Corso:Algebra IV I1/Teoria di Galois/Stabilità e normalità

1 Stabilità

Definizione 2.4

Siano $K \subseteq L \subseteq M$ estensioni di campi, e sia $G = \mathcal{G}(M/K)$, allora L è un *campo intermedio stabile* (relativamente a M e K) se succede che $L^g \subseteq L, \ \forall g \in G$.

Osservazione 2.9

Un campo intermedio L è stabile se e solo se $L^g = L, \ \forall g \in G$.

Infatti, se $L^g = L, \ \forall g \in G$, è chiaro che L è stabile.

Viceversa, mostro che se L è stabile, si ha $L \subseteq L^g$. Prendo $g \in G, l \in L$, allora siccome L è stabile e la relazione vale per ogni g , deve valere anche per g^{-1} e quindi $l^{g^{-1}} \in L$, e dunque, applicando g , $(l^{g^{-1}})^g = l \in L^g$, cioè $L \subseteq L^g$.

2 Corrispondenza tra campi stabili e sottogruppi normali

Proposizione 2.2

Sia $M \supseteq K$ un'estensione di campi, e $G = \mathcal{G}(M/K)$. Allora,

1. se L è un campo intermedio stabile, L' è un sottogruppo normale in G , ovvero $L' = \mathcal{G}(M/L)$ è normale in $\mathcal{G}(M/K)$.
2. se H è un sottogruppo normale di G , allora $H' = \text{Fix(H)}$ è un campo intermedio stabile.

Dimostrazione

1. Per ipotesi, L è un campo intermedio stabile, e **mostro che L' è normale in G** , cioè, applicando la definizione, mostro che dati $h \in L', g \in G$, $g^{-1}hg \in L'$; equivalentemente mostro che $g^{-1}hg$ fissa L elemento per elemento. Prendo $l \in L$, e calcolo

$$l^{g^{-1}hg} = (l^{g^{-1}})^{hg}$$

ma $l^{g^{-1}} \in L$ e h fissa L elemento per elemento, quindi

$$= l^{g^{-1} * g} = l$$

e quindi la tesi è vera.

2. Sia H un sottogruppo normale di G , allora **mostro che** $H' = \text{Fix(H)}$ **è un campo intermedio stabile**, ovvero che $(H')^g \subseteq H'$ per ogni $g \in G$. Considero $\alpha \in H'$ e mostro che, fissato arbitrariamente $g \in G$, si ha $\alpha^g \in \text{Fix(H)}$ .Siccome H è normale, si ha $gh = kg$ per un certo $k \in H$. Allora $\alpha^{gh} = \alpha^{kg} = \alpha^g$ (infatti $k \in H \longrightarrow \alpha^k = \alpha$), e quindi $\alpha^g \in \text{Fix(H)}$.

La stabilità di L è legata alla normalità dell'estensione $L \supseteq K$.

Per la dimostrazione della prossima proposizione è necessario il seguente lemma:

Lemma 2.6

Sia $M \supseteq K$ un'estensione di campi normale, e sia $f(x) \in K[x]$ un polinomio monico e irriducibile. Se $f(x)$ ammette una radice in M , allora si spezza in $M[x]$ in prodotto di fattori lineari distinti.

Dimostrazione

Sia $\alpha \in M$ una radice di $f(x)$, che esiste per ipotesi. Sia $G = \mathcal{G}(M/K)$, e A l'insieme delle immagini distinte di α sotto l'azione di G . Se β è un elemento di A , allora sarà della forma α^g per $g \in G$. Sappiamo che β è radice di $f(x)$, e quindi A è finito, e ha cardinalità $r \leq \text{gr(f(x))}$. Scriviamo $A = \{\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$.

Consideriamo il polinomio $p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) * \cdots * (x - \alpha_r) \in M[x]$. I coefficienti di $p(x)$ sono le funzioni simmetriche elementari in $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, definite come segue

$$\begin{aligned}
\sigma_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= 1 \\
\sigma_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) &= \sum_j \alpha_j \\
\sigma_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) &= \sum_{j_1 < j_2} \alpha_{j_1} * \alpha_{j_2} \\
&\ldots\ldots \qquad \ldots \\
\sigma_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) &= \sum_{j_1 < j_2 < \cdots < j_i} \alpha_{j_1} * \alpha_{j_2} * \cdots * \alpha_{j_i} \\
&\ldots\ldots \qquad \ldots \\
\sigma_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) &= \alpha_1 * \alpha_2 * \cdots * \alpha_r
\end{aligned}$$

Quindi

$$p(x) = \sum_{h=0}^{r} (-1)^h \sigma_h(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) x^{r-h}$$

Le funzioni elementari sono invarianti se permuto $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. D'altra parte gli elementi di G permutano $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ e quindi fissano i coefficienti di $p(x)$. $M \supseteq K$

è normale per ipotesi, allora $p(x)$ è un polinomio a coefficienti in K (i coefficienti stanno in $G' = \mathrm{FixG}$). D'altra parte $p(\alpha) = 0$, e $f(x)$, essendo irriducibile, è il polinomio minimo di α . Allora $f(x) \mid p(x)$. In particolare $\mathrm{gr(p(x)) = r \geq gr(f(x))}$, e siccome si aveva $r \leq \mathrm{gr(f(x))}$, segue che $r = \mathrm{gr(f(x))}$. Poi $f(x)$ e $p(x)$ sono entrambi monici dunque $p(x) = f(x)$, cioè $f(x)$ si spezza su M .

