Utente:Lcberselli/Analisi 3/Analisi 3/L'equazione di Poisson e l'equazione di Laplace

Siano dati sul piano due punti (a,α) e (b,β) ; vogliamo trovare una funzione u tale che:

$$\begin{cases} \int_a^b |u'(x)|^2 dx \text{ sia minimo} \\ u(a)=\alpha \\ u(b)=\beta \end{cases}$$

Supponiamo di aver trovato una tale f che minimizza l'energia; sia $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$, cioe' tale che $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. Definiamo:

$$J(\varepsilon)=\int_a^b |f'(x)+\varepsilon\varphi'(x)|^2 dx;$$

allora, visto che f minimizza l'energia, abbiamo:

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{J(\varepsilon)-J(0)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_a^b |f'(x)+\varepsilon\varphi'(x)|^2dx-\int_a^b|f'(x)|^2dx}{\varepsilon}=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0} 2\int_a^b f'(x)\varphi'(x)dx+\varepsilon\int_a^b|\varphi'(x)|^2dx=2\int_a^b f'(x)\varphi'(x)dx.$$

Quindi, integrando per parti (e dunque supponendo $f\in C^2(a,b)$), abbiamo:

$$0=\int_a^b f'(x)\varphi'(x)dx=\underbrace{\left[f''(x)\varphi(x)\right]_a^b}_{=0}-\int_a^b f''(x)\varphi(x)dx$$

$\forall\varphi\in C_0^\infty(a,b)$.

Ora, se $f\in C^2(a,b)$ e se fosse $f''(x_0)>0$ per un certo x_0 , allora si avrebbe $f''(x)>0$ per $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$, dunque prendendo φ che vale 1 su $[x_0-\delta/2,x_0+\delta/2]$ e 0 fuori da $[x_0-\delta,x_0+\delta]$, si avrebbe che l'integrale non sarebbe 0 , quindi concludiamo che $f''(x)\equiv 0$. In altre parole, la funzione che minimizza l'energia e' la retta.

Imponiamo adesso un'altra condizione, cioe' che la funzione u debba superare un vincolo posto nell'intervallo $[a,b]$, cioe' u deve essere tale che:

$$\begin{cases} \int_a^b |u'(x)|^2 dx \text{ sia minimo} \\ u(x) \geq \psi(x) \\ u(a) = \alpha \\ u(b) = \beta \end{cases}$$

Se ad esempio $\psi(x) = c\chi_{\{x_0\}}$, allora ci immaginiamo che la funzione u voluta sia la spezzata che unisce (a, α) a (x_0, c) e (x_0, c) a (b, β) ; pero' questa funzione non puo' essere ottenuta con il ragionamento precedente, in quanto tale u non sarebbe C^2 . Dobbiamo quindi metterci in un contesto in cui sia sempre possibile fare le derivate (che saranno quindi derivate in senso debole).

Occupiamoci ora del problema in d dimensioni; sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ e consideriamo una membrana che si deve appoggiare sul bordo $\partial\Omega$ in modo da minimizzare l'energia: abbiamo quindi un problema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \text{ sia minimo} \\ u(x) = g(x) \text{ per } x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Come prima definiamo $J(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx$ e, presa $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, imponiamo a 0 il limite del rapporto incrementale di J lungo φ :

$$0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(u + \varepsilon\varphi) - J(u)}{\varepsilon} = \cdots = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx.$$

Integrando per parti:

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \varphi(x) dx = - \int_\Omega \Delta u(x) \varphi(x) dx + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(x)}{\partial n} \varphi(x) dS}_{=0},$$

quindi, se $u \in C^2$, si ha che $\int_\Omega \Delta u(x) \varphi(x) dx = 0 \ \forall \varphi$, dunque ragionando come prima $\Delta u = 0$.

Osservazione

Notiamo che in generale non e' vero che esista una funzione u che minimizza l'energia; ad esempio consideriamo il problema:

$$\begin{cases} \int_0^1 (u(x))^2 + (|u'(x)| - 1)^2 dx \text{ sia minimo} \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La soluzione $u(x)$ e' una funzione con derivata ± 1 in ogni punto piu' vicina possibile all'asse x ; osserviamo che la successione di funzioni $\{u_n\}$ tale che u_n unisce i punti $(0, 0)$, $(1/n, 1/n)$, $(0, 2/n)$, $(1/n, 3/n)$, . . . , $(0, 1)$ rende l'integrale precedente piu' piccolo di c/n , con c una certa costante. Dunque l'estremo inferiore di quell'integrale e' 0 , ma d'altra parte il limite della successione di funzioni minimizzanti, che e' 0 , non coincide con il minimizzante dell'integrale; si conclude che il minimo non esiste.

Quindi, per risolvere il problema, dobbiamo trovare una successione minimizzante $\{u_n\}$ tale che $u_n \to u$ e:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2,$$

cioe' tale che $\nabla u_n \to \nabla u$ in $\mathcal{L}^2(\Omega)$; questo non impedisce pero' a ∇u a essere illimitato in qualche punto.

Ritorniamo ora al problema variazionale considerato; senza supporre eccessiva regolarita' su $u \in C^1(\Omega)$, avevamo trovato la condizione che:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = 0$$

$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definiamo il prodotto scalare:

$$\mathcal{B}(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi;$$

sicuramente e' bilineare e $\mathcal{B}(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \geq 0$, ma esso induce una seminorma (e non una norma), in quanto $\mathcal{B}(u,u) = 0 \iff u = c$ costante quasi ovunque. Preferiamo dunque considerare il prodotto scalare:

$$\mathcal{C}(u,\varphi) = \int_\Omega u\varphi dx + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx,$$

in quanto $\mathcal{C}(u,u) = 0 \iff u = 0$ quasi ovunque. Osserviamo inoltre che $\mathcal{C}$ e' ben definito non appena $u, \nabla u, \varphi, \nabla \varphi \in \mathcal{L}^2(\Omega)$; in altre parole e' ben definito se, presa $u_n \to u$ in $\mathcal{L}^2$, si ha che $\exists g \in \mathcal{L}^2$ tale che:

$$\int_\Omega |\nabla u_n - g|^2 \longrightarrow 0$$

quando $n \to \infty$. Denoteremo tale $g = \nabla u$ in senso improprio.

Osservazione

Supponiamo di voler risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(0) = 0 \end{cases} , \quad \text{dove } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{se } t > 1 \end{cases}$$

Il problema non e' ben definito in senso classico, in quanto f ha una discontinuita' di salto, quindi non puo' esistere una y derivabile che abbia f come derivata; potremmo chiedere che valga $y'(t) = f(t)$ quasi ovunque, ma cio' puo' causare problemi piuttosto importanti: se ad esempio chiediamo che $y'(t) = 0$ quasi ovunque, y puo' essere la scala di Cantor, eliminando l'unicita' della soluzione del problema. Quindi l'idea e' approssimare $f(t)$ con funzioni piu' regolari e risolvere i sistemi approssimati, per poi passare al limite; ad esempio, nel nostro caso, potremmo approssimare f con f_ε definita da:

$$f_\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & \text{se } 0\le t\le 1\\ \frac{t-1}{\varepsilon} & \text{se } 1\le t\le 1+\varepsilon\\ 1 & \text{se } t\ge 1+\varepsilon\end{cases}$$

per ottenere delle y_ε che approssimano y in modo quadratico.

