Utente:Dan/Elettromagnetismo/Elettrostatica/Calcolo di potenziali e campi elettrici

Per calcolare il potenziale elettrico di particolari distribuzioni di carica, si può procedere in due modi:

1. procedere per calcolo diretto del potenziale;
2. calcolare prima il campo elettrico, poi passare al potenziale integrando su un qualsiasi percorso il campo elettrico da un punto generico al punto di riferimento posto $V(r_0) = 0$

I due modi sono equivalenti, e, comunque si proceda, i risultati devono ovviamente coincidere. Per quelle distribuzioni che rispettano delle particolari simmetrie, conviene sempre calcolare prima il campo elettrico, sfruttando il teorema di Gauss, e poi di lì procedere per il potenziale. Quando invecee le cose si fanno strane, conviene calcolare prima il potenziale, che ricordiamo essere un campo scalare (e quindi più facile da calcolare) e poi calcolarne il gradiente per ottenere il campo elettrico.

Esempio (2.8 Potenziale del piano infinito di carica)

Vogliamo calcolare il potenziale elettrico di **un piano infinito uniformemente carico**, con densità superficiale σ . Abbiamo già calcolato il campo elettrico generato da questa distribuzione, e vale $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$ che risulta uniforme in tutto lo spazio e sempre ortogonale al piano. Allora procediamo da qui per calcolare il potenziale:

$$V_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Osserviamo che *non possiamo porre* $V(\infty) = 0$ poiché la distribuzione si estende fino all'infinito; dovremo quindi porre un punto al finito con potenziale nullo. Visto che l'integrale dipende solo dagli estremi del cammino, **scegliamo sempre il cammino più semplice** su cui integrare; in questo caso, posto che l'asse $\hat{\mathbf{x}}$ è perpendicolare al piano, ci muoviamo su questo.

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(x_B - x_A)$$

Poniamo a questo punto $x_B = 0$ e otteniamo il potenziale di un piano infinito carico:

$$V(x) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x$$

Osserviamo che, mentre il campo elettrico restava uniforme in tutto lo spazio, il potenziale va all'infinito come $-x$, e vale proprio $V(\infty) - \infty$, per cui non avremmo mai potuto porre $V(\infty) = 0$.

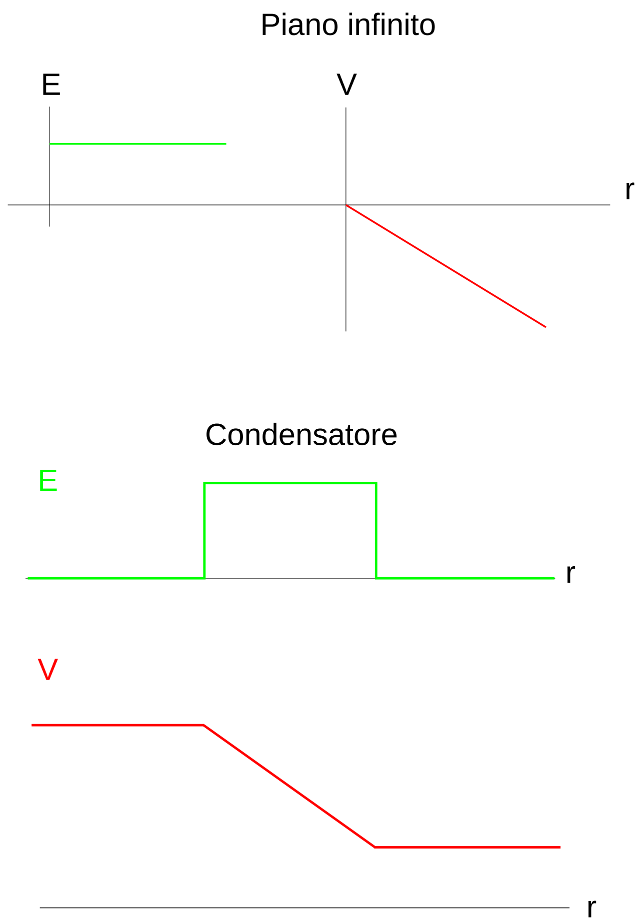

Fig. 2.9: Andamento del campo elettrico e del potenziale in piano infinito e in un condensatore. Si noti la "discesa" di potenziale ai capi del condensatore.

Esempio (2.8 Superficie sferica carica uniformemente)

Vogliamo ora calcolare il potenziale **di una superficie sferica uniformemente carica**; sia chiaro, non di *una sfera carica*, bensì di una superficie sferica. Di questo non conosciamo il campo elettrico e, proprio perché rispetta simmetria sferica (raccolta di tautologie) conviene prima calcolare questo e poi passare al potenziale.

Poiché la densità è uniforme, la carica totale sarà $Q = \sigma 4\pi R^2$, posto che la sfera abbia raggio R . Come superficie gaussiana prendiamo una sfera di raggio r con lo stesso centro della nostra distribuzione; ci aspettiamo, per simmetria sferica, che il campo sia radiale $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r})\,\hat{\mathbf{r}}$ e, quindi, il flusso attraverso la superficie gaussiana sarà il prodotto del campo elettrico per tutta la superficie (perché versore normale e vettore campo elettrico sono paralleli):

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = E(\mathbf{r})4\pi r^2$$

Applicando il teorema di Gauss, questo deve essere uguale a $\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$; otteniamo quindi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & \text{per } r \geq R \\ 0 \quad \text{per } r < R \end{cases}$$

Posto il potenziale all'infinito $V(\infty) = 0$, calcoliamo il potenziale come integrale *su un percorso radiale*:

$$V(\mathbf{r}) - V(\infty) = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\, dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Questo per $r > R$; nel caso $r < R$, dobbiamo risolvere due integrali:

$$V(\mathbf{r}) - V(\infty) = \int_r^R \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_R^\infty \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$$

Il primo integrale è sempre nullo (perché è nullo il campo elettrico all'interno della superficie), mentre osserviamo che **il potenziale per** $r < R$ **è costante** (infatti R è il raggio della sfera ed è costante), quindi il potenziale in tutto lo spazio sarà costante all'interno della superficie, per poi decrescere all'infinito come $\frac{1}{r}$.

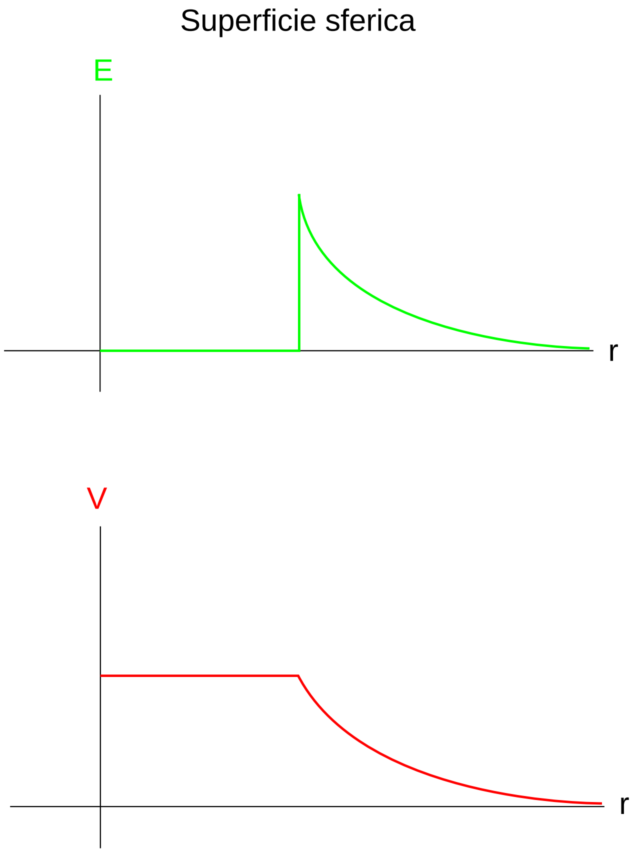

Fig. 2.10: Andamento del campo elettrico e del potenziale di una superficie sferica uniformemente carica.

Esempio (2.9 Anello uniformemente carico)

Ora passiamo al potenziale di un **anello uniformemente carico**; abbiamo già visto l'espressione del suo campo elettrico, che possiamo riscrivere in termini della densità lineare di carica λ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Potremmo partire da questo per calcolarci il potenziale, tuttavia stavolta procediamo all'inverso, calcolando prima il potenziale e poi, da quello, arrivare al campo elettrico. Ricordiamo che ci muoviamo sempre sull'asse di simmetria dell'anello (se ci spostiamo di poco, le cose si complicano notevolmente e il calcolo diventa molto difficile); la struttura dell'anello è la stessa che abbiamo utilizzato due sezioni fa.

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_l \frac{\lambda dl'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Osserviamo che, qualsiasi punto prendiamo sull'asse di simmetria, questo dista da un infinitesimo *dl* dell'anello $\sqrt{R^2 + x^2}$, che è costante, e esce dal segno di integrale. Otteniamo quindi:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \oint_l dl' = \frac{\lambda}{2\epsilon_0} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Da questo passiamo allora al campo elettrico, calcolato come $\mathbf{E} = -\nabla V$; osserviamo che il potenziale *non dipende ne da* y *ne da* z , per cui le due componenti saranno nulle; l'unica componente non nulla sarà quella lungo l'asse:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Come avevamo già calcolato. Il campo elettrico ha quindi componenti:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \left| \begin{array}{l} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = -\dfrac{\lambda R}{2\epsilon_0} \dfrac{x}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

In particolare, il potenziale elettrico, che corrisponde anche all'energia potenziale elettrica per unità di carica, presenta un massimo nell'origine (fari riferimento alla figura 2.11), dove vale $V(0) = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}$; come vedremo a breve, l'energia potenziale elettrica *non assume mai un minimo*, ovvero *non esistono punti di equilibrio per il campo elettrico.*

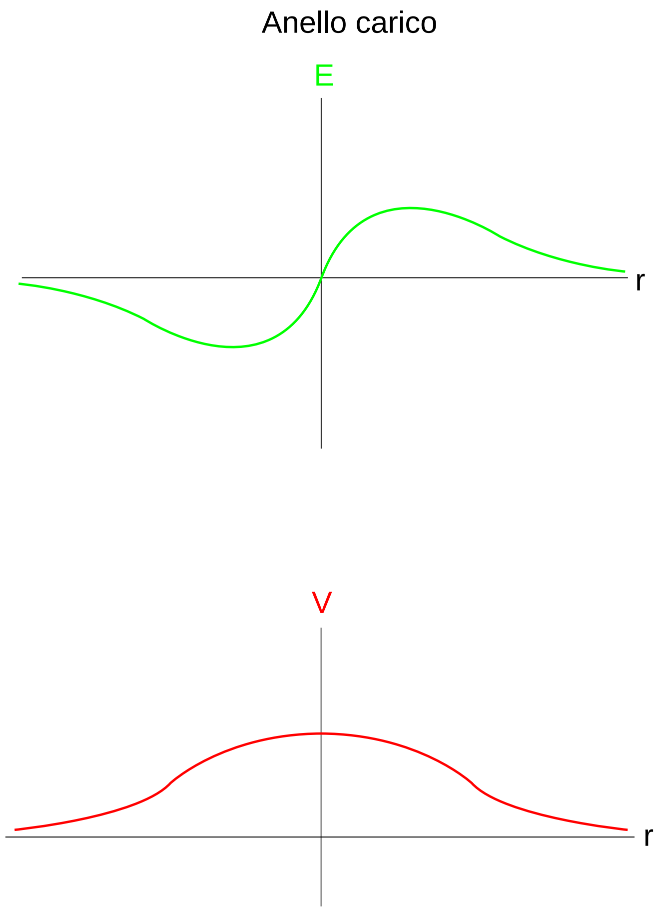

Fig. 2.11: Andamento del campo elettrico e del potenziale di un anello uniformemente carico. Come salta all'occhio, il potenziale ha un massimo nell'origine.

Esempio (2.10)

Questo esercizio unisce meccanica e elettrodinamica; preso lo stesso anello dell'esempio precedente, con carica positiva $\lambda > 0$, poniamo un elettrone *fermo* sull'asse di simmetria, e ci chiediamo **con quale velocità passa per l'origine**. Possiamo calcolarlo in due modi distinti.

Posto che l'elettrone si trovi a distanza d dall'origine, possiamo applicare **la conservazione dell'energia meccanica**:

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

Poiché l'elettrone parte da fermo, non ha energia cinetica iniziale, quindi:

$$K_f = U_f - U_i = -q(V_f - V_i) = q(V(d) - V(0))$$

Andando a sostituire i valori di energia cinetica e potenziale, otteniamo che la velocità con cui passa all'origine è:

$$v = \sqrt{\frac{\lambda q}{m\epsilon_0}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+d^2}} - 1\right)}$$

Il secondo modo per poterlo calcolare è trovare il lavoro della forza elettrica e porlo uguale all'energia cinetica:

$$L = \int_d^0 \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_d^0 F dx = \int_d^0 \frac{q\lambda R}{2\epsilon_0}\frac{x}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{1}{2}mv^2$$

Da cui otteniamo lo stesso risultato di prima:

$$v^2 = \frac{\lambda q}{m\epsilon_0}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+d^2}} - 1\right)$$

Esempio (2.11 Cilindro infinito di carica)

Vogliamo calcolare il campo elettrico e il potenziale di un **cilindro infinito** carico uniformemente, con densità volumica ρ costante. Supposto sia R il raggio del cilindro, procediamo a calcolare prima il campo elettrico, poi il potenziale.

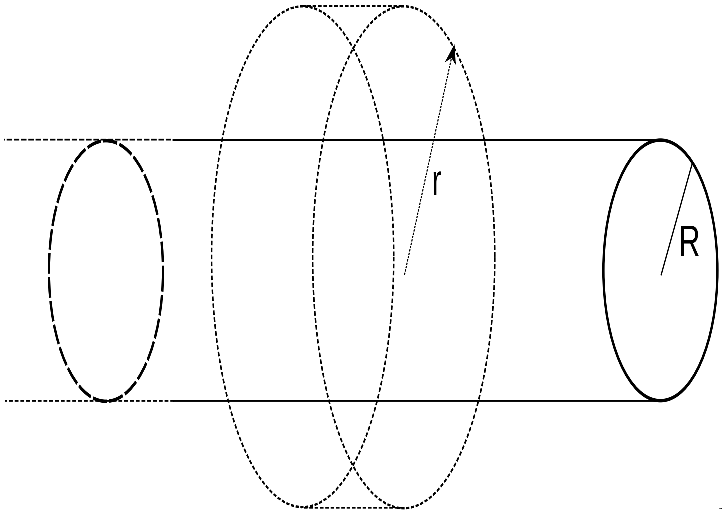

Fig. 2.12: Il cilindro infinito con la superficie gaussiana (un altro cilindro)

Come superficie gaussiana prendiamo un altro cilindro, di raggio r e di altezza L (fare riferimento alla figura 2.12). Il flusso del campo attraverso questa superficie è nullo sulle basi e positivo lungo la superficie laterale: il campo, infatti, è radiale in quanto la distribuzione presenta una perfetta simmetria cilindrica (tautologie ricorrenti). Inoltre, poiché campo elettrico e versore normale sono paralleli lungo la superficie laterale, il flusso attraverso questa è il prodotto del campo per l'area. Applicando il teorema di Gauss:

$$E(r)2\pi rL = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

La carica interna sarà $Q = \int_\tau \rho d\tau$, che vale $Q = \pi R^2 L\,\rho$, quindi il campo sarà:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}$$

Valido per $r > R$.

Per calcolare il potenziale, calcoliamo l'integrale di linea del campo lungo un cammino radiale. Poiché la distribuzione è infinita, poniamo il punto di potenziale nullo sula superficie del cilindro, e calcoliamo l'integrale da un punto sulla superficie al generico punto r :

$$V(r) - \underbrace{V(R)}_{=0} = \int_r^R \frac{\rho R^2}{\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}\, dr = \rho R^2 \ln(r) \Big|_r^R = \frac{\rho}{\epsilon_0} R^2 \ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

Esempio (2.12)

Prendiamo lo stesso cilindro dell'esempio precedente. All'interno di esso poniamo *un elettrone fermo*, a distanza r_0 dal centro. Vediamo che tipo di moto ha questo elettrone.

