Corso:Calcolo Numerico I1/Sistemi lineari/Metodi di rilassamento

1 Definizione del metodo

Definiamo il metodo di Gauss-Seidel come:

$$\boldsymbol{x}_k = D^{-1}(\boldsymbol{b} - L\boldsymbol{x}_k - U\boldsymbol{x}_{k-1})$$

Possiamo scrivere $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{v}_k$ con $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}$.

La nuova iterata è il punto in $\mathbb{C}_n$ che otteniamo a partire da $\boldsymbol{x}_{k-1}$ facendo un passo di lunghezza $|\boldsymbol{v}_k|$ nella direzione di $\boldsymbol{v}_k$.

Viene definita una nuova classe di metodi, detti *di rilassamento*, dove

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_{k-1} + \omega * \boldsymbol{v}_k$$

dove si fa un passo di lunghezza $\omega * |\boldsymbol{v}_k|$.

Se $\omega < 1$ ho un *sottorilassamento*, mentre se $\omega > 1$ ho un *soprarilassamento*.

Un metodo di questo tipo viene chiamato SOR.

Sostituisco nella relazione che definisce il metodo SOR l'espressione di $\boldsymbol{v}_k$ che deriva da Gauss-Seidel.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_k &= \boldsymbol{x}_{k-1} + \omega * (\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}) = (1-\omega)\boldsymbol{x}_{k-1} + \omega\boldsymbol{x}_k \\ &= (1-\omega)\boldsymbol{x}_{k-1} + \omega(D^{-1}(\boldsymbol{b} - L\boldsymbol{x}_k - U\boldsymbol{x}_{k-1}))\end{aligned}$$

e mettendo in evidenza D^{-1} si ha:

$$\boldsymbol{x}_k = D^{-1}[(1-\omega)D * \boldsymbol{x}_{k-1} + \omega\boldsymbol{b} - \omega L\boldsymbol{x}_k - \omega U\boldsymbol{x}_{k-1}]$$

Raccogliendo tutti i termini che moltiplicano $\boldsymbol{x}_k$:

$$(I + \omega D^{-1}L)\boldsymbol{x}_k = D^{-1}((1-\omega)D - \omega U)\boldsymbol{x}_{k-1} + \omega D^{-1}\boldsymbol{b}$$

Moltiplicando per D :

$$(D + \omega L)\boldsymbol{x}_k = ((1-\omega)D - \omega U)\boldsymbol{x}_{k-1} + \omega\boldsymbol{b}$$

Allora

$$P = (D + \omega L)^{-1} * ((1 - \omega)D - \omega U)$$

è la matrice di iterazione, invece

$$\boldsymbol{c} = \omega(D + \omega L)^{-1}\boldsymbol{b}$$

Allora

$$D\boldsymbol{x}_k = ((1 - \omega)D - \omega U)\boldsymbol{x}_{k-1} - \omega L\boldsymbol{x}_k + \omega\boldsymbol{b}$$

Considerando la i-esima componente:

$$x_i^{(k)} = (1 - \omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{A_{ii} * [b_i - \sum_j < i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum j > i a_{ij}x_j^{(k+1)}]$$

e per $\omega = 1$ si ha il metodo di Gauss-Seidel.

Il costo computazionale di questo metodo è vicino a quello di Gauss-Seidel.

2 Ottimizzazione del metodo

Si vuole determinare l' ω ottimale, tale per cui il metodo converge più velocemente.

Teorema 2.16

[teorema di Kan] Condizione necessaria per la convergenza del SOR è che $|\omega - 1| < 1$, ovvero $\omega \in (0, 2)$ se ω è reale.

Vale la seguente condizione sufficiente per la convergenza:

Teorema 2.17 (Teorema di Ostrosky-Right)

Se A è definita positiva e $\omega \in (0, 2)$ allora il metodo SOR è convergente.

Dimostrazione

La matrice di iterazione è

$$P_\omega = (D + \omega L)^{-1} * ((1 - \omega)D - \omega U)$$

$D + \omega L$ è una matrice triangolare inferiore con elementi $a_{11}, \ldots a_{nn}$ sulla diagonale principale, e il determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale, cioè è uguale a $\det D$.

La matrice $(1 - \omega)D - \omega U$ è una triangolare superiore con elementi diagonali $(1 - \omega)a_{11}, \ldots, (1 - \omega)a_{nn}$ mentre la parte triangolare ha entrate ωa_{ij} . Il determinante è ancora dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale, e quindi è $(1 - \omega)^n \det D$.

Per il teorema di Binet:

$$\det P_\omega = \det[(1-\omega)D - \omega U] * \frac{1}{\det(D+\omega L)} = \frac{(1-\omega)^n * \det D}{\det D} = (1-\omega)^n$$

Inoltre

$$\det P_\omega = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(P_\omega) =$$

Siccome ciascun autovalore di P_ω è minore del raggio spettrale, si ha

$$|1-\omega|^n \leq \rho^n(P_\omega)$$

e se deve esserci convergenza dev'essere

$$\rho(P_\omega) \leq 1$$

allora la relazione implica $|1-\omega| \leq 1$.

cvd

Nel caso delle matrici tridiagonali vale il seguente teorema:

Teorema 2.18

Sia $A \in \mathbb{C}_{n,n}$ tridiagonale. Se P_j (matrice d'iterazione di Jacobi) è tale che $\rho(P_j) < 1$, e ha autovalori reali, allora esiste ed è unico ω^* tale che

$$\rho(P_\omega^*) = \min_{\omega \in (0,2)} \{\rho(P_\omega)\}$$

Sappiamo che $\omega^* = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(P_j)}}$.

E' possibile rappresentare la variazione del raggio spettrale in funzione di ω : traccio un grafico con ω in ascissa e p_ω in ordinata, allora il grafico scende, ha una cuspide in ω^* e poi risale in maniera lineare.

Per $\omega > \omega^*$, $\rho(P(\omega^*)) = \omega - 1$.

Conviene stare a destra di ω^* , perché in questo modo il raggio spettrale sarà più grande di poco, invece a sinisra si è in prossimità della cuspide e il valore varia di molto. Conviene approssimare per eccesso.

3 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

3.1 Testo

- **Corso:Calcolo Numerico I1/Sistemi lineari/Metodi di rilassamento** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_Numerico_I1/Sistemi_lineari/Metodi_di_rilassamento?oldid=48273 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio

3.2 Immagini

3.3 Licenza dell'opera