Misura e integrale di Lebesgue

7 dicembre 2021

Indice

1 Misura di Lebesgue **1**

1.1 Il problema di fondo: dove Riemann fallisce . . . 1

1.2 Elementi fondamentali, misura di Lebesgue . . . 2

1.3 Proprietà della misura di Lebesgue . . . 4

1.4 Insieme di Cantor, insiemi illimitati . . . 7

1.4.1 Insieme di Cantor . . . 7

1.4.2 Misura di insiemi prodotto, insiemi illimitati . . . 8

1.4.3 Spazi di misura . . . 8

2 Integrale secondo Lebesgue **10**

2.1 Dalla funzione semplice alle funzioni misurabili: il capovolgimento di pensiero . . . 10

2.2 Integrale di Lebesgue e proprietà . . . 12

2.3 Spazio delle funzioni sommabili a potenza 2 . . . 13

2.4 Passaggio al limite e derivazione sotto il segno di integrale . . . 18

2.4.1 Integrale di limiti . . . 18

2.4.2 Derivabilità sotto il segno di integrale . . . 20

3 Fonti per testo e immagini; autori; licenze **21**

3.1 Testo . . . 21

3.2 Immagini . . . 22

3.3 Licenza dell'opera . . . 22

Capitolo 1

Misura di Lebesgue

1.1 Il problema di fondo: dove Riemann fallisce

La teoria dell'integrazione che viene solitamente studiata nei corsi di analisi si attribuisce a Bernhard Riemann, e risale alla metà del XIX secolo. Questa teoria fu il primo tentativo, ben riuscito, di formalizzare in una teoria matematica il calcolo di aree sottese da curve o funzioni, e si basa, essenzialmente, sul *concetto di rettangolo*: costruita una partizione dell'intervallo, l'integrale di una funzione sullo stesso intervallo viene considerato come il limite, al crescere delle partizioni, della somma dell'area dei rettangoli. In sintesi, per dirla in maniera più spicciola, l'integrale di Riemann non è altro che una somma di rettangoli.

Tuttavia, in ogni corso di analisi che si rispetti, si cerca di porre l'attenzione dove questa teoria non funziona. Infatti, come primo tentativo di integrazione, Riemann è *soddisfacente*, nel senso che permette di calcolare l'area di un'ampia gamma di funzioni. Tuttavia, quest'ampia gamma si scopre poi essere non proprio così ampia: infatti, tra queste, alcune danno particolarmente fastidio a Riemann, e sono quelle troppo discontinue. Ma non bisogna uscire dalle funzioni continue per trovarne una non integrabile: ricordiamo che $f(x) = \log x$ non risulta integrale nell'intervallo $[0, 1]$, perché il limite è infinito e la definizione di Riemann *impone la finitezza dell'area*. Insomma, un bello strumento, ma decisamente da raffinare.

La teoria di Henri Lebesgue, invece, risale ai primi anni del XX secolo, è quindi una teoria più moderna, e amplia di molto le funzioni di cui è possibile calcolare l'integrale. L'intuizione che sta alla base della teoria la approfondiremo in seguito, ora accenniamo solo che a Lebesgue non importa se una funzione è integrabile, importa **il resto dell'insieme**, ovvero la contro-immagine di $f(x)$. È una teoria abbastanza interessante, e tra i risultati più importanti c'è quello di poter integrare la funzione di Dirichlet $D(x)$:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Questa, come sappiamo, non è integrabile secondo Riemann (è infatti *troppo* discontinua): Lebesgue riesce a integrarla e a misurarne l'area. Anche se può sembrare come poter costruire una casa nel cielo.

1.2 Elementi fondamentali, misura di Lebesgue

Prima di poter parlare di integrale, misure e cosare robe con questi strumenti, abbiamo bisogno di costruire una *teoria della misura* che possa essere ritenuta tale. In questo capitolo daremo tante definizioni e inizieremo a parlare di misure di insiemi, discutendo ogni punto per renderlo il più chiaro possibile. Iniziamo da una definizione che **non è** una definizione (attenzione a questo punto, non è davvero una definizione).

Definizione

In questo corso parleremo di misura; per quanto ci riguarda, necessitiamo di *poter operare* con l'infinito, quindi chiameremo **retta estesa** quella in cui $+\infty$ è considerato *al pari* di un numero. Questo vuol dire che:

- una funzione può assumere valore $+\infty$ in qualche suo punto, non solo tenderci;
- degli insiemi possono avere misura infinita.
- è corretto scrivere un intervallo (per esempio la semiretta positiva) come $[0, +\infty]$

Il termine ∞ ha delle belle proprietà; la prima è che questo è maggiore di ogni altro numero reale scrivibile in altra forma diversa da ∞ . Le operazione con l'infinito sono le seguenti:

- $a + \infty = \infty$
- $\infty - b = \infty$
- $-a \cdot \infty = -\infty$
- $\frac{\infty}{a} = \infty$
- $\frac{a}{\infty} = 0$
- $\frac{\infty}{-b} = -\infty$
- $0 \cdot \infty = 0$

Poniamo attenzione all'ultima espressione. $0 \cdot \infty = 0$ resta *non vero* quando si parla di cose che tendono 0 o ∞ , ovvero nelle espressioni di limite è ancora una forma indeterminata. Questa espressione è quindi vera quando i valori 0 e ∞ sono **fissati** e valgono esattamente quello che valgono, non tendono a quel valore.

Già con la prima definizione abbia fatto terra bruciata dietro di noi: non dobbiamo dimenticare tutto ciò che abbiamo imparato finora, ma qualcosa deve pur cambiare. Questo non rientrava tra gli elementi utili alla misura, o meglio, non subito; iniziamo con gli iperrettangoli.

Definizione

Chiameremo **iperrettangolo** un insieme del tipo:

$$I = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \subseteq \mathbb{R}^n$$

Un iperrettangolo non è altro che la moltiplicazione di intervalli; in dimensione uno, