Corso:Algebra Gruppi (Unimib)/Gruppi/Classi laterali di un sottogruppo

1 Relazioni di equivalenza associate ad H

Sia H un sottogruppo di G . Allora ad H sono associabili due relazioni di equivalenza:

1. D_H : Se a, b sono elementi di G , aD_Hb se esiste $h \in H$ tale che $b = h * a$
2. S_H : aS_Hb se esiste $h \in H$ tale che $b = a * h$

Se il gruppo è abeliano queste due relazioni sono sempre equivalenti.

Se in un gruppo non abeliano queste relazioni sono equivalenti, allora si ha un gruppo normale.

Lemma (156)

D_H e S_H sono relazioni di equivalenza su G .

Dimostrazione

Il fatto che queste relazioni sono di equivalenza dipende dal fatto che H è un sottogruppo.

1. Se $h = 1_g$, allora $a = 1_g * a$ e ho trovato un h per cui la proprietà riflessiva vale con $a = b$
2. se aD_Hb , allora esiste h tale che $b = h * a$, ma posso moltiplicare per l'inverso di h i termini di quest'uguaglianza e

ottengo $h^{-1} * b = a$, quindi ho trovato un elemento h^{-1} di H tale che vale la simmetria;

1. la transitività dipende dalla chiusura di H rispetto al prodotto: se aD_Hb e bD_Hc ,

allora esiste h tale che $b = ah$ ed esiste k tale che $c = bk$, quindi $c = (ah)k = a(hk)$ e a è associato a c .

2 Notazione

$[a]_{D_H}$ è la classe che contiene l'elemento a e consiste di tutti i soli i b in G che si possono scrivere come $h * a$, cioè

$$\{g \in G t.c. \exists h \in H \text{ tale che } g = h * a\} = \{g = h * a, h \in H\}$$

,

ci sono tutti i prodotti degli elementi di H per a , quindi chiamo la classe di equivalenza di a con Ha .

In notazione additiva, $b = ha$ equivale a $b = h + a$ e il simbolo della classe di equivalenza che contiene a sarebbe $H + a$.

La classe che contiene a rispetto alla relazione S_H consiste di

$$\{g = a * h\}$$

,

e la classe di equivalenza che contiene a si denota col simbolo aH oppure in notazione additiva con $a + H$.

3 Definizioni

Definizione (157 Laterali)

Le classi di equivalenza della relazione D_H si dicono *laterali destri* del sottogruppo H in G , mentre le classi di equivalenza della relazione S_H si dicono *laterali sinistri* di H in G (equivalgono all'insieme quoziente della relazione S_H su G).

G è unione disgiunta dei laterali destri di H in G (è unione disgiunta delle classi di equivalenza).

Osservazione (158)

Non tutti i laterali sono sottogruppi: H è un laterale di sé stesso ed è l'unico laterale che contiene l'unità; quindi se ci sono altri laterali non possono essere sottogruppi.

4 Uguaglianza tra laterali

Prendo Ha e Hb laterali destri. Si ha che $Ha = Hb$ se e solo se $b * a^{-1} \in H$. Infatti in questo modo $b = Ha = b*a^{-1}*a = b$ quindi $b \in Ha$ e $h = b*a^{-1}$, allora anche l'inverso di h che è $h^{-1} = a*b^{-1} \in H$. Si ha anche $a = Hb = a*b^{-1}*b = a$ e quindi $a \in Hb$, quindi $Hb = Ha$

In notazione additiva due laterali coincidono se e solo se la differenza $b - a$ è un elemento di H .

Nel caso sinistro, $aH = bH$ se e solo se $a^{-1}b \in H$, quindi $-a + b \in H$.

5 Esempi sulle classi laterali

Ci sono due partizioni di G , quella dei laterali destri e quella dei laterali sinistri di $H \in G$. Se le due partizioni coincidono allora $D_H = S_H$.

Può succedere che D_H coincida con S_H oppure no. Il più piccolo gruppo non abeliano in cui le due relazioni non coincidono è il gruppo simmetrico di 3 oggetti.

Esempio (159)

Nel gruppo S_3 prendo il sottogruppo generato dallo scambio $(1,2)$ che consiste dell'identità e di $(1,2)$. Se calcolo D_H e S_H sono diverse, perché le partizioni dei laterali destri e sinistri di questi 6 elementi sono diverse.

Laterali destri di $(1,2) \in S_3$:

$$H * (1,2) = H * (id)$$
$$H * (1,2,3) = (1,2) * (1,2,3), id * (1,2,3)$$
$$H * (1,2,3) = (2,3), (1,2,3) = H * (2,3)$$
$$H * (1,3) = (1,2) * (1,3), id * (1,3)$$
$$H * (1,3) = (1,3,2), (1,3) = H * (1,3,2)$$

Per s_H si trova una partizione diversa di S_3 .

$$(1,2) * H = id * H = H$$
$$(1,3) * H = (1,3) * (1,2), (1,3) * id$$
$$(1,3) * H = (1,2,3), (1,3) = (1,2,3) * H$$
$$(2,3) * H = (2,3) * (1,2), (2,3) * id$$
$$(2,3) * H = (1,3,2)), (2,3) = (1,3,2) * H$$

Esempio (160)

Nel gruppo S_3 , se prendo come sottogruppo $H = A_3$, le due partizioni coincidono. Si ha $o(A_3) = 3!/2 = \frac{o(S_3)}{2}$.