Proposizione 2.3

1. supponiamo che $M \supseteq L \supseteq K$ siano estensioni di campi, con $M \supseteq K$ normale e L stabile. Allora l'estensione $L \supseteq K$ è normale.
2. Siano $M \supseteq L \supseteq K$ estensioni di campi, e supponiamo che $L \supseteq K$ sia normale e algebrica. Allora L è stabile.

Dimostrazione

1. Considero $\alpha \in L \setminus K$, e mostro che esiste $h \in \mathcal{G}(L/K)$ tale che $\alpha^h \neq \alpha$. Siccome $M \supseteq K$ è normale e α sta in M , esiste $g \in G$ tale che $\alpha^g \neq \alpha$. Se considero $h = g_{|_L} : L \to L^g = L$, ($L^g = L$ perché L è stabile), allora $h \in \mathcal{G}(L/K)$.
2. Per la seconda parte è necessario il lemma dimostrato prima.Mostro che dato $\alpha \in L$ e $g \in \mathcal{G}(M/K)$, allora $\alpha^g \in L$. Per ipotesi $\alpha \in L$ è algebrico su K , allora posso considerare il polinomio minimo $f(x) \in K[x]$ di α su K .Per il lemma precedente, $f(x)$ si spezza in fattori lineari distinti in $L[x]$ .D'altra parte, α^g è una radice di f , e quindi $\alpha^g \in L$.

Sia $M \supseteq K$, L un campo intermedio stabile, allora possiamo considerare l'applicazione $\phi : \mathcal{G}(M/K) \to \mathcal{G}(L/K)$, tale che $g \mapsto g_{|_L}$. ϕ è un omomorfismo di gruppi, con

$$\ker \phi = L' = \mathcal{G}(M/L)$$

$Im\phi$ è l'isieme degli automorfismi di L su K (cioè che fissano K elemento per elemento), che si sollevano ad automorfismi di M su K .

Dalle proposizioni precedenti si ha il seguente risultato:

Proposizione 2.4 (conseguenza)

Supponiamo che $M \supseteq K$ sia normale e di grado finito. Allora L campo intermedio è stabile se e solo se $L \supseteq K$ è normale. Inoltre l'omomorfismo $\phi : \mathcal{G}(M/K) \to \mathcal{G}(L/K)$ è suriettivo.

Dimostrazione

Osservo in particolare che il fatto che $M \supseteq K$ sia di grado finito implica che $L \supseteq K$ è algebrica, e quindi il "se e solo se" segue dalla proposizione precedente.

Per quanto riguarda la suriettività di ϕ , per il teorema fondamentale

$$o(\mathcal{G}(L/K)) = |L : K| = |K' : L'| = |\frac{\mathcal{G}(M : K)}{\mathcal{G}(M : L)}| = \frac{o(\mathcal{G}(M/K))}{o(\mathcal{G}(M/L))} = \frac{o(\mathcal{G}(M/K))}{\ker \phi}.$$

Possiamo aggiungere al teorema fondamentale della teoria di Galois anche il seguente fatto:

Teorema 2.3

Sia L un campo intermedio tra K e M , allora $L \supseteq K$ è un'estensione normale se e solo se L' è normale in G , e in tal caso G/L' è isomorfo a $\mathcal{G}(L/K)$.

Dimostrazione

Va giustificato solo il fatto che $L \supseteq K$ è normale se e solo se L' è normale in G .

Dalla "conseguenza" segue che L è stabile, allora L' è normale in G per la relazione tra la normalità di sottogruppi e la stabilità dei campi intermedi. Viceversa, L' normale in G implica che L'' è stabile, ma siccome L e' chiuso si ha $L'' = L$ e quindi L è stabile.

3 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

3.1 Testo

- **Corso:Algebra IV I1/Teoria di Galois/Stabilità e normalità** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAlgebra_IV_I1/Teoria_di_Galois/Stabilit%C3%A0_e_normalit%C3%A0?oldid=48093 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio

3.2 Immagini

3.3 Licenza dell'opera

- [Project:Copyright Creative Commons Attribution Share Alike 3.0 & GNU FDL]
- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0