\frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{J}(\mathbf{r})\int_{s'} \left(-\frac{\Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|^3}\cdot \hat{\mathbf{n}}\right) ds'\end{aligned}$$

A questo punto osserviamo che il prodotto scalare $\Delta \mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ corrisponde alla proiezione del vettore sulla superficie s' ; otterremo un fattore integrando $\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}^2} ds'_\perp$ che, come abbiamo visto nella sezione 2.4 dimostrando il teorema di Gauss, è pari all'angolo solido; integrando su tutta la superficie quindi:

$$-\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{J}(\mathbf{r})\int_{s'} d\Omega = \frac{\mu_0}{4\pi}\mathbf{J}(\mathbf{r}')\,4\pi = \mu_0\mathbf{J}(\mathbf{r})$$

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Appendice B: riferimenti matematici/Calcolo classico della quarta equazione di Maxwell (laplaciano)** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Appendice_B%3A_riferimenti_matematici/Calcolo_classico_della_quarta_equazione_di_Maxwell_(laplaciano)?oldid=46195 *Contributori:* Dan

1.2 Immagini

1.3 Licenza dell'opera