In generale, in ogni gruppo finito in cui si prende un sottogruppo tale che il numero dei laterali ha indice 2 si ha che le due relazioni coincidono (cioè, ogni sottogruppo che ha la metà degli elementi del gruppo è normale (le due relazioni coincidono).

I laterali destri di A_4 sono due: H che è il laterale che contiene l'unità, e $H * \sigma$ dove σ è una permutazione dispari, non appartenente ad H .

I laterali sinistri sono H e $\sigma * H$, con $\sigma \notin H$.

La partizione consiste di due oggetti in entrambe le relazioni. Per ogni $\sigma \in S_n$ i due laterali destri sono disgiunti e la loro unione è uguale ad S_n .

Esempio (161)

Preso il gruppo S_4 con $o(S_4) = 4!$, allora $H = A_4$ è un sottogruppo normale. Anche il sottogruppo costituito da id e dai prodotti di due scambi disgiunti $(1,2)*(3,4)$, $(1,3)*(2,4)$, $(1,4)*(2,3)$ chiamato gruppo trirettangolo è un gruppo normale. Anche in questo caso si vede che le due relazioni D_h e S_h coincidono.

Esclusi questi due gruppi e i sottogruppi banali, non ci sono altri sottogruppi normali in S_4 .

6 Dimostrazione del teorema di Lagrange

Teorema (162)

Sia G un gruppo finito di ordine n e sia H un sottogruppo di G di ordine r . Allora r è un divisore dell'ordine del gruppo, cioè $r \mid n$.

Dimostrazione

Per ogni fissato elemento $a \in G$, consideriamo l'applicazione $f_a \colon H \to Ha$ che manda ogni $h \in H$ nel prodotto $h * a$. (non cambia niente se si considera il laterale sinistro, infatti il numero dei laterali destri e quello dei laterali sinistri è uguale)

Ogni elemento del laterale $H * a$ è della forma $h * a$ con $h \in H$, quindi f_a è suriettiva per definizione: preso un qualsiasi elemento $h * a$ esso ha una preimmagine mediante f .

Inoltre F_a è iniettiva, per la validità delle leggi di cancellazione del gruppo: presi due elementi $h_1, h_2 \in H$ che abbiano la stessa immagine si ha $h_1 * a = h_2 * a$ e cancellando a si ottiene $h_1 = h_2$.

Siccome l'applicazione è biettiva, allora per ogni fissato $a \in G$ la cardinalità di H coincide con quella di aH .

I laterali sono un numero finito s , allora $G = \bigcup\{H, H * a_2, \ldots, H * a_s\}$. Siccome tutti i laterali hanno la stessa cardinalità, allora $|G| = |H * 1_G| + |H * a_2| + \cdots + |H * a_s|$. Ci sono quindi s laterali con cardinalità r (uguale a quella di H), quindi $n = O(G) = r * s$, quindi $r \mid n$.

Abbiamo anche provato che l'ordine del gruppo è uguale all'ordine del sottogruppo per il numero dei laterali.

7 Corollari e osservazioni

Corollario (163)

Sia G come sopra e sia a un qualsiasi elemento di G . Allora il periodo di a è un divisore dell'ordine del gruppo (equivalentemente, $a^n = 1_G$).

Dimostrazione

Se a ha periodo r , allora il sottogruppo ciclico generato da a ha ordine r e si ha che $a^r = 1_G$. Allora per il teorema di Lagrange l'ordine r del sottogruppo ciclico generato da a divide n . Per il corollario sulla funzione potenza, se $r \mid n$ e $a^r = 1_G$, $a^n = 1_G$

Osservazione (164)

Il teorema di Lagrange non si inverte in generale. Il controesempio minimo è $G = A_4$. Infatti $o(A_4) = 12$ ma A_4 non contiene sottogruppi di ordine 6 . Se ci fosse un sottogruppo di ordine 6 , conterrebbe la metà degli elementi di A_4 e sarebbe un sottogruppo normale in A_4 .

In alcune classi particolari di gruppi il teorema si inverte. Ad esempio, preso un gruppo ciclico finito, per ogni divisore dell'ordine del gruppo esiste un sottogruppo che ha come ordine quel divisore.

8 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

8.1 Testo

- **Corso:Algebra Gruppi (Unimib)/Gruppi/Classi laterali di un sottogruppo** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAlgebra_Gruppi_(Unimib)/Gruppi/Classi_laterali_di_un_sottogruppo?oldid=48168 *Contributori:* Toma.luca95 e Mmontrasio

8.2 Immagini

8.3 Licenza dell'opera