Utente:Lcberselli/Analisi 3/Analisi 3/Convergenza di serie di Fourier

D'ora in poi indicheremo con $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ il toro; le funzioni considerate saranno (se non specificato diversamente) definite su $\mathbb{T}$, cioe' periodiche di periodo 2π .

Supponiamo che una certa funzione f ammetta la scrittura in serie:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx),$$

per certi coefficienti a_k e b_k . Osservato che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \pi\delta_{mn} = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx$$

se $m + n > 0$, mentre valgono rispettivamente 2π e 0 se $m = n = 0$ e:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)dx = 0$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}$, segue che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)f(x)dx = \pi a_n \quad \text{e} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)f(x)dx = \pi b_n.$$

Definizione (1)

Data una funzione $f(x)$, definiamo **serie di Fourier** di f la serie formale:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx},$$

dove:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)f(x)dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)f(x)dx, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx},$$

cioe' gli a_k, b_k, c_k sono legati dalle relazioni $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$ e $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$ $\forall k > 0$.

Ci occuperemo ora di trovare condizioni affinche' la serie di Fourier converga e converga esattamente ad f . Data f , denoteremo con $\widehat{f_k} = \widehat{f}(k)$ i coefficienti c_k .

Proposizione (1 Lemma di Riemann-Lebesgue)

Sia $f \in \mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$. Allora $\widehat{f}_n \to 0$ quando $|n| \to \infty$.
Dimostrazione

Denotata $S_N(f, x)$ la serie di Fourier di f troncata ai termini $-N$ e N , si ha:

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(f,x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx} \right) \left(\overline{f(x)} - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n e^{inx}} \right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} c_n \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} e^{inx} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{e^{inx}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n,m} \int_{-\pi}^{\pi} c_n \overline{c_m} e^{inx} e^{-imx} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 + \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2,$$

da cui si ricava mandando $N \to +\infty$ la **disuguaglianza di Bessel**, cioe':

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

Segue immediatamente che, essendo il membro a sinistra finito, $c_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e dunque $c_n \to 0$ quando $|n| \to \infty$.
Corollario (2)

Se $f \in C^k(\mathbb{T})$, allora $|n|^k \widehat{f}_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$; in particolare $\widehat{f}_n = o(|n|^{-k})$ quando $|n| \to \infty$.
Dimostrazione

Integrando per parti:

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} = \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} f(x) \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \frac{e^{-inx}}{in} = \frac{1}{2in\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} = \frac{1}{in} \widehat{f'_n},$$

da cui ricorsivamente $\widehat{f}_n = \frac{1}{(in)^k} \widehat{f_n^{(k)}}$, cioe' la tesi.
Corollario (3)

Se $f \in C^1(\mathbb{T})$, allora la serie di Fourier converge assolutamente.
Dimostrazione

Si ha:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}_n| = |\widehat{f}_0| + \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(n|\widehat{f}_n|) \leq |\widehat{f}_0| + \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}n^2|\widehat{f}_n|^2$$

per la disuguaglianza $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$, ma $|\widehat{f}_n|^2 = o(|n|^{-2})$, dunque la serie converge e segue che $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}_n| < +\infty$, cioe' la serie di Fourier converge assolutamente.

Definizione (2)

Definiamo **nucleo di Dirichlet**:

$$D_n(z) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikz}.$$

Proposizione (4)

Si ha l'uguaglianza:

$$D_n(z) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

Dimostrazione

Direttamente:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikz} = e^{-inx}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikz} = e^{-inx}\frac{e^{(2n+1)ix}-1}{e^{ix}-1} = \frac{e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)ix} - e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)ix}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}.$$

Osservazione

$D_n(z)$ e' pari; inoltre $\forall n$ si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) = 2\pi.$$

Teorema (3)

$f \in C^1(\mathbb{T})$. Allora $S_n(f,x) \to f(x)$ per $n \to \infty$ $\forall x \in \mathbb{T}$.

Dimostrazione

Innanzitutto notiamo che:

$$S_n(f,x) = \sum_{|k|\leq n}\widehat{f}_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\leq n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\leq n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)D_n(z)dz.$$

Ma visto che $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(z) = 2\pi$, allora $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_n(z) dz$; segue quindi che:

$$S_n(f, x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+z) - f(x)) D_n(z) dz.$$

Con semplici manipolazioni:

$$\begin{aligned} S_n(f, x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+z) - f(x)) \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) z\right)}{2\pi \sin\left(\frac{z}{2}\right)} dz = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\frac{f(x+z) - f(x)}{z}}_{\in C^0(\mathbb{T})} \underbrace{\frac{z}{2\pi \sin\left(\frac{z}{2}\right)}}_{\in C^0(\mathbb{T})} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) z\right) dz, \end{aligned}$$

in quanto la derivata di una funzione C^1 e' continua, ma l'ultimo membro va a 0 quando $n \to \infty$ per il lemma di Riemann-Lebesgue (infatti basta scrivere $\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) z\right) = \sin(nz)\cos(z/2) + \cos(nz)\sin(z/2)$ e scomporre l'integrale in due parti, di cui ciascuna infinitesima). Segue dunque che $S_n(f, x) \to f(x)$.

Interessiamoci ora a quanto si possano indebolire le ipotesi di questo teorema mantenendolo vero; facciamo prima un'osservazione.

Osservazione

Sia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R} \in C^0$. Definiamo la funzione:

$$f_P(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, \pi] \\ f(-x) & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

e sia F_P il prolungamento 2π -periodico di f_P . Per il lemma di Riemann-Lebesgue:

$$0 \leftarrow \int_{-\pi}^{\pi} F_P \cos(nx) dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

Analogamente posso ragionare con il prolungamento per disparita' di f e ottenere lo stesso risultato per $\int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$.

Teorema (4)

$f \in C^1(\mathbb{T})$ a tratti, cioe' $f \in C^0(\mathbb{T})$ e la derivata esiste dovunque tranne che in un numero finito di punti, nei quali $\exists f'_{\pm}(x_0) \in \mathbb{R}$ derivate destre e sinistre. Allora $S_n(f, x) \to f(x)$ quando $n \to \infty$.

Dimostrazione

Per la parita' del nucleo di Dirichlet

$$S_n(f, x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z) dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z) D_n(z) dz,$$

quindi nei punti di discontinuita' della derivata (negli altri la convergenza e' gia' stata dimostrata) vale:

$$
\begin{aligned}
S_n(f,x_0)-f(x_0) &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x_0+z)-f(x_0)+f(x_0-z)-f(x_0))D_n(z)dz = \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(f(x_0+z)-f(x_0))D_n(z)dz+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(f(x_0-z)-f(x_0))D_n(z)dz.
\end{aligned}
$$

Considerando separatamente i due integrali, si procede come nella dimostrazione del teorema analogo gia' visto, usando che derivata destra e sinistra esistono e sono finite; con il trucco gia' usato per spezzare il seno di $(n+1/2)z$ e con l'osservazione precedente si giunge alla tesi.

Teorema (5)

$f \in C^1(\mathbb{T})$ a tratti con $x_1,\dots,x_n$ punti di salto. Se:

$$
\widetilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x\in[-\pi,\pi]\backslash\{x_i\}_i \\ \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2} & \text{se } x\in\{x_i\}_i \end{cases}
$$

dove $f(x^{\pm})=\lim_{h\to 0^{\pm}} f(x+h)$, allora $S_n(f,x)\to\widetilde{f}(x)$ quando $n\to\infty$.

Dimostrazione

Dobbiamo controllare la convergenza solo nei punti x_i , in quanto negli altri punti la convergenza segue da teoremi precedenti. Si ha:

$$
S_n(f,x_i)-\widetilde{f}(x_i)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(f(x_i+z)-f(x_i^+))D_n(z)dz+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}(f(x_i-z)-f(x_i^-))D_n(z)dz
$$

e si conclude come fatto precedentemente sfruttando che f e' C^1 su $[x_i^+,x_i+\delta]$.

Diamo per buono il seguente teorema di densita':

Teorema (6)

$f\in\mathcal{L}^1(a,b)$. $\forall\varepsilon>0$, $\exists f_\varepsilon\in C_0^\infty(a,b)$ tale che:

$$
\|f-f_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1}=\int_a^b|f-f_\varepsilon|dx<\varepsilon.
$$

Lemma (di Riemann-Lebesgue)

$f\in\mathcal{L}^1(a,b)$. Allora $\int_a^b f(x)\sin(nx)dx\to 0$ quando $|n|\to\infty$ (per il coseno e' analogo).

Dimostrazione

Sia f_ε data dal teorema precedente. Allora:

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)-f_\varepsilon(x)|\sin(nx)dx\right| + \left|\int_a^b f_\varepsilon(x)\sin(nx)dx\right| \leq \varepsilon(b-a)+\varepsilon$$

da cui segue la tesi.
Teorema (di Dini)

$f \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $\exists\delta$ per cui:

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+z)-f(x)|}{|z|}dz < +\infty.$$

Allora $S_n(f,x) \to f(x)$ (o eventualmente a $\widetilde{f}(x)$ definita come sopra).
Dimostrazione

Dall'ipotesi segue che $g(z) = \frac{f(x+z)-f(x)}{z}\frac{z}{2\pi\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \in \mathcal{L}^1$, dunque si conclude per il lemma di Riemann-Lebesgue (dopo aver spezzato $\sin((n+1/2)z)$ come al solito).
Osservazione

Sia $f \in C^0(\mathbb{T})$. Proviamo a stimare $S_n(f,x)-f(x)$:

$$S_n(f,x)-f(x) = \int_{|z|<\delta}(f(x+z)-f(x))D_n(z)dz + \int_{\delta\leq|z|<\pi}(f(x+z)-f(x))D_n(z)dz = I_1+I_2;$$

studiamo separatamente i due integrali.

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leq|z|<\pi}\frac{f(x+z)-f(x)}{\sin(z/2)}\sin((n+1/2)z)dz \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

per il lemma di Riemann-Lebesgue, in quanto la funzione di cui stiamo calcolando i coefficienti di Fourier e' C^1 .

$$|I_1| \leq \int_{|z|<\delta}\underbrace{|f(x+z)-f(x)|}_{<\varepsilon}\cdot|D_n(z)|dz \leq \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}|D_n(z)|dz$$

per continuita' di f in un compatto (e dunque per uniforme continuita' di f). Dunque, se vediamo che l'integrale di $|D_n(z)|$ in un intorno di 0 rimane limitato per $n \to \infty$, allora avremmo che la serie di Fourier di f converge a f per ogni funzione f continua. Purtroppo pero' questo non e' vero.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(z)|dz = 2\int_0^{\pi} |D_n(z)|dz = 2\int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)z)|}{\sin(z/2)}dz \geq 4\int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)z)|}{z}dz =$$
$$= 2\pi\int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt \geq 2\pi\int_0^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt = 2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}dt \geq$$
$$\geq 2\pi\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{(k+1)\pi}dt = \frac{4\pi}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} = O(\ln(n)).$$

dove abbiamo usato che $\sin(z/2) > z/\pi \ \forall z \in (0, \pi)$.

Infatti Du Bois-Raymond costrui' una funzione $f \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $S_n(f, x)$ non converge a f per qualche x .

Lemma (6)

$f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Allora:

1. $|\widehat{f}_k - \widehat{g}_k| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|dx$;

1. $|S_n(f, x) - S_n(g, x)| \leq \frac{2n+1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|dx$.

Dimostrazione

1. Direttamente:

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx - \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}dx\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|dx.$$

1. Grazie al primo punto:

$$\left|\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}_k e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{g}_k e^{ikx}\right| \leq \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}_k - \widehat{g}_k| \leq (2n+1)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|dx.$$

Osservazione

Analogamente, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T}) \Rightarrow \widehat{f}_n \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$.

Osservazione

Se $\{c_n\} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, allora la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ converge a un certo $g(x) \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $c_n = \widehat{g}_n \ \forall n$. Infatti la serie converge assolutamente, e detto g il suo limite, si ha:

$$c_m = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\leq N}\int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{ikx}e^{-imx}dx \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-imx}dx = \widehat{g}_m.$$

A questo punto, l'idea per costruire un'approssimante $\forall f \in C^0(\mathbb{T})$ e' passare per la convergenza secondo Cesaro.

Proposizione

$\{a_n\} \in \mathbb{R}$ successione. Se $a_n \to L$ allora $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \to L$ (e a_n si dice sommabile secondo Cesaro).

Dimostrazione

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$ per $n > N$. Dunque:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k - L = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - L) \leq \frac{1}{n}\left|\sum_{k=0}^{N-1}(a_k - L)\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{k=N}^{n-1}(a_k - L)\right| \leq \frac{M}{n} + \frac{n\varepsilon}{n}$$

con M fissato, cioe' la tesi.

Definizione

Definiamo $\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f,x)$.

Osservazione

Con calcoli simili a quelli gia' fatti per $S_n(f,x)$, si ottiene:

$$\sigma_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(z)\right) dz.$$

Definizione (9)

Definiamo **nucleo di Fejer**:

$$\phi_n(z) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(z).$$

Proposizione (8)

Il nucleo di Fejer ha un'espressione esplicita:

$$\phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\left(\frac{n}{2}z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)}\right)^2.$$

Osservazione

- $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z) dz = 1$.
- $\phi_n(z) = \phi_n(-z)$, cioe'e' pari.

- $\phi_n(z) \geq 0$.
- $\forall \varepsilon, \delta > 0$, $\exists N$ tale che $\phi_n(z) < \varepsilon \ \forall z \notin [-\delta, \delta] \ \forall n > N$.

Infatti:

$$\phi_n(z) = \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{\sin\left(\frac{n}{2}z\right)}{\sin\left(\frac{z}{2}\right)} \right)^2 \leq \frac{1}{2\pi n} \frac{1}{(z/\pi)^2} \leq \frac{\pi}{2\delta^2} \frac{1}{n}$$

quando $z \in [\delta, \pi]$.

- $\phi_n(0) = O(n)$.

Teorema (10)

$f \in C^0(\mathbb{T})$. Allora $\sigma_n(f, x) \to f(x)$ uniformemente quando $n \to \infty$, cioe':

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_n(f, x) - f(x)| \to 0.$$

Dimostrazione

Spezziamo l'integrale:

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f, x) - f(x)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+z) - f(x)) \phi_n(z) dz \right| \leq \\ &\leq \underbrace{\left| \int_{|z|<\delta} (f(x+z) - f(x)) \phi_n(z) dz \right|}_{=I_1} + \underbrace{\left| \int_{\delta \leq |z| < \pi} (f(x+z) - f(x)) \phi_n(z) dz \right|}_{=I_2}. \end{aligned}$$

f e' continua in $|z| < \delta$ che e' un compatto, dunque e' uniformemente continua ed $\exists \varepsilon > 0$ tale che $f(x+z) - f(x) < \varepsilon$ per $z \in [-\delta, \delta]$. Dunque:

$$I_1 \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} |\phi_n(z)| dz \leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \phi_n(z) dz = \varepsilon,$$

mentre:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_{\delta \leq |z| < \pi} |f(x+z) - f(x)| \phi_n(z) dz \leq \int_{\delta \leq |z| < \pi} (|f(x+z)| + |f(x)|) \phi_n(z) dz \leq \\ &\leq 2 \int_{\delta \leq |z| < \pi} \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \phi_n(z) dz = 4 \int_{\delta}^{\pi} \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \phi_n(z) dz \leq 4 \|f\|_{\mathcal{L}^\infty} \frac{\pi^2}{2\delta^2} \frac{1}{n} < \varepsilon' \end{aligned}$$

per un certo ε' quando $n \to \infty$. Visto che la maggiorazione e' indipendente da x , si ha anche che la convergenza e' uniforme.

Definizione (11)

Una successione di funzioni $\{Q_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}\}$ si dice **successione di Dirac** se soddisfa le proprieta':

- $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(x)dx = 1$;
- $Q_n(-x) = Q_n(x)$;
- $Q_n \geq 0$;
- $\int_{\delta \leq |x|} Q_n(x)dx \to 0$ se $n \to \infty$ $\forall \delta > 0$.

Osservazione

In maniera del tutto analoga alla dimostrazione del teorema precedente, se $Q_n(x)$ e' una successione di Dirac, allora:

$$f * Q_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-z)Q_n(z)dz \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Osservazione

$\widehat{(f * g)}_n = \widehat{f}_n \cdot \widehat{g}_n$, infatti:

$$\widehat{f * g_n} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)g(y)dye^{-inx}dx = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-y)}{2\pi}e^{-in(x-y)} \cdot \frac{g(y)}{2\pi}e^{-iny}dxdy =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)e^{-inz}dz \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)e^{-iny}dy = \widehat{f}_n \cdot \widehat{g}_n.$$

Osservazione

$f * g = g * f$ facendo un cambio di variabili.

Osservazione

$\|f * g\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1} \cdot \|g\|_{\mathcal{L}^1}$.

Proposizione (9)

$f \in \mathcal{L}^1$, $g \in \mathcal{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$. Allora:

$$\|f * g\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1}\|g\|_{\mathcal{L}^p}.$$

Dimostrazione

Per $p = 1$ lo abbiamo gia' visto; inoltre per $p = \infty$ e' del tutto evidente. La funzione $y \mapsto \underbrace{|f(x-y)|}_{\in \mathcal{L}^1} \underbrace{|g(y)|^p}_{\in \mathcal{L}^1} \in \mathcal{L}^1$, quindi $|f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \in \mathcal{L}^p$. Se p' e' tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, abbiamo:

$$|f(x-y)g(y)| = \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}}_{\in \mathcal{L}^{p'}} \underbrace{|f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|}_{\in \mathcal{L}^p},$$

cioe', per la disuguaglianza di Holder:

$$|f * g(x)| \leq \int |f(x-y)g(y)| dy \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{\frac{1}{p'}} \left(\int |f(x-y)||g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dunque:

$$\int |f * g(x)|^p dx \leq \int \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{\frac{p}{p'}} \left(\int |f(x-y)||g(y)|^p dy \right) dx = \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{p-1} \iint |f(x-y)||g(y)|^p dx dy =$$
$$= \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{p-1} \|f\|_{\mathcal{L}^1} \int |g(y)|^p dy,$$

da cui la tesi estraendo la radice p -esima.

Osservazione

La formula per $\widehat{fg}_n$ e' molto piu' complicata, infatti:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_k \widehat{f}_k e^{ikx} \sum_l \widehat{g}_l e^{ilx} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k,l} \widehat{f}_k \widehat{g}_l e^{i(k+l)x} e^{-inx} dx,$$

dunque $\widehat{fg}_n = \widehat{c}_n$, dove $c = \sum_{k,l} \widehat{f}_k \widehat{g}_l e^{i(k+l)x}$. Ma c e' gia' scritta con la sua serie di Fourier, dunque il suo coefficiente di Fourier n -esimo non e' altro che:

$$\widehat{c}_n = \sum_{k+l=n} \widehat{f}_k \widehat{g}_l.$$

Si ottiene:

$$\widehat{fg}_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_k \widehat{g_{n-k}} =: \widehat{f}_k * \widehat{g}_k(n).$$

Enunciamo la seguente proposizione, che useremo spesso in seguito, ma di cui tralasciamo la dimostrazione:

Proposizione (10)

$f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ e $g \in \mathcal{L}_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$. Allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e:

$$D^\alpha(f * g)(x) = (D^\alpha f * g)(x).$$

Proposizione (11)

Si ha:

$$\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}_k e^{ikx}.$$

Proposizione (12)

Sia $f \in C^0(\mathbb{T})$ tale che $\widehat{f}_k = 0 \ \forall k$. Allora $f \equiv 0$.
Dimostrazione

Per quanto visto, la successione:

$$\sigma_n(f,x) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \underbrace{\widehat{f}_k}_{=0} e^{ikx} \rightrightarrows f,$$

dunque $0 \rightrightarrows f$, cioe' $f \equiv 0$.
Teorema (12)

$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$. Allora:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f,x) - f(x)| dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dimostrazione

Per il teorema di Lusin, $\exists g_\varepsilon \in C_0^0(\mathbb{T})$ tale che $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon$. Scrivendo $\sigma_n(f,x) - f(x) = \sigma_n(f - g_\varepsilon, x) + \sigma_n(g_\varepsilon, x) - g_\varepsilon(x) + g_\varepsilon(x) - f(x)$, si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f,x) - f(x)| dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f - g_\varepsilon, x)| dx + \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|\sigma_n(g_\varepsilon, x) - g_\varepsilon(x)|}_{\to 0} dx + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} |g_\varepsilon(x) - f(x)| dx}_{<\varepsilon} .$$

Inoltre, visto che $\sigma_n(f - g_\varepsilon, x) = ((f - g_\varepsilon) * \phi_n)(x)$ e $\|\varphi * \psi\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{L}^1} \|\psi\|_{\mathcal{L}^1}$, si conclude che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f - g_\varepsilon, x)| dx = \|(f - g_\varepsilon) * \phi_n\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f - g_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^1} \|\phi_n\|_{\mathcal{L}^1} < \varepsilon.$$

Corollario (13)

$f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{T})$ tale che $\widehat{f}_k = 0 \ \forall k$. Allora $f \equiv 0$ quasi ovunque.

Dimostrazione

Per il teorema precedente si ha che $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$, cioe' $f \equiv 0$ quasi ovunque.

Osservazione

Prendiamo $\{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ e consideriamo le somme parziali $S_n(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$. La successione $\{S_n(x)\} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ e' di Cauchy, in quanto:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_N(x) - S_M(x)|^2 dx \leq \sum_{M \leq |k| \leq N} |c_k|^2 < \varepsilon,$$

poiche' $\sum_{M \leq |k| \leq N} |c_k|^2$ e' la coda di una serie convergente. Ma $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ e' completo, dunque $\exists f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ tale che:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_n(x) - f(x)|^2 dx \longrightarrow 0.$$

Proposizione (14 Identit\'a di Parseval)

Sia $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx}$ con $\{\widehat{f}_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (in modo che l'uguaglianza precedente sia giustificata). Allora vale l'uguaglianza:

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_n|^2.$$

Dimostrazione

Con facili calcoli:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{inx} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}_k} e^{-ikx} dx = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_n \overline{\widehat{f}_n} = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}_n|^2.$$

Proposizione (15)

C curva chiusa, semplice e C^1 . Allora l'area della zona interna a C e' massima quando C e' la circonferenza.

Dimostrazione

Sia $C : \alpha(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, 2\pi)$, α PLA. Scrivendo x e y in serie di Fourier:

$$x(s) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(ns) + B_n \sin(ns), \quad y(s) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(ns) + D_n \sin(ns)$$

e:

$$x'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} -nA_n \sin(ns) + nB_n \cos(ns), \quad y'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} -nC_n \sin(ns) + nD_n \cos(ns)$$

Per Gauss Green, l'area delimitata $\mathcal{A}$ puo' essere calcolata come:

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi} x(s)y'(s) = \int_0^{2\pi} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(ns) + B_n \sin(ns) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} -nC_n \sin(ns) + nD_n \cos(ns) \right) =$$
$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n D_n - B_n C_n).$$

Ma la curva e' PLA, quindi per Parseval:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x'(s))^2 + (y'(s))^2 ds = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2).$$

A questo punto:

$$\pi - \mathcal{A} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2) - \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(A_n D_n - B_n C_n) =$$
$$= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - n)(A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2) + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n[(A_n - D_n)^2 + (B_n - C_n)^2].$$

Per massimizzare l'area si deve minimizzare il termine di destra, quindi $A_n = D_n$, $B_n = C_n$ $\forall n$ e $A_n = B_n = C_n = D_n = 0$ per $n > 1$; si ottiene:

$$\alpha(s) = (A_0 + A_1 \cos(s) + B_1 \sin(s), C_0 + B_1 \cos(s) + A_1 \sin(s)).$$

Ma α e' PLA, quindi si ricava $A_1^2 + B_1^2 = 1$, cioe' $A_1 = \cos(\theta)$ e $B_1 = \sin(\theta)$; per le formule di addizione del seno e coseno si arriva a:

$$\alpha(s) = (A_0 + \cos(s - \theta), C_0 + \sin(s - \theta)),$$

cioe' la tesi.

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Utente:Lcberselli/Analisi 3/Analisi 3/Convergenza di serie di Fourier** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ALcberselli/Analisi_3/Analisi_3/Convergenza_di_serie_di_Fourier?oldid=47841 *Contributori:* Toma.luca95, V.e.padulano e WikiToBot

1.2 Immagini

1.3 Licenza dell'opera