Corso:Algebra IV I1/Esercizi/Primo esercizio

Esercizio 7.1

Determinare il gruppo di Galois su $\mathbb{Q}$ del campo di spezzamento M del polinomio $f(x) = x^4 - 3x^2 - 10$.

1 Campo di spezzamento

Prima cerco il campo di spezzamento M : la fattorizzazione di $f(x)$ in irriducibili in $\mathbb{Q}[x]$ è

$$f(x) = (x^2 - 5)(x^2 + 2)$$

Osservo che $x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$, e definisco il campo di spezzamento di questo polinomio:

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2 - 5)} = \{a + b\sqrt{5},\, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

$K \subset \mathbb{R}$ quindi il polinomio $x^2 + 2$ non ammette radici in K , e si ha $x^2 + 2 = (x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2})$.

Per trovare il campo di spezzamento di $f(x)$ estendo K e considero:

$$M = K(i\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i\sqrt{2}) = \{\xi_0 + \xi_1 i\sqrt{2},\, \xi_0, \xi_1 \in K\}$$

e sostituendo le espressioni di ξ_0 e ξ_1 :

$$\begin{aligned} &= \{(a_0 + a_1\sqrt{5}) + (a_2 + a_3\sqrt{5}) * i\sqrt{2},\, a_i \in \mathbb{Q},\ \forall i\} \\ &= \{a_0 + a_1\sqrt{5} + a_2 i\sqrt{2} + a_3 i\sqrt{10},\, a_i \in \mathbb{Q},\ \forall i\} \end{aligned}$$

Applicando il teorema della torre segue che

$$|M : \mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i\sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{5})| * |\mathbb{Q}(\sqrt{5}) : \mathbb{Q}| = 2 * 2 = 4$$

2 Ordine ed elementi del gruppo di Galois

Siccome $\mathbb{Q}$ ha caratteristica 0 ogni polinomio irriducibile è separabile (infatti un polinomio irriducibile $f(x) \neq 0$ ha una radice multipla solo se $f'(x) = 0$, e questo in caratteristica 0 non può avvenire); dalla caratterizzazione delle estensioni normali di grado finito segue quindi che $M \supseteq \mathbb{Q}$ è normale, e $o(\mathcal{G}(M/\mathbb{Q})) = |M : \mathbb{Q}| = 4$.

G è isomorfo a un sottogruppo di S_4 perché gli elementi di G permutano le radici del polinomio di partenza che sono quattro. Detti $\Omega_1 = \{\pm\sqrt{5}\}$ e $\Omega_2 = \{\pm i\sqrt{2}\}$, sappiamo che G agisce transitivamente sia su Ω_1 che su Ω_2 . Quindi, gli elementi di G si possono elencare in questo modo:

$$\begin{array}{lc} g_1 t.c. & \text{identita} \\ g_2 t.c. & \sqrt{5}^{g_2} = -\sqrt{5}, (i\sqrt{2})^{g_2} = i\sqrt{2} \\ g_3 t.c. & \sqrt{5}^{g_3} = \sqrt{5}, (i\sqrt{2})^{g_3} = -i\sqrt{2} \\ g_4 t.c. & \sqrt{5}^{g_4} = -\sqrt{5}, (i\sqrt{2})^{g_4} = i\sqrt{2} \end{array}$$

Posso anche riscrivere gli elementi sopra in questo modo

$$g_1 = 1, g_2 : \begin{cases} \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5} \\ i\sqrt{2} \mapsto i\sqrt{2} \end{cases} \quad g_3 : \begin{cases} \sqrt{5} \mapsto \sqrt{5} \\ i\sqrt{2} \mapsto -i\sqrt{2} \end{cases} \quad g_4 : \begin{cases} \sqrt{5} \mapsto -\sqrt{5} \\ i\sqrt{2} \mapsto -i\sqrt{2} \end{cases} \quad .$$

Osservo che il gruppo non è ciclico, infatti ogni elemento elevato al quadrato è uguale all'identità e ha quindi ordine 2. A meno di isomorfismo esistono solo due gruppi di ordine 4 che sono C_4 e $C_2 \times C_2$ (il gruppo di Klein). Nota: con C_n indichiamo il gruppo ciclico di ordine n e, se usiamo la notazione moltiplicativa per i gruppi, consideriamo il prodotto diretto $\times$. Se invece usiamo la notazione additiva per i gruppi, consideriamo la somma diretta (ma e' la stessa costruzione, cambia solo la notazione).

Siccome G non e' ciclico deduciamo che G è

il Klein. Posso elencare i suoi elementi nella forma

$$G = \{1, x, y, xy\}$$

dove $x = g_2$, $y = g_3$, $xy = g_4$.

3 Corrispondenza di Galois

I sottogruppi di G sono:

$$H_1 := \{1, x\}, \quad H_2 := \{1, y\}, \quad H_3 := \{1, xy\}$$

Determino i campi intermedi:

1. $H_1' = \mathrm{Fix(H_1)} = \mathrm{Fix(\{1,x\})}$, e siccome x fissa $i\sqrt{2}$, $H_1' \supseteq \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$ .Inoltre per il teorema fondamentale della teoria di Galois
$$|G : H_1| = |H_1' : G'| = |H_1' : \mathbb{Q}|$$
e siccome $|G : H_1| = 2$, anche $|H_1' : \mathbb{Q}| = 2$. Poiche' $|\mathbb{Q}(i\sqrt{2} : \mathbb{Q}| = 2$ concludo che deve essere $H_1' = \mathbb{Q}(i\sqrt{2})$.

2. Per un ragionamento analogo si ha che $H_2' = \mathrm{Fix(H_2)} = \mathrm{Fix(\{1,y\})} = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

3. Ora determiniamo
$$H_3' = \mathrm{Fix(H_3)} = \mathrm{Fix(\{1,xy\})}$$
Determino gli elementi $\xi \in M$ che vengono fissati da H_2 e quindi da xy : un generico elemento in M è della forma
$$\xi = a_0 + a_1\sqrt{5} + a_2 i\sqrt{2} + a_3 i\sqrt{10}$$
e considerando come agisce xy si ha:
$$\xi^{xy} = a_0 - a_1\sqrt{5} - a_2 i\sqrt{2} + a_3 i\sqrt{10}$$
e imponendo $\xi = \xi^{xy}$ ottengo il sistema
$$\begin{cases} a_0 = a_0 \\ a_1 = -a_1 \\ a_2 = -a_2 \\ a_3 = a_3 \end{cases}$$
cioè $a_2 = a_1 = 0$ mentre a_0, a_3 sono liberi, quindi
$$H_3' = \{a_0 + a_3 i\sqrt{10},\, a_0, a_3 \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}(i\sqrt{10})$$

4 Diagrammi dei sottogruppi e dei campi intermedi

(per comodità lo scrivo solo a parole) SOTTOGRUPPI: Primo livello: G

Secondo livello: $\{1, x\}$, $\{1, y\}$, $\{1, xy\}$

Terzo livello: $\{1\}$

CAMPI INTERMEDI:

Primo livello:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}, i\sqrt{2})$$

Secondo livello: $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{10})$

Terzo livello: $\mathbb{Q}$

Osserviamo anche che G e' abeliano dunque ogni suo sottogruppo e' normale. Segue dal Teorema Fondamentale della Teoria di Galois che le estensioni $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) \supseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{2}) \supseteq \mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}(i\sqrt{10}) \supseteq \mathbb{Q}$ sono normali (cosa che si verifica facilmente anche in maniera diretta peraltro).

5 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

5.1 Testo

- **Corso:Algebra IV I1/Esercizi/Primo esercizio** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAlgebra_IV_I1/Esercizi/Primo_esercizio?oldid=48400 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio

5.2 Immagini

5.3 Licenza dell'opera