Corso:Meccanica del punto materiale/Oscillatori armonici/Oscillatore armonico smorzato e forzato

Nel precedente capitolo abbiamo studiato il caso di un oscillatore armonico *ideale*, ovvero senza alcun tipo di forzature o forza resistenti che ne alterino il comportamento. Studiamo qui questi due differenti casi.

1 Oscillatore armonico smorzato

Il caso di riferimento è una molla poggiata su un piano orizzontale, privo di attrito, a cui è connessa una massa che si muove di moto oscillatorio come visto in un precedente capitolo. Abbiamo studiato anche la forza di attrito viscoso, dovuta alla resistenza dell'aria. Questi due casi possono legarsi tra loro: una molla in orizzontale, senza attriti col piano, incontra nel suo moto una certa resistenza dell'aria. Una considerazione preliminare da fare è che la resistenza dell'aria lungo il moto orizzontale è *diversa* da quella lungo il moto verticale, e questo è dovuto alle caratteristiche dell'atmosfera. Possiamo tuttavia trattare i due casi come se fossero idealmente uguali, con la resistenza dell'aria descritta da $f_{\text{aria}} = -\mathrm{B}v$.

Per trattare quindi la molla smorzata dall'aria, studiamo le forze agenti sul punto materiale:

$$
\begin{aligned}
&\vec{f}_{tot} = \vec{f}_{\text{molla}} + \vec{f}_{\text{aria}} \\
&f_{tot} = -kx - \mathrm{B}v \\
&ma = -kx - \mathrm{B}v \\
&m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mathrm{B}\frac{dx}{dt} \\
&m\ddot{x} + \mathrm{B}\dot{x} + kx = 0
\end{aligned}
$$

Si ottiene quindi un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea. Per un migliore studio del problema, applichiamo dei cambi di variabile:

$$
\begin{cases}
\gamma = \frac{\mathrm{B}}{2m} \\
\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}
\end{cases}
$$

Otteniamo quindi l'equazione di un oscillatore armonico smorzato, ovvero:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Si può studiare una soluzione al problema; sfruttando le conoscenze delle equazioni differenziali, si può dimostrare che la funzione:

$$x(t) = x_0\, e^{-\gamma t}\, \sin(\omega t)$$

È soluzione dell'equazione differenziale scritta sopra. Calcolando le derivate prime e seconde, sostituendole nell'equazione dell'oscillatore smorzato, otterremo che:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Ovvero:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Una breve analisi del risultato ottenuto. In primis, possiamo notare che $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ equivale alla *pulsazione assoluta* dell'oscillatore armonico, ovvero quella ottenuta nel caso in cui non è presente una qualsiasi resistenza da parte dell'aria. Inoltre, se poniamo $\gamma \to 0$, che equivale a porre B $\to 0$, otteremo che $e^{-\gamma t} = 1$, quindi la soluzione del problema sarà:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t)$$

Concorde col caso in cui non è presente attrito nell'aria. Si noti che, in questo caso, quando $\gamma \to 0$ avremo che $\omega \to \omega_0$, ovvero la pulsazione tende alla pulsazione assoluta dell'oscillatore.

1.1 Calcolo della perdita di energia

Sappiamo che l'energia potenziale di una molla equivale a

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Nel nostro caso, però, la x è variabile, quindi in quella espressione andrebbe sostituita la funzione $x(t)$ a x . Quel che però vogliamo calcolare è la *perdita di energia* ad ogni ciclo, ovvero: quanta energia perde il sistema dopo ogni oscillazione completa? Per questo motivo, facciamo partire il punto materiale da uno degli estremi, e calcoliamo l'energia quando, dopo un'oscillazione completa, è tornato in quel punto. Agli estremi, il valore di $x(t)$ non risente del contributo della funzione seno, poiché, in quel punto, esso è uguale a 1 . Avremo quindi che:

$$x(t) = x_0\, e^{-\gamma t}$$

Valida *solo per i punti di estremo* dopo un'oscillazione completa. Possiamo sostituirla nella formula dell'energia potenziale, che, agli estremi di una molla, coincide con l'energia totale posseduta dal punto; avremo quindi che:

$$E(t) = \frac{1}{2}k\left(x_0\, e^{-\gamma t}\right)^2$$
$$E(t) = \frac{1}{2}kx_0^2\, e^{-2\gamma t}$$

Notiamo immediatamente che, l'energia del sistema, è una funzione del tempo. Chiamato T il periodo di oscillazione del sistema, avremo che:

$$\Delta E = E(t+T) - E(t)$$

Svogliamo i calcoli:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= E(t+T) - E(t)\\
&= \frac{1}{2}kx_0^2\left(e^{-2\gamma(t+T)} - e^{-2\gamma t}\right)\\
&= \frac{1}{2}kx_0^2\left(e^{-2\gamma t}\cdot e^{-2\gamma T} - e^{-2\gamma t}\right)\\
&= \frac{1}{2}kx_0^2\, e^{-2\gamma t}\left(e^{-2\gamma T} - 1\right)\\
\Delta E &= E(t)\left(e^{-2\gamma T} - 1\right)
\end{aligned}$$