La forza che la particella risente è $F = -eE$; applicando la seconda legge della dinamica (qui usiamo il campo all'interno del cilindro, che non abbiamo calcolato espressamente):

$$F = -eE = -\frac{e\rho R^2}{\epsilon_0} r = m\ddot{r}$$

$$\ddot{r} + \frac{e\rho R^2}{\epsilon_0 m} r = 0$$

Ovvero l'elettrone si muove di **moto armonico attorno al centro del cilindro**; la soluzione del moto è del tipo $r = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$; poiché parte da fermo e dalla posizione r_0 , otteniamo l'equazione del moto:

$$r = r_0 \cos(\omega_o t) \quad \text{dove } w_0 = \sqrt{\frac{e\rho^2}{\epsilon_0 m}}$$

Esempio (2.13)

Vediamo ora un esempio in cui applichiamo anche il principio di sovrapposizione. Abbiamo due sfere cariche che si intersecano, con densità ρ positiva in una e $-\rho$ negativa l'altra. Vogliamo calcolare potenziale e campo elettrico *nell'area in cui si intersecano*.

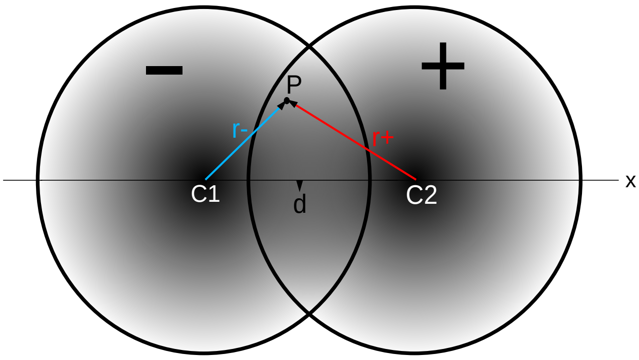

Fig. 2.13: Sfere cariche che si intersecano.

Indichiamo con C_1 e C_2 i centri delle sfere, con $\mathbf{d}$ la distanza che li separa. Preso un punto P nell'intersezione, indichiamo con $\mathbf{r}^+$ la distanza del punto dal centro della sfera positiva e con $\mathbf{r}^-$ la distanza del punto dal centro della sfera negativa (fare tutti i riferimenti alla schematizzione in figura 2.13). Poiché vale il principio di sovrapposizione, il campo elettrico totale sarà la somma vettoriale dei due campi, ovvero $\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$. Il campo elettrico generato da una sfera lo abbiamo già calcolato e vale, *all'interno della sfera*, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r\hat{\mathbf{r}}$. Avremo quindi:

$$\mathbf{E}(P) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\mathbf{r}^+ - \mathbf{r}^-\right) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\mathbf{d}$$

Ovvero il campo è **uniforme** e parallelo alla congiungente dei centri delle sfere, e va dalla sfera positiva a quella negativa. Procediamo a calcolare il potenziale *lungo la direzione della congiungente*, visto che lungo le altre direzioni il campo non c'è. Chiamata questa direzione $\hat{x}$, abbiamo:

$$V(r) = \int_A^B -\frac{\rho}{3\epsilon_0}\delta dx = -\frac{\rho}{3\epsilon_0}(x_B - x_A)$$

Posto il potenziale a $V(x_B) = 0$, abbiamo infine:

$$V(x) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}x$$

Osserviamo che, mentre il campo era costante, il potenziale è lineare con la distanza.

Utilizzando il momento di dipolo (di cui parleremo approfonditamente nel prossimo capitolo), definito come $\mathbf{p} = q\delta$, il campo elettrico possiamo anche vederlo come $\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0}$ dove, in questo caso in cui la carica è continua, $\mathbf{p} = \rho\mathbf{d}$. Come vedremo parlando dei dielettrici, questo risultato ci permetterà di definire e parlare bene del campo macroscopico.

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Elettrostatica/Calcolo di potenziali e campi elettrici** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Elettrostatica/Calcolo_di_potenziali_e_campi_elettrici?oldid=45869 *Contributori:* Dan

1.2 Immagini

- **File:Cilindroinfinito.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/0/02/Cilindroinfinito.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:EVanello.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/6/6b/EVanello.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:EVpiano.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/8/83/EVpiano.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:EVsuperficiesferica.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/2/26/EVsuperficiesferica.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Sferecariche.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/f/f8/Sferecariche.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

1.3 Licenza dell'opera