Utente:Dan/Elettromagnetismo/ Magnetostatica/La seconda equazione di Maxwell e il potenziale vettore

1 La divergenza del campo di induzione magnetica

Passiamo, dopo aver osservato la formula generale per poter calcolare un campo magnetico, a studiarne le proprietà. In virtù del teorema di Helmotz, seguendo lo stesso approccio adottato in elettrostatica, studiamo rotore e divergenza di $\mathbf{B}$. Abbiamo già discusso nell'introduzione alla magnetostatica del perché deve essere $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$: non esistendo *sperimentalmente* cariche magnetiche puntiformi e isolate, saremo in presenza di linee di forza chiuse; poiché la teoria **deve** essere in accordo con i dati sperimentali, altrimenti è mera digressione matematica, questo sta a significare che, presa una qualsiasi superficie chiusa, il numero di linee di forza entranti del campo di induzione magnetica è uguale al numero di linee di forza uscenti, quindi il flusso è nullo. Applicando il teorema della divergenza, ne concludiamo quindi che $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$.

Che tutto questo abbia senso, è indubbio. Dobbiamo solo vedere se questo è concorde con l'espressione del campo che abbiamo finora utilizzato, ovvero che se calcoliamo la divergenza del campo di induzione, espresso secondo la prima legge di Laplace, allora otteniamo davvero il valore nullo. Dobbiamo quindi calcolarlo esplicitamente:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} =& \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} I \frac{d\mathbf{l}' \times \Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|^3} \right) = \\ & \frac{\mu_0 I}{4\pi} \boldsymbol{\nabla} \cdot \oint_{l'} \frac{d\mathbf{l}' \times \Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|^3}\end{aligned}$$

Nel secondo passaggio abbiamo supposto essere la corrente stazionaria. A questo punto, osserviamo che l'integrale e la divergenza agiscono su variabili diverse (l'integrale sulle variabili *primate*, mentre la divergenza sulle variabili pure), possiamo portare la divergenza sotto il segno di integrale:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{l'} \boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{d\mathbf{l}' \times \Delta \mathbf{r}}{|\Delta \mathbf{r}|^3}$$

A questo punto, sfruttiamo la relazione:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u}(\nabla \times \mathbf{v})$$
$$\nabla \cdot \frac{d\mathbf{l}' \times \Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|^3} = (\nabla \times d\mathbf{l}') \cdot \frac{\Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|^3} - d\mathbf{l}' \cdot \left(\nabla \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|^3}\right)$$

Osserviamo che il primo fattore della somma presenta un $\nabla \times d\mathbf{l}'$: poiché $d\mathbf{l}'$ dipende solo dalle variabili primate, mentre il nabla agisce sulle variabili pure, questo darà contributo zero. Allo stesso tempo, però, il secondo fattore presenta un $\nabla \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|^3} = \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|}\right)$: il rotore di un gradiente è sempre nullo. Quindi, possiamo scrivere **la seconda equazione di Maxwell** senza più esitazioni:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Abbiamo appena visto che questa è concorde con l'espressione del campo dataci dalla legge di Laplace; come vedremo, questa continuerà a valere *sempre*, sia in caso statico che dinamico. Come abbiamo già detto, inoltre, questa segue (o da questa può seguire) dal flusso nullo attraverso qualsiasi superficie chiusa.

2 Il potenziale vettore

Poiché la seconda equazione di Maxwell è *sempre valida*, ci troviamo di fronte alla possibilità di esprimere il campo di induzione magnetica attraverso un altro campo vettoriale: la caratteristica di ogni campo **solenoidale**, ovvero a divergenza nulla, è quella di poter essere scritto come **il rotore di un altro campo vettoriale**, in virtù del fatto che il la divergenza di un rotore è sempre nulla. Si può quindi esprimere:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Il campo $\mathbf{A}$ è chiamato **potenziale vettore del campo di induzione magnetica** o, più semplicemente, campo vettore. Quello che sembra un giochino erotico matematico, in realtà, è uno strumento di una potenza rilevante in tutta la teoria dell'elettromagnetismo, nonché in tutte le teorie successive: per dirne una, **in teoria dei campi il fotone è il campo $\mathbf{A}$** . Risulta infatti molto più comodo descrivere i fenomeni magnetici in funzione di $\mathbf{A}$ che di $\mathbf{B}$, pur restando comunque fondamentale il concetto che **non misuriamo sperimentalmente $\mathbf{A}$ ma il campo $\mathbf{B}$** . Tra un paio di sezioni faremo un discorso più lungo e approfondito sul potenziale vettore, per ora ci limitiamo a trovarne un'espressione analitica a partire da quella di $\mathbf{B}$.

Partendo dalla formula di Laplace, possiamo esprimere questa proprio come il rotore di un qualcos'altro:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{l'} \frac{d\mathbf{l}' \times \Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|^3} d\tau'$$

Ricordiamo che possiamo sempre esprimere $\frac{\Delta\mathbf{r}}{|\Delta\mathbf{r}|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|}\right)$, quindi riscrivere:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\left(\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|}\right)\right)d\tau'$$

A questo punto, sfruttiamo la relazione differenziale:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nabla}\times(f\mathbf{v}) = f(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{v}) + \boldsymbol{\nabla}f\times\mathbf{v}\\
&\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\Delta\mathbf{r}|}\right) = \frac{\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\Delta\mathbf{r}|} + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|}\right)\times\mathbf{J}(\mathbf{r}')
\end{aligned}$$

Osserviamo che $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{J}(\mathbf{r}') = 0$ perché l'operatore nabla agisce sulle variabili pure, mentre $\mathbf{J}$ dipende dalle variabili primate; inoltre, per la antisimmetria del prodotto vettoriale per cui $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, possiamo esprimere:

$$-\mathbf{J}(\mathbf{r}')\times\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|}\right) = \boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\Delta\mathbf{r}|}\right)$$

A questo punto, abbiamo finito. Basta riscrivere il campo di induzione come:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\Delta\mathbf{r}|}\right)d\tau'$$

Osserviamo che rotore e integrale agiscono su due set di variabili diverse, possiamo quindi scambiare i due operatori:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}') = \boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\Delta\mathbf{r}|}d\tau'\right) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$$

Abbiamo quindi trovato l'espressione del potenziale vettore:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\tau'}\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\Delta\mathbf{r}|}d\tau'$$

Concludiamo dando, ovviamente, le unità di misura del potenziale vettore:

$$[A] = \frac{[B]}{[\nabla]} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{m}}$$

3 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

3.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Magnetostatica/La seconda equazione di Maxwell e il potenziale vettore** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Magnetostatica/La_seconda_equazione_di_Maxwell_e_il_potenziale_vettore?oldid=46168 *Contributori:* Dan

3.2 Immagini

3.3 Licenza dell'opera