Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Seconda legge cardinale/Pendolo fisico

Nella meccanica del punto materiale abbiamo già trattato del pendolo, trattando in quel caso un semplice punto materiale appeso ad un filo. Nella realtà, però, abbiamo a che fare con strumenti ben diversi, con caratteristiche fisiche ben diverse che non possono essere approssimabili a punti materiali: trattiamo qui di pendoli fisici, ovvero di oggetti che pendolano.

Qualsiasi oggetto può comportarsi da pendolo fisico; l'esempio più immediato, e rilevante per confronto con il pendolo semplice, è una sbarretta omogenea che può ruotare attorno a un estremo. La variabile che descrive il moto del corpo è l'angolo θ che la sbarretta forma con la verticale, quindi il problema presenta un solo grado di libertà. Come verso positivo, scegliamo l'angolo che forma a destra della verticale.

Le forze agenti sul corpo sono la reazione del vincolo $\vec{R}$, che è applicata al perno attorno al quale ruota il corpo; non conosciamo nulla di questa forza, ne modulo, ne direzione o verso. Conosciamo invece la forza peso $M\vec{g}$ applicata al centro di massa della sbarretta, ovvero al centro geometrico, e diretta verso il basso. Per studiare il moto sfruttiamo la seconda legge cardinale dei sistemi, scegliendo come polo il punto O attorno al quale la sbarretta ruota. Avremo quindi:

$$\vec{\tau}^{ext} = \vec{r_1} \wedge M\vec{g} + \vec{r_2} \wedge \vec{R} = \vec{r_1} \wedge M\vec{g}$$

Avendo scelto come polo O il braccio della forza vincolare è nullo e non contribuisce quindi al momento. Il fattore $\vec{r_1} \wedge M\vec{g}$ ha invece modulo:

$$|\vec{r_1} \wedge M\vec{g}| = \frac{l}{2} Mg \sin\theta$$

La distanza dal polo del centro di massa è infatti metà sbarretta, e l'angolo formato tra il braccio e la forza peso è lo stesso che l'asta forma con la verticale. Notiamo inoltre che il momento è *di richiamo*: per angoli positivo esso assume segno negativo e l'asta ruota in senso orario, tendendo a tornare alla posizione d'equilibrio; analogamente, per angoli negativi ha verso positivo, l'asta ruota in senso antiorario e torna sempre verso la posizione di equilibrio. La componente lungo l'asse z sarà quindi:

$$\tau_z = -\frac{l}{2} Mg \sin\theta$$

Applichiamo ora la legge cardinale:

$$\tau_z = \frac{dJ}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{l}{2}\,Mg\,\sin\theta$$

Otteniamo l'espressione:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{l\,Mg}{2\,I}\,\sin\theta = 0$$

Per angoli piccoli approssimiamo $\sin\theta \approx \theta$, ottenendo l'equazione differenziale di un oscillatore armonico:

$$\ddot{\theta} + \frac{l\,Mg}{2\,I}\,\theta = 0$$

La pulsazione del moto sarà $\omega = \sqrt{\frac{l\,Mg}{2\,I}}$, mentre la soluzione del problema è data dall'equazione:

$$\theta(t) = \theta_{MAX}\,\sin(\omega t + \varphi)$$

Ricordiamo che il momento d'inerzia di una sbarretta ruotante attorno a un asse passante per l'estremo è $I = \frac{Ml^2}{3}$; sostituendolo nell'espressione della pulsazione:

$$\omega = \sqrt{\frac{l}{2}\,\frac{M}{Ml^2}\,3g} = \sqrt{\frac{3}{2}\,\frac{g}{l}}$$

Che è molto simile a quella ottenuta per il pendolo semplice, che ricordiamo essere $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

1 Pendolo fisico a cono

Come per il pendolo semplice, anche per il pendolo fisco può esserci il caso in cui l'oggetto non oscilli bensì ruoti attorno a una quota fissa, mantenendo l'angolo θ con la verticale costante. Le forze agenti restano sempre $\vec{R}$, reazione vincolare, e $M\vec{g}$, forza peso, applicata al centro della sbarretta. Come polo scegliamo anche questa volta il punto di vincolo O , per cui la reazione vincolare non contribuisce al momento in questo caso. Quindi sarà:

$$\vec{\tau}^{ext} = \vec{r} \wedge M\vec{g}$$

In modulo avremo che $\tau = \frac{l}{2}Mg\sin\theta$. Per il momento angolare, invece:

$$\vec{J} = \int \vec{r} \wedge dm\vec{v} \Rightarrow |\vec{J}| = \int_0^l r dmv = \lambda \int_0^l r dr v$$

Però, come già sappiamo, questo procedimento porta a

$$|\vec{J}| = I\omega = \left(\frac{Ml^2}{3}\sin\theta\right)\omega$$

La componente verticale del momento angolare sarà data da $J_z = J\sin\theta = \frac{Ml^2}{3}\sin^2\theta\omega$

Il momento delle forze esterne, in modulo, è uguale a $|\vec{\tau}| = \left|\frac{d\vec{J}}{dt}\right| = J_z\,\omega = \frac{Ml^2}{3}\sin^2\theta\omega^2$; uguagliandolo al momento sopra calcolato:

$$\frac{Ml^2}{3}\sin^2\theta\omega^2 = \frac{l}{2}Mg\sin\theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{l\sin\theta}$$

2 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

2.1 Testo

- **Corso:Meccanica dei sistemi di punti e corpi rigidi/Seconda legge cardinale/Pendolo fisico** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_dei_sistemi_di_punti_e_corpi_rigidi/Seconda_legge_cardinale/Pendolo_fisico?oldid=49523 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60

2.2 Immagini

2.3 Licenza dell'opera

- [Project:Copyright Creative Commons Attribution Share Alike 3.0 & GNU FDL]
- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0