Studiamo adesso un caso particolare, quello in cui $2\gamma << 1$; questo caso corrisponde ad una bassa resistenza dell'aria. Possiamo sviluppare in serie di Taylor per ottenere:

$$\Delta E = E(t)(1 - 2\gamma T - 1) = E(t)(-2\gamma T)$$

Il nostro obiettivo era calcolare l'energia persa ad ogni ciclo, quindi avremo che:

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = 2\gamma T$$

Che è la perdita di energia *percentuale* del sistema *ad ogni ciclo compiuto*. Un'importante considerazione che possiamo fare è che questa **non** dipende dal ciclo, ma è costante, ovvero **il sistema perde la stessa quantità di energia dopo ogni ciclo**. Questo risultato ci indica che, per esempio, un'onda sonora (che vedremo presto essere un'oscillatore) perde energia espandendosi nello spazio. È per questo motivo che un suono o un rumore vengono percepiti con più forza quando si è in prossimità della sorgente rispetto a quando si è ad una notevole distanza. Infatti, se il professore in aula urla, gli studenti seduti alle prime file sentiranno un suono molto forte e quasi insopportabile, mentre quelli seduti in piccionaia sentiranno un suono forte ma comunque sopportabile.

2 Oscillatore armonico forzato

Il caso dell'oscillatore armonico forzato è strettamente legato all'esempio delle onde sonore che si propagano nell'aria; queste, incontrando la resistenza dell'aria, vengono via via smorzate, fino ad affievolirsi ad opportune distanze. Il timpano umano, che si comporta da ricettore, funziona anch'esso da oscillatore armonico, solo che, invece di produrre l'onda, la riceve. Per riceverla, deve quindi essere stimolato da una forza esterna, che sia chiama comunemente **forzante**. Quando il ricettore, ovvero il timpano, oscilla alla stessa frequenza dell'onda esterna, ovvero è condizione di risonanza, possiamo percepire il suono, che viene elaborato dal cervello.

Studiamo un modello ideale che rappresenti questa situazione. Abbiamo una molla posta nelle stesse condizioni del paragrafo precedente, con l'aggiunta di una forza esterna di modulo $F\sin(\Omega t)$ che, ad ogni ciclo, agisce sulla molla, forzando l'oscillazione ad essere completa, cosa che, se non vi fosse alcuna forza esterna, non si presenterebbe, causando un'oscillazione *smorzata*. Lo studio dinamico delle forze agenti sul punto materiale all'estremo della molla è quindi:

$$\begin{gathered}\vec{f}_{tot} = \vec{f}_{\text{molla}} + \vec{f}_{\text{aria}} + \vec{f}_{\text{esterna}} \\ m\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{B}\frac{dx}{dt} + kx = F\sin(\Omega t)\end{gathered}$$

In questo caso, Ω rappresenta la pulsazione della forza esterna, diversa dalle due pulsazioni ω e ω_0 che rappresentano, rispettivamente, la pulsazione finale del sistema e quella assoluta del sistema in condizione ideali senza resistenze o forzanti. Riscriviamo l'equazione scegliendo il precedente cambio di variabili, con una aggiunta:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{\mathrm{B}}{2m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ A = \frac{F}{m} \end{cases}$$

Otteniamo quindi l'equazione seguente, che è una equazione differenziale del secondo ordine non omogenea:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\sin(\Omega t)$$

La soluzione di questa equazione è fornita dalla soluzione generale, quando il termine a destra dello è nullo, che abbiamo ricavato sopra, aggiunta a una soluzione particolare del problema, che si può dimostrare essere:

$$x(t) = x_0\,\sin(\Omega t - \delta)$$

Prima di parlare del cambio di variabili, è importante considerare questo termine; la soluzione generale presentava un termine $e^{-\gamma t}$ che, quando t raggiunge valori molto grandi, annulla il contributo del termine. Resta quindi solo la soluzione particolare, qui sopra scritta, a descrivere efficientemente il sistema dopo un dato periodo di tempo. In questa soluzione, i cambi di variabile eseguiti sono stati:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma\Omega^2}} \\ \delta = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right) \end{cases}$$

Il grafico di x_0 in funzione di t è una semplice sinusoide, con valori compresi tra $\pm x_0$. L'interessante è invece graficare x_0 in funzione di Ω : il grafico assumerà un andamento completamente diverso: presenterà un picco nel caso in cui $\Omega \to \omega_o$.

Come nel caso precedente, in cui abbiamo calcolato la perdita di energia, possiamo qui calcolare il diminuire della frequenza di pulsazione, che sarà uguale a (ci esoneriamo dai calcoli):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{\omega_0}$$

3 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

3.1 Testo

- **Corso:Meccanica del punto materiale/Oscillatori armonici/Oscillatore armonico smorzato e forzato** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Oscillatori_armonici/Oscillatore_armonico_smorzato_e_forzato?oldid=49457 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60

3.2 Immagini

3.3 Licenza dell'opera