Il precedente e' un modo molto classico di ragionare per risolvere problemi di Cauchy; vediamo ora un altro esempio. Ci interessiamo all'equazione differenziale:

$$y''(t)+py(t)=f(t),$$

con $p\in\mathbb{R}$ non quadrato di un intero e $f(t)\in\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$. Scriviamo le funzioni in gioco con le rispettive serie di Fourier (poiche' siamo in $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$):

$$f(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_ke^{ikt},\quad f_n(t)=\sum_{|k|\le n}c_ke^{ikt},\quad y(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}y_ke^{ikt},\quad y_n(t)=\sum_{|k|\le n}y_ke^{ikt}.$$

Risolvo $y_n''(t)+py_n(t)=f(t)$, cioe':

$$\sum_{|k|\le n}-k^2y_ke^{ikt}+p\sum_{|k|\le n}y_ke^{ikt}=\sum_{|k|\le n}c_ke^{ikt},$$

dunque $y_k(p-k^2)=c_k$, da cui $y_k=\frac{c_k}{p-k^2}\ \forall|k|\le n$, con il denominatore sempre $\neq 0$. La soluzione troncata e' percio':

$$y_n(t)=\sum_{|k|\le n}\frac{c_k}{p-k^2}e^{ikt}.$$

Ma essendo in $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$, $y_n\to y=\sum_{|k|\in\mathbb{Z}}\frac{c_k}{p-k^2}e^{ikt}$; osserviamo che tale y sta in $\mathcal{H}^2(-\pi,\pi)$, in quanto le sue due prime derivate deboli:

$$y'(t)=\sum_{|k|\in\mathbb{Z}}\frac{ikc_k}{p-k^2}e^{ikt},\quad y''(t)=\sum_{|k|\in\mathbb{Z}}-\frac{k^2c_k}{p-k^2}e^{ikt}$$

stanno in $\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$ poiche' i rispettivi coefficienti di Fourier stanno in $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Osserviamo che, quindi, partendo da una funzione $f\in\mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$, si ottiene una soluzione $y\in\mathcal{H}^2(-\pi,\pi)$; questo "guadagno" di due derivate in generale e' falso se partiamo da $f\in C^0$ e vogliamo ottenere $y\in C^2$. Un esempio e' il problema:

$$\begin{cases}u(x)-\Delta u(x)=f(x)\in C^0(\Omega)\\ u_{|\partial\Omega}=0\end{cases}$$

con $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$, $d>1$ (infatti in una dimensione il problema ha una soluzione C^2). Se ad esempio $d=2$ e $f\in C^0(\Omega)$, in generale e' falso che $u\in C^2(\Omega)$ (poiche' se $\partial_x^2u+\partial_y^2u$ e' regolare, non si puo' dire niente sulla regolarita' di ciascuno degli addendi); in realta' abbiamo che, se $f\in C^{0,\alpha}(\Omega)$, allora $y\in C^{2,\alpha}(\Omega)$, ma questo non ci risolve il caso generale. Quindi cambiamo contesto e fissiamo $f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$; vogliamo vedere che qua la soluzione “guadagna” due derivate. Poniamo inoltre $\Omega = \mathbb{T}^2$. Scrivendo le funzioni in serie di Fourier:

$$u(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} c_k e^{ik\cdot x}, \quad f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f_k e^{ik\cdot x},$$

otteniamo, ragionando come prima per approssimazioni successive:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} (c_k + \|k\|^2 c_k) e^{ik\cdot x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} f_k e^{ik\cdot x},$$

cioe' $c_k = \frac{f_k}{1+\|k\|^2}$. Osserviamo che, come voluto, $u \in \mathcal{H}^2(\mathbb{T}^2)$.

Osservazione

Modificando leggermente l'equazione appena studiata, consideriamo $-\Delta u = f \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$. Allora:

$$\int_\Omega (-\Delta u)(-\Delta u) = \int_\Omega f(-\Delta u) \quad \Rightarrow \quad \|\Delta u\|^2_{\mathcal{L}^2} \le \left| \int_\Omega f \Delta u \right| \le \|f\|_{\mathcal{L}^2} \|\Delta u\|_{\mathcal{L}^2},$$

cioe' $\|\Delta u\|_{\mathcal{L}^2} \le \|f\|_{\mathcal{L}^2}$; questo implica che $\partial^2_x u, \partial^2_y u \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$. Ma cosa possiamo dire sulle derivate miste? Integrando per parti, ponendo $\Omega = \mathbb{T}^2$, si ha:

$$\|\partial^2_{xy} u\|_{\mathcal{L}^2} = \int_{\mathbb{T}^2} (\partial^2_{xy} u)^2 dx = -\int_{\mathbb{T}^2} \partial_x u \partial^3_{xyy} u dx = \int_{\mathbb{T}^2} \partial^2_x u \partial^2_y u dx \le \int_{\mathbb{T}^2} |\Delta u|^2 dx,$$

cioe' $\partial^2_{xy} u \in \mathcal{L}^2(-\pi,\pi)$.

Interessiamoci adesso al caso unidimensionale della precedente equazione differenziale; vogliamo risolvere:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{per } x \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Per la disuguaglianza di Poincare' abbiamo la stima dall'alto:

$$\int_0^1 |u|^2 \le c \int_0^1 |u'|^2,$$

che ci permette di controllare $\int_0^1 |u|^2 + \int_0^1 |u'|^2$ con $\int_0^1 |u'|^2$. Prendiamo lo spazio euclideo $H = C^2_0(0,1)$, con prodotto scalare $\langle f,g \rangle = \int_0^1 f'g'$; completiamo H a $\overline{H} = \mathcal{L}^2$. Sia φ una generica funzione regolare, $\varphi \in C^\infty_0(0,1)$; allora, se u e' soluzione dell'equazione considerata, abbiamo integrando per parti:

$$-\int_0^1 u''\varphi = \int_0^1 f\varphi \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 u'\varphi' = \int_0^1 f\varphi.$$

Riscriviamo la precedente relazione denotando F il funzionale tale che $F(\varphi) = \int_0^1 f\varphi$:

$$F(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,1).$$

Osserviamo che, se $u \in C^2$ e $f \in C^0$, allora $-u'' = f \iff F(\varphi) = \langle u, \varphi \rangle$ per ogni funzione regolare φ ; se pero' non abbiamo queste ipotesi di regolarita', abbiamo visto che vale l'implicazione $\Rightarrow$, ma in generale non vale l'altra. Dunque estendiamo il concetto di soluzione di un'equazione differenziale dicendo che una funzione e' 0 se e solo se e' ortogonale a tutte le funzioni regolari C_0^∞ ; in altre parole, se $a_1, a_2 \in \mathcal{L}^2$, definiamo:

$$a_1 = a_2 \iff \langle a_1, \varphi \rangle = \langle a_2, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Risolvere l'equazione considerata e' equivalente a trovare il minimo di:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u|^2 - \int_0^1 fu,$$

infatti $\frac{J(u+\varepsilon\varphi)-J(u)}{\varepsilon} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0 \iff F(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in C_0^\infty$; un problema simile era stato introdotto all'inizio della sezione. Osserviamo che:

$$\left| \int_0^1 fu \right| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2} \|u\|_{\mathcal{L}^2} \leq c \|f\|_{\mathcal{L}^2} \|u'\|_{\mathcal{L}^2},$$

dunque effettivamente l'estremo inferiore di $J(u)$ e' finito. Con lo stesso conto appena fatto, si vede che $|F(\varphi)| \leq C\|\varphi\|_{\mathcal{L}^2}$, dunque F e' limitato e lineare, e percio' per il teorema di Riesz esiste un'unico v tale che $F(\varphi) = \langle v, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in C_0^\infty$. Ma allora $\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle \Rightarrow \langle u - v, \varphi \rangle = 0 \ \forall \varphi \in C_0^\infty$, dunque la soluzione (unica) e' $u = v$.

Osserviamo subito che il ragionamento appena fatto e' molto importante, perche' ci dimostra l'unicita' della soluzione in questo senso esteso; pero' allo stesso tempo non ci da' nessuna informazione sulla soluzione, quindi cerchiamo un argomento piu' pratico che mostri esplicitamente una forma (anche approssimata) della soluzione.

Dividiamo l'intervallo $[0,1]$ in una partizione $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1$ e denotiamo φ_i , $1 \leq i \leq n$, la funzione lineare che unisce i punti $(x_{n-1}, 0)$, $(x_n, 1)$, $(x_{n+1}, 0)$ ed e' 0 fuori da $[x_{n-1}, x_{n+1}]$; supponiamo di poter scrivere la nostra funzione u come:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k.$$

Denotiamo $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$; considerando l'equazione di Poisson troncata abbiamo:

$$\int_0^1 u_n' \varphi_k' = \int_0^1 f \varphi_k \quad \forall 1 \leq k \leq n,$$

cioe':

$$\int_0^1 \sum_{m=1}^n c_m \varphi'_m \varphi'_k = \sum_{m=1}^n c_m \int_0^1 \varphi'_m \varphi'_k = \int_0^1 f \varphi_k \quad \forall \leq k \leq n$$

(in realta' l'integrale andrebbe spezzato in n integrali, in modo che in ciascuno sia ben definita la derivata dei φ_k). Denotiamo $A_{km} = \int_0^1 \varphi'_m \varphi'_k \in \mathbb{R}$, $F_k = \int_0^1 f \varphi_k$, $A = (A_{km})$, $F = (F_k)$, $c = (c_k)$; allora il mio problema troncato si riduce al sistema:

$$Ac = F,$$

che e' risolubile $\iff$ A e' invertibile. Ma:

$$\int_0^1 f u_n = \sum_{k=1}^n c_k \int_0^1 f \varphi_k = \sum_{k=1}^n c_k \int_0^1 \sum_{m=1}^n c_m \varphi'_m \varphi'_k = \int_0^1 \sum_{k,m=1}^n c_m \varphi'_m c_k \varphi'_k = \int_0^1 |u'_n|^2,$$

dunque se $F = 0$, allora $\int_0^1 |u'_n|^2 = 0$, cioe' $c = 0$; questo mostra l'iniettivita' (e dunque l'invertibilita') di A . Risolvo quindi il sistema troncato e riesco ad ottenere una soluzione approssimata dell'equazione di Poisson unidimensionale (questo ragionamento utilizzato si chiama "'tecnica degli elementi finiti"'; ma cosa succede se cerco di passare al limite $n \to \infty$? Usando argomenti piu' avanzati di analisi funzionale, si puo' vedere che, se $u, u' \in \mathcal{L}^2(0,1)$, allora $u_n \to u$ converge effettivamente alla soluzione. Inoltre si puo' verificare che u_n e' la proiezione di u su $\mathrm{Span}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$.

Osservazione

Consideriamo l'equazione di Poisson unidimensionale nel caso in cui u, f sono 2π -periodiche. Risolvere l'equazione troncata $-u''_n = f_n$, con $u_n = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$ e $f_n = \sum_{|k| \leq n} \widehat{f}_k e^{ikx}$, significa trovare $u_n \in V_n = \mathrm{Span}(\{e^{ikx} \mid |k| \leq n\})$ tale che $-u''_n = P_n(f)$ (dove $P_n : \mathcal{L}^2(-\pi, \pi) \to V_n$ e' la proiezione), cioe' tale che:

$$\langle -u''_n, e^{ikx} \rangle = \langle P_n(f), e^{ikx} \rangle \quad \forall |k| \leq n.$$

Quest'ultima condizione e' equivalente a cercare $u_n \in V_n$ tale che $(u''_n + f) \perp V_n$.

Il precedente ragionamento non si puo' applicare in generale; vediamo un esempio.

Esempio

Supponiamo di voler risolvere l'equazione:

$$-u'' + u^2 = f$$

con periodicita'; proiettando su V_n avremmo $-u''_n + P_n(u_n^2) = P_n(f)$, in quanto se $u_n \in V_n$, non e' vero che $u_n^2 \in V_n$. Quindi siamo obbligati a risolvere un'equazione ancora piu' approssimata, che e':

$$\langle -u_n'', \varphi\rangle + \langle u_n^2, \varphi\rangle = \langle P_n(f), \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in V_n,$$

cioe' $(u_n'' - u_n^2 + f) \perp V_n$.

Esempio

Interessiamoci all'equazione differenziale $-u'' + |u|^2 u = f$, con u periodica a media nulla. Troncando l'equazione, cerchiamo $u_n \in V_n$ tale che:

$$\langle -u_n'' + |u_n|^2 u_n, \varphi\rangle = \langle P_n(f), \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in V_n.$$

ma $u_n \in V_n$, quindi poniamo $\varphi = u_n$ e otteniamo:

$$\langle -u_n'', u_n\rangle + \langle |u_n|^2 u_n, u_n\rangle = \langle P_n(f), u_n\rangle,$$

cioe':

$$\frac{1}{2\pi}\|u_n'\|^2 + \frac{1}{2\pi}\int |u_n|^4 = \frac{1}{2\pi}\int P_n(f)\overline{u_n}.$$

Percio', grazie alla disuguaglianza di Poincare', otteniamo la "'stima a priori"' $\|u_n'\| \leq c\|P_n(f)\|$; grazie a questa stima ricaviamo che il prodotto scalare $\langle -u_n'', e^{ikx}\rangle$ ha senso, in quanto per la stima appena fatta la serie di u_n'' converge. Purtroppo, per passare al limite $n \to \infty$, l'unica cosa che rimarrebbe da fare sarebbe controllare l'addendo $\langle |u_n|^2 u_n, e^{ikx}\rangle$, ma per far questo avremmo bisogno del teorema di immersione di Sobolev, che afferma che $\mathcal{H}^1$ si immerge compattamente in $\mathcal{L}^q$ $\forall q < +\infty$.

Ritorniamo al problema di inizio sezione, cioe' cerchiamo di risolvere l'equazione di Laplace bidimensionale:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^2 \\ u = g & \text{in } \partial B(0,1) \end{cases},$$

con $u \in C^2(B(0,1))$. Passiamo in coordinate polari:

$$\begin{cases} u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta} = 0 & \text{per } \rho \in [0,1),\ \theta \in [0,2\pi] \\ u(1,\theta) = g(\theta) & \text{per } \theta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

con u periodica rispetto a θ . Separando le variabili, poniamo $u(\rho,\theta) = R(\rho)\Theta(\theta)$, da cui:

$$R''(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Theta(\theta) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Theta''(\theta) \quad \Rightarrow \quad \rho^2\frac{R''}{R} + \rho\frac{R'}{R} = \lambda = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Ma $\Theta'' + \lambda\Theta = 0$ con Θ periodica e' l'equazione dell'oscillatore armonico, quindi si deve avere $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{Z}$; si ottiene l'equazione:

$$\rho^2\frac{R''}{R}+\rho\frac{R'}{R}=n^2, \quad \text{ovvero} \quad \rho^2 R''+\rho R'-n^2R=0.$$

Se $n=0$, la soluzione sarebbe il logaritmo (oltre alle costanti), che pero' escludiamo perche' va a ∞ in un intorno di 0 ; dunque in corrispondenza di $n=0$ assegniamo la soluzione costante. Se $n\neq 0$, la funzione $R(\rho)=c\cdot\rho^{\alpha}$ risolve l'equazione $\iff$:

$$\rho^2\alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}+\rho\alpha\rho^{\alpha-1}-n^2\rho^{\alpha}=0 \iff \alpha(\alpha-1)+\alpha-n^2=0 \iff \alpha=\pm n.$$

Ma per regolarita' di R in 0 , si deve avere $\alpha\geq 0$; quindi $\alpha=|n|$. Abbiamo ottenuto le soluzioni $\Theta_n(\theta)=e^{in\theta}$ per $n\in\mathbb{Z}$ e $R_n=c_n\rho^{|n|}$ se $n\neq 0$; dunque se $P(\rho,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\rho^{|n|}e^{in\theta}$, allora P converge assolutamente perche'e' maggiorata da una serie geometrica con $0\leq\rho<1$.

Abbiamo mostrato:

Proposizione 23

$P(\rho,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\rho^{|n|}e^{in\theta}\in C^{\infty}(B(0,1)^o)$ e' tale che $\Delta P=0$ e, se $g(\theta)\in C^0(\mathbb{T})$, $g(\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{g_n}e^{in\theta}$, $|\widehat{g_n}|\leq c$, allora:

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{g_n}\rho^{|n|}e^{in\theta}\in C^{\infty}(B(0,1)^o)$$

e' armonica e $u(\rho,\theta)\to g(\theta)$ quando $\rho\to 1^-$.

Ma se $g(\theta)$ non avesse i coefficienti limitati, cosa potremmo dire sulla convergenza di $u(\rho,\theta)$ per $\rho\to 1^-$? Osserviamo che:

$$u(\rho,\theta)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\varphi)\rho^{|n|}e^{-in\varphi}e^{in\theta}d\varphi=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\rho^{|n|}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\varphi)e^{-in(\varphi-\theta)}d\varphi=g(\theta)*P_\rho(\theta).$$

Se mostrassimo che P_ρ (detto "'nucleo di Poisson**) e' una successione di Dirac per $\rho\to 1^-$, avremmo la convergenza voluta.**

Lemma 24

$P_\rho(\theta)=1+2\sum_{n>0}\rho^n\cos(n\theta)=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}$.

Dimostrazione

Per la prima uguaglianza:

$$P_\rho(\theta)=\sum_{n<0}\rho^{-n}e^{in\theta}+1+\sum_{n>0}\rho^ne^{in\theta}=\sum_{n>0}\rho^ne^{-in\theta}+1+\sum_{n>0}\rho^ne^{in\theta}=1+\sum_{n>0}\rho^n(e^{in\theta}+e^{-in\theta})=$$
$$=1+2\sum_{n>0}\rho^n\cos(n\theta).$$

Per la seconda:

$$P_\rho(\theta) = \frac{\rho e^{-i\theta}}{1-\rho e^{-i\theta}} + 1 + \frac{\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{i\theta}} = \frac{\rho e^{-i\theta} - \rho^2 + 1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2 + \rho e^{i\theta} - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2} = \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}.$$

A questo punto verificare le quattro condizioni delle successioni di Dirac e' semplice:

1. $P_\rho(\theta) \geq 0$, in quanto $1-\rho^2 \geq 0$ e $1 - 2\rho\cos(\theta) + \rho^2 = (1-\rho\cos(\theta))^2 + (\rho\sin(\theta))^2 > 0 \; \forall \rho \in [0,1)$.

1. $P_\rho(\theta) = P_\rho(-\theta)$, in quanto e' somma di funzioni pari.

1. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\rho(\theta) = 1$, in quanto l'integrale del coseno e' 0 e rimane solo l'integrale di 1 .

1. Se $|\theta| > \delta > 0$, allora $1 - \rho\cos(\theta) \geq 1 - |\cos(\theta)| \geq 1 - |\cos(\delta)|$, dunque $P_\rho(\theta) \leq \frac{1-\rho^2}{(1-|\cos(\delta)|)^2} \to 0$ uniformemente quando $\rho \to 1^-$.

Si conclude percio' che:

$$u(\rho,\theta) = g(\theta) * P_\rho(\theta) \overset{\rho\to 1^-}{\rightrightarrows} g(\theta).$$

Ci rimane da discutere l'unicita' della soluzione. Sappiamo che, se avessimo che:

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 dx < +\infty$$

allora la soluzione sarebbe unica, in quanto $U = u - v$ sarebbe tale che $\int_{B(0,1)} |\nabla U|^2 dx = 0$. Purtroppo, per una g generica non e' vera quella stima; vediamolo.

In coordinate polari si ha:

$$|\nabla u|^2 = |\partial_x u|^2 + |\partial_y u|^2 = |\partial_\rho u|^2 + \frac{1}{\rho^2}|\partial_\theta u|^2,$$

dunque:

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 dx = \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\partial_\rho u|^2 + \frac{1}{\rho^2}|\partial_\theta u|^2 d\theta\rho d\rho.$$

Abbiamo:

$$|\partial_\rho u|^2 = (\partial_\rho u)(\overline{\partial_\rho u}) = \sum_n \widehat{g}_n |n| \rho^{|n|-1} e^{in\theta} \sum_l \overline{\widehat{g}_l} |l| \rho^{|l|-1} e^{-il\theta},$$

quindi:

$$\int_0^{2\pi} |\partial_\rho u|^2 d\theta = 2\pi \sum_n |\widehat{g_n}|^2 |n|^2 \rho^{2|n|-2},$$

da cui:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 |\partial_\rho u|^2 d\theta \rho d\rho = 2\pi \sum_n |\widehat{g_n}|^2 |n|^2 \int_0^1 \rho^{2|n|-1} d\rho = \pi \sum_n |\widehat{g_n}|^2 |n|.$$

Allo stesso modo:

$$\frac{1}{\rho}\partial_\theta u = \sum_n \widehat{g_n}(in)\rho^{|n|-1} e^{in\theta},$$

e dopo calcoli analoghi a quelli precedenti si ricava finalmente:

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u|^2 dx = \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\partial_\rho u|^2 + \frac{1}{\rho^2}|\partial_\theta u|^2 d\theta \rho d\rho = 2\pi \sum_n |\widehat{g_n}|^2 |n|.$$

Quindi, grazie a questi calcoli espliciti, abbiamo dimostrato la seguente:

Proposizione 25

Se la condizione al bordo g ammette mezza derivata, cioe' $g \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}$, allora la soluzione dell'equazione di Laplace bidimensionale e' unica.

Pero', in generale, se g e' solo continua e in $\mathcal{L}^1$, cioe' $\sum_n |\widehat{f_n}| < +\infty$, non e' vero che $\sum_n |n||\widehat{f_n}|^2 < +\infty$; vediamo un controesempio.

Esempio (Hadamard)

Consideriamo la successione:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2^m} & \text{se } |n| = 2^{2^m} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$c_n \in \ell^1$, perche'e' maggiorata da $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} < +\infty$, ma:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n||c_n|^2 = 2\sum_{m\in\mathbb{N}} 2^{2^m} \frac{1}{(2^m)^2} = +\infty.$$

Quindi $f(x) = \sum_n c_n e^{inx} \in \mathcal{L}^1 \backslash \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}$.

Passiamo adesso al caso multidimensionale; vogliamo risolvere:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto regolare e $u \in C^2(\Omega)$. Se ψ e' una funzione armonica che dipende solo dal raggio ρ , sappiamo che:

$$\Delta\psi(\rho) = \psi''(\rho) + \frac{n-1}{\rho}\psi'(\rho) = 0 \quad \forall \rho > 0,$$

cioe':

$$\psi(\rho) = \begin{cases} c_n \frac{\rho^{2-n}}{2-n} & \text{se } n > 2 \\ c_2 \ln(\rho) & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

e in ogni caso $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ ($|\psi(\rho)| \to +\infty$ se $\rho \to 0$). Sia ora $\xi \in \Omega$ e poniamo $v(x) = \psi(|x - \xi|)$. Sia inoltre $\varepsilon > 0$ e $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{B(\xi, \varepsilon)}$; sappiamo che $v \in \mathbb{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ e $\Delta v = 0$ in Ω_ε . Per Gauss-Green:

$$-\int_{\Omega_\varepsilon} u\Delta v dx = -\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n} u dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla v dx, \quad -\int_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u dx = -\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} v dx + \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \nabla v dx,$$

$\forall u, v \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$, quindi:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (v\Delta u - u \underbrace{\Delta v}_{=0}) dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right) dS =$$
$$= \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right) dS + \int_{\partial B(\xi,\varepsilon)} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - \frac{\partial v}{\partial n} u \right) dS.$$

Osserviamo che, su $\partial B(\xi, \varepsilon)$, $\frac{\partial v}{\partial n} = -\psi'(\varepsilon)$, percio':

$$-\int_{\partial B(\xi,\varepsilon)} u \frac{\partial v}{\partial n} dS = \psi'(\varepsilon) \int_{\partial B(\xi,\varepsilon)} u dS = c_n \varepsilon^{1-n} \int_{\partial B(\xi,\varepsilon)} u dS = \int_{\partial B(\xi,\varepsilon)} u dS \xrightarrow{\varepsilon \to 0} u(\xi),$$

se $c_n = \frac{1}{\omega_n}$, dove ω_n e' la misura della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$. D'altra parte notiamo che:

$$\int_\Omega \Delta u \cdot 1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot 1 - \underbrace{\int_\Omega \nabla u \nabla 1}_{=0},$$

quindi l'altro integrale puo' essere stimato:

$$\int_{\partial B(\xi,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n} v dS = \psi(\varepsilon) \int_{\partial B(\xi,\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial n} dS = c'_n \varepsilon^{2-n} \int_{B(\xi,\varepsilon)} \Delta u dx = c'_n \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^n} \int_{B(\xi,\varepsilon)} \Delta u dx =$$
$$= c''_n \varepsilon^2 \int_{B(\xi,\varepsilon)} \Delta u dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Visto che:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} v\Delta u dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \int_\Omega v\Delta u dx,$$

abbiamo mostrato:

Proposizione (Formula integrale di rappresentazione)

$u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v(x) = \psi(|x-\xi|)$. Allora:

$$\int_\Omega v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} dS + u(\xi).$$

Corollario

Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e' armonica, cioe' $\Delta u = 0$, e $v(x) = \psi(|x-\xi|)$, allora:

$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

Osserviamo che siamo liberi di aggiungere e togliere costanti alla funzione $\psi(|x-\xi|)$ senza cambiare i risultati appena ottenuti; poniamo dunque $G(x,\xi) = \psi(|x-\xi|) - \psi(\rho)$. Tale funzione ha le proprieta':

$$\begin{cases} \Delta G(x,\xi) = 0 \\ G_{|\partial B(\xi,\rho)} = 0 \end{cases}$$

da cui segue:

$$u(\xi) = \int_{\partial B(\xi,\rho)} u \frac{\partial G}{\partial n} - \underbrace{G(x,\xi)}_{=0} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \psi'(\rho) \int_{\partial B(\xi,\rho)} u dS = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{\partial B(\xi,\rho)} u dS = \int_{\partial B(\xi,\rho)} u dS$$

$\forall \rho < d(\xi, \partial\Omega)$. Abbiamo appena mostrato la cosiddetta "'proprieta' della media"':

Teorema

$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica, $B(\xi,\rho) \subseteq \Omega$. Allora:

$$u(\xi) = \int_{\partial B(\xi,\rho)} u dS.$$

Corollario

Il valore assunto da u armonica in un punto ξ e' la media dei valori assunti in un disco di centro ξ , cioe':

$$u(\xi) = \int_{B(\xi,\rho)} u(x) dx.$$

Dimostrazione

Per Fubini-Tonelli:

$$\int_{B(\xi,\rho)} u(x)dx = \int_0^\rho r^{n-1} \underbrace{\int_{\partial B(\xi,r)} udS}_{=u(\xi)}\, dr = m(B(\xi,\rho))u(\xi).$$

Prima di concentrarci sulla risoluzione dell'equazione di Laplace, studiamo se essa ammette un'unica soluzione; per farlo abbiamo bisogno di qualche altro risultato sulle funzioni armoniche.

Definizione

u si dice "'subarmonica"' se $\Delta u \geq 0$.

Osservazione

Per le funzioni subarmoniche ovviamente non vale la proprieta' della media, ma vale qualcosa di piu' debole; con calcoli analoghi a prima si ha:

$$u(\xi) = \int_{B(\xi,\rho)} \underbrace{\Delta u}_{\geq 0} \underbrace{(\psi(|x-\xi|) - \psi(\rho))}_{\leq 0} + \int_{\partial B(\xi,\rho)} \frac{\partial G}{\partial n} udS \leq \int_{\partial B(\xi,\rho)} udS.$$

Osserviamo adesso che la soluzione dell'equazione di Laplace, pur essendo la descrizione di un processo fisico, puo' non esistere; il seguente e' un controesempio. Per fortuna pero' tale patologia avviene solo in presenza di domini Ω che sono stati privati di qualche punto isolato.

Esempio (Zaremba)

Sia $\Omega = B(0,1)\backslash\{0\}$; il problema di Laplace con condizione al contorno:

$$g = \begin{cases} 0 & \text{se } \|x\| = 1 \\ 1 & \text{se } \|x\| = 0 \end{cases}$$

non ammette soluzione. Se infatti $u(\rho)$ e' una funzione armonica radiale (in quanto la soluzione di un problema con simmetria rotazionale deve avere la simmetria rotazionale), allora $u(\rho) = A\log(\rho) + B$, ma $B = 0$ per la condizione su $\{\|x\| = 1\}$ e dunque non riesco a imporre A affinche' u faccia 0 nell'origine.

Teorema (Principio del massimo)

Sia Ω aperto connesso, $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica. Allora:

1. $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u = M$;

1. se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $u(x_0) = M$, allora $u \equiv M$.

Dimostrazione

Ovviamente il secondo punto e' piu' forte del primo. Si ha:

$$M = u(x_0) = \int_{B(x_0,r)} u(x)dx \leq \frac{Mm(B(x_0,r))}{m(B(x_0,r))} = M,$$

dunque $u \equiv M$ nella palla $B(x_0, r)$; segue che l'insieme $\{x \in \Omega \mid u(x) = M\} \neq \emptyset$ e' aperto e chiuso in Ω , cioe'e' tutto Ω .

Con questo risultato possiamo stabilire l'unicita' della soluzione dell'equazione di Laplace in un caso abbastanza generale:

Teorema

Se Ω e' un aperto limitato e connesso, allora la soluzione dell'equazione di Laplace e' unica.

Dimostrazione

Siano u_1, u_2 due soluzioni e sia $U = |u_1 - u_2|$. U e' armonica e vale 0 al bordo, quindi e' 0 a tappeto per il principio del massimo.

Osservazione

Grazie al principio del massimo (e al principio del minimo, che afferma che il minimo si trova al bordo), si ottiene che se u e' armonica e $u_{|\partial\Omega} = g$, allora:

$$\min_{\partial\Omega} g(x) \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} g(x) \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Il principio del massimo non vale solo nel caso delle funzioni armoniche, ma si estende ad esempio anche a quelle subarmoniche; questo significa che con gli stessi ragionamenti appena fatti si puo' dimostrare l'unicita' di soluzioni di equazioni differenziali molto piu' complessi.

Lemma

Se $\Delta u > 0$, non possono esistere massimi di u in Ω .

Dimostrazione

Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ punto di massimo per u . Posto:

$$\phi(t) = u(x_0 + t, y_0), \qquad \psi(t) = u(x_0, y_0 + t),$$

si ha che $\phi'(0) = \psi'(0) = 0$ e $\phi''(t), \psi''(t) \leq 0$. Ma allora $\Delta u(x_0, y_0) = u_{xx}(x_0, y_0) + u_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$, assurdo.

Proposizione

Se $\Delta u \geq 0$, il massimo di u su $\overline{\Omega}$ (Ω aperto limitato) e' ottenuto nel bordo $\partial\Omega$.

Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$ e poniamo $w(x,y) = u(x,y) + \varepsilon x^2$. Se $\bar{x} = (x_0, y_0)$ e' punto di massimo per u con ascissa x_0 massima fra i punti di massimo, e $d(\bar{x}, \partial\Omega) = \delta$, allora preso $\varepsilon < \frac{c}{R\delta+\delta^2}$ (dove c e' una costante opportuna che dipende da quanto decresce u negli x compresi fra x_0 e $x_0+\delta$ e R e' tale che $\Omega \subseteq [-R,R]^2$), si ha che la funzione w ha un massimo interno a Ω . Ma questo e' assurdo perche' $\Delta w \geq 2\varepsilon > 0$.

Proposizione

$u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ armonica. Per ogni α tale che $|\alpha| = k$, vale la maggiorazione:

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{c_k}{r^{n+k}} \|u\|_{\mathcal{L}^1(B(x_0,r))}.$$

In particolare:

$$c_k = \frac{\left(2^{n+1}nk\right)^k}{\alpha(n)},$$

dove $\alpha(n) = m(B(0,1))$.

Dimostrazione

Supponiamo innanzitutto $\alpha = e_i$. Dalla formula di rappresentazione si ha:

$$|\partial_i u(x_0)| = \left| \int_{B(x_0,r/2)} \partial_i u(x) dx \right| = \frac{n}{\omega_n} (2/r)^n \left| \int_{B(x_0,r/2)} \partial_i u(x) dx \right|,$$

quindi per Gauss-Green, detto ν il versore esterno:

$$|\partial_i u(x_0)| \leq \frac{n}{\omega_n} (2/r)^n \left| \int_{\partial B(x_0,r/2)} \partial_i u \nu_i dS \right| \leq \frac{n}{\omega_n} (2/r)^n \max_{\partial B(x_0,r/2)} |u| \omega_n \frac{r^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{2}{r} n \max_{\partial B(x_0,r/2)} |u|.$$

Ma se $x \in \partial B(x_0, r/2)$, $B(x, r/2) \subseteq B(x_0, r)$ e grazie alla formula di rappresentazione si ha:

$$|u(x)| \leq \frac{c}{r^n} \|u\|_{\mathcal{L}^1(B(x,r/2))} \leq \frac{c}{r^n} \|u\|_{\mathcal{L}^1(B(x_0,r))}.$$

A questo punto una semplice induzione ci permette di concludere.

Corollario

Ogni funzione armonica e' analitica.

Corollario (Teorema di Liuville)

Ogni $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ armonica limitata e' costante.

Dimostrazione

Preso $\alpha = e_i$, si ha $\forall r > 0$:

$$|\partial_i u(x_0)| \leq \frac{c_1}{r^{n+1}}\|u\|_{\mathcal{L}^1} \leq \frac{c_1}{r^{n+1}}\frac{\omega_n}{n}r^n \max_{B(x_0,r)} u \leq \frac{c'}{r},$$

quindi $\partial_i u(x_0) = 0 \ \forall i$.

Arrivati a questo punto, prima di giungere a soluzioni esplicite (in casi particolari) per l'equazione di Laplace, abbiamo bisogno di qualche cenno alla teoria degli "'integrali singolari"'; l'esempio principe che spinge a studiare questi integrali e':

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x} dx.$$

Come ben sappiamo, questo integrale non ha senso perche' non e' convergente; ma se consideriamo:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |x| < 1/\varepsilon} \frac{1}{x} dx,$$

questo limite esiste ed e' 0 in quanto l'integrale vale 0 $\forall \varepsilon$. Osservato questo esempio, proviamo a generalizzare l'idea a integrali piu' complessi.

Osservazione

La funzione $f(x) = \frac{1}{|x|^k}$ con $x \in \mathbb{R}^n$ e' integrabile vicino a 0 $\iff$ $k < n$. Infatti, passando in coordinate sferiche:

$$\int_{|x| \leq \varepsilon} f(x) = c \int_0^{\varepsilon} = c \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}.$$

Esempio

Consideriamo il problema di Poisson $\Delta u = f$ in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, con f a supporto compatto. Vogliamo vedere che la funzione:

$$u(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \int \frac{f(y)}{|x-y|} dy = f(x) * \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x|}$$

e' soluzione del problema. Per calcolare Δu , abbiamo bisogno che $\Delta \frac{1}{|x-y|}$ sia ben definito e integrabile; si ha:

$$\partial_i \left(\sum_{k=1}^{3} (x_k - y_k)^2 \right)^{-1/2} = -\frac{x_i - y_i}{|x-y|^3}$$

e:

$$\partial_j \partial_i \left(\sum_{k=1}^{3} (x_k - y_k)^2 \right)^{-1/2} = -\left(\frac{\delta_{ij}}{|x-y|^3} - \frac{3}{2}(x_i - y_i) \left(\sum_{k=1}^{3} (x_k - y_k)^2 \right)^{-5/2} 2(x_j - y_j) \right) =$$
$$= -\frac{\delta_{ij}}{|x-y|^3} + \frac{3(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^5}.$$

Ma allora $\Delta \frac{1}{|x-y|}$ va come $\frac{1}{|x-y|^3}$, che non sta in $\mathcal{L}^1(B(0,R))$, quindi u definita precedentemente non e' una soluzione del problema in senso classico. Vediamo come sfruttare gli integrali singolari per risolvere il problema.

Data $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{L}^1(\Omega)$, definiamo "'potenziale newtoniano"' di f la funzione:

$$\omega(x) = \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|} dy.$$

Lemma

Vale la formula:

$$\partial_i \omega(x) = \int_\Omega f(y) \partial_i \frac{1}{|x-y|} dy.$$

Dimostrazione

Sia $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\eta(x) = 0$ se $x \leq 1$, $\eta(x) = 1$ se $x \geq 2$ e $0 \leq \eta' \leq 2$; poniamo inoltre $\eta_\varepsilon = \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Vogliamo vedere che, detti:

$$\omega_\varepsilon(x) = \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|} \eta_\varepsilon(|x-y|), \qquad v(x) = \int_\Omega f(y) \partial_i \frac{1}{|x-y|} dy,$$

allora $v(x) - \partial_i \omega_\varepsilon(x) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$. Abbiamo:

$$v(x) - \partial_i \omega_\varepsilon(x) = \int_{\varepsilon \leq |x-y| \leq 2\varepsilon} \partial_i \left(\frac{1 - \eta_\varepsilon(|x-y|)}{|x-y|} \right) f(y) dy,$$

quindi:

$$|v(x) - \partial_i \omega_\varepsilon(x)| \leq \sup|f| \int_{\varepsilon \leq |x-y| \leq 2\varepsilon} \partial_i \frac{1}{|x-y|} + \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{|x-y|} dy \leq \sup|f| 4\pi \int_\varepsilon^{2\varepsilon} \rho^2 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{2}{\rho\varepsilon} \right) < c\varepsilon,$$

(ho fatto un cambio di variabili $\rho = |x-y|$ e ρ^2 e' il determinante del Jacobiano), e fuori da $\varepsilon \leq |x-y| \leq 2\varepsilon$ le due funzioni sono evidentemente uguali.

Osservazione

Il ragionamento precedente non si puo' applicare alla derivata seconda di $\omega(x)$, in quanto la derivata seconda di $|x|^{2-n}$ e' $|x|^{-n}$ che non e' integrabile.

Supponiamo adesso Ω compatto e $\Omega \Subset \Omega_0$ compattamente incluso (ad esempio $d(\Omega, \Omega_0) > 1$); inoltre, se f e' una funzione definita su Ω , indichiamo con f anche la funzione che vale f su Ω e 0 fuori. Poniamo inoltre $\psi(\rho) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\rho^{2-n}$, in modo che:

$$\omega(x) = \int \psi(|x-y|)f(y)dy$$

sia il potenziale newtoniano (a meno di costanti). Grazie al lemma precedente, generalizzando al caso $n > 3$ si ottiene in maniera analoga:

$$\partial_i\omega(x) = \int_\Omega \partial_i\psi(|x-y|)f(y)dy.$$

Proposizione

Sia $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha \leq 1$; allora:

$$\partial_{ji}\omega(x) = \int_{\Omega_0} \partial_{ji}\psi(|x-y|)(f(y)-f(x))dy - f(x)\int_{\partial\Omega_0} \partial_i\psi(|x-y|)\nu_j dS,$$

dove ν e' il vettore normale alla superficie. In particolare (in questo senso) $\omega(x) \in C^2(\Omega)$.

Dimostrazione

Sia η_ε come nel lemma. Poniamo:

$$v_\varepsilon(x) = \int_\Omega \partial_i\psi(|x-y|)\eta_\varepsilon(|x-y|)f(y)dy.$$

L'integrale:

$$\partial_j v_\varepsilon(x) = \int_\Omega \partial_j(\partial_i\psi\eta_\varepsilon)f(y)dy$$

e' ben definito, quindi puo' essere esteso a Ω_0 senza alterarne il valore. In particolare:

$$\partial_j v_\varepsilon(x) = \int_{\Omega_0} \partial_j(\partial_i\psi\eta_\varepsilon)(f(y)-f(x)+f(x))dy = \underbrace{\int_{\Omega_0} \partial_j(\partial_i\psi\eta_\varepsilon)(f(y)-f(x))dy}_{=A} + \underbrace{f(x)\int_{\Omega_0} \partial_j(\partial_i\psi\eta_\varepsilon)d}_{=B}$$

Studiamo separatamente i due integrali:

$$B = -f(x)\int_{\partial\Omega_0} \partial_i\psi\eta_\varepsilon\nu_j dS \to -f(x)\int_{\partial\Omega_0} \partial_i\psi(|x-y|)\nu_j dS,$$

quando $\varepsilon \to 0$ (usando Gauss-Green); invece:

$$\left| \int_{|x-y|\le 2\varepsilon} \partial_j((1-\eta_\varepsilon)\partial_i\psi)(f(y)-f(x))dy \right| \le$$
$$\le \int_{\varepsilon\le|x-y|\le 2\varepsilon} \Bigg(\underbrace{|\partial_j\eta_\varepsilon|}_{\le\frac{c_1}{\varepsilon}} \underbrace{|\partial_i\psi|}_{\le\frac{c_2}{|x-y|^{n-1}}} + |(1-\eta_\varepsilon)| \underbrace{|\partial_{ji}\psi|}_{\le\frac{c_3}{|x-y|^n}} \Bigg) \underbrace{|f(x)-f(y)|}_{\le c_4|x-y|^\alpha} dy \le$$
$$\le c\varepsilon^{\alpha/2} \int_{|x-y|\le 2\varepsilon} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha/2}} dy \le c'\varepsilon^{\alpha/2} \to 0$$

quando $\varepsilon \to 0$. Visto che fuori da $\varepsilon \le |x-y| \le 2\varepsilon$ c'e' regolarita' di tutte le funzioni e $\eta_\varepsilon \equiv 1$, si ha la tesi.

A questo punto, visto che siamo riusciti a motivare l'esistenza di $\Delta\omega$, possiamo scrivere:

$$\Delta\left(\frac{1}{(2-n)\omega_n}\omega(x)\right) = \int_{\Omega_0} \Delta\psi(|x-y|)f(y)dy = \int_{\Omega_0} \delta(|x-y|)f(y)dy = f(x),$$

cioe' $\frac{1}{(2-n)\omega_n}\omega(x)$ e' effettivamente la soluzione del problema di Poisson quando $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Ritorniamo al problema di Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

e proviamo a risolvere il caso $\Omega = B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Lemma

Per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, vale la relazione:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \|x\| y \right\| = \left\| \frac{y}{\|y\|} - \|y\| x \right\|.$$

Dimostrazione

Basta dimostrarlo per vettori unitari per linearita'. Ma per quelli e' ovvio.

Sia dunque $x \in B = B(0,R)$; definiamo $\bar{x} = \frac{R^2}{\|x\|^2} x$. Riprendiamo la notazione:

$$\psi(|x-y|) = \frac{1}{(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}.$$

Se riesco a trovare una $G = \psi(|x-y|) + h$, con h armonica, tale che $G_{|\partial B} = 0$, avrei per la formula di rappresentazione:

$$u(x) = \int_{\partial B} \frac{\partial G}{\partial n} u(y) dS - \underbrace{\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} G dS}_{=0} = \int_{\partial B} \frac{\partial G}{\partial n} g(x) dS.$$

Affermo che la funzione G cercata e':

$$G(x,y) = \frac{1}{\omega_n(2-n)}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2}} - c\frac{1}{|x-\bar{y}|^{n-2}}\right),$$

con c costante da determinare. Per il lemma precedente, se $\|x\| = R$:

$$\|x-\bar{y}\| = \left\|x - \frac{R^2}{\|y\|^2}y\right\| = R\left\|\frac{x}{R} - \frac{R}{\|y\|^2}y\right\| = R\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{\|x\|}{\|y\|^2}y\right\| = R\left\|\frac{\frac{y}{\|y\|^2}}{\left\|\frac{y}{\|y\|^2}\right\|} - \left\|\frac{y}{\|y\|^2}\right\|x\right\| =$$

$$= R\left\|\frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|y\|}\right\| = \frac{R}{\|y\|}\|x-y\|,$$

dunque se $c = \left(\frac{R}{\|y\|}\right)^{n-2}$, G fa 0 sul bordo. A questo punto, derivando G , con lunghi calcoli si arriva alla soluzione del problema di Laplace:

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R}\int_{\partial B}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}g(y)dy = g(x) * P(x),$$

dove $P(x,y) = \frac{1}{\omega_n R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}$ e' il "'nucleo di Poisson**.**

Vogliamo vedere adesso che effettivamente $u(x) \to g(x)$ quando $|x| \to R$. L'integrale di $P(x,y)$ su ∂B e' la soluzione del problema di Laplace con $g \equiv 1$. Quindi, per unicita' della soluzione, dovremmo avere che $\int_{\partial B} P(x,y)dy = 1$.

Lemma

Vale:

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n R}\int_{\partial B}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}dy = 1.$$

Dimostrazione

Osserviamo innanzitutto che v e' armonica, in quanto e' un caso particolare di u ; dunque, $\forall 0 < r < R$:

$$\int_{\partial B(0,r)} v(x)dx = v(0) = \frac{1}{\omega_n R}\int_{\partial B}\frac{R^2}{|y|^n}dy = \frac{1}{\omega_n R}\int_{\partial B}\frac{R^2}{R^n}dy = \frac{\mu(\partial B)}{\omega_n R^{n-1}} = 1.$$

Vediamo adesso che $v(x) = v(|x|)$ e' radiale (e avremmo la tesi); questo segue dal fatto che, se $|x_1| = |x_2|$, esiste una rotazione che porta x_1 in x_2 e lascia invariato ∂B .

Siamo ora pronti per dimostrare che la formula trovata per u e' effettivamente la soluzione del problema di Laplace.

Proposizione

Sia $x_0 \in \partial B$; allora:

$$u(x) \to g(x_0) \quad \text{se } x \to x_0.$$

Dimostrazione

Visto che abbiamo dimostrato che l'integrale del nucleo di Poisson e' 1 , si ha:

$$u(x) - g(x_0) = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} (g(y) - g(x_0)) dy = \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B \cap \{|x-y| \leq \delta\}} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \underbrace{(g(y) - g(x_0))}_{<\varepsilon} dy +$$
$$+ \frac{1}{\omega_n R} \int_{\partial B \cap \{|x-y| > \delta\}} \frac{R^2 - |x|^2}{|x-y|^n} \underbrace{(g(y) - g(x_0))}_{\leq 2\|g\|} dy < \frac{\varepsilon}{\omega_n R} + c(R^2 - |x|^2) \to 0,$$

quando $x \to x_0$.

Diamo solo un accenno a come si potrebbe risolvere il problema di Laplace in un aperto generico $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ subarmonica; prendiamo $x \in \Omega$ e consideriamo una palla $B = B(x, r) \subseteq \Omega$; definiamo:

$$u_1 = \begin{cases} u & \text{in } \Omega \backslash B \\ u * P & \text{in } B \end{cases}$$

dove P e' il nucleo di Poisson. Cambiando $x \in \Omega$ e prendendo l'estremo superiore di tutte le funzioni cosi' ottenute, si puo' mostrare che si ottiene la soluzione voluta. In una dimensione, questo ragionamento e' molto semplice da capire: supponiamo di voler trovare la funzione armonica che congiunge i punti (a, α) e (b, β) ; come abbiamo gia' visto, essa e' il segmento congiungente. Se u e' una qualunque funzione subarmonica (cioe' convessa) che unisce i due punti, consideriamo $a < x_1 < x_2 < b$ e, (supponendo di saper risolvere il problema fra x_1 e x_2), lo risolviamo in $[x_1, x_2]$ (cioe' uniamo x_1 e x_2 con un segmento), ottenendo una nuova funzione u_1 ancora subarmonica. Iterando questo ragionamento, la soluzione voluta (cioe' il segmento) non e' altro che l'estremo superiore di tutte queste funzioni ottenibili risolvendo il problema in $[x_1, x_2]$ e variando x_1, x_2 .

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Utente:Lcberselli/Analisi 3/Analisi 3/L'equazione di Poisson e l'equazione di Laplace** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ALcberselli/Analisi_3/Analisi_3/L'equazione_di_Poisson_e_l'equazione_di_Laplace?oldid=48295 *Contributori:* Toma.luca95, Irene, WikiToBot e Anonimo: 1

1.2 Immagini

1.3 Licenza dell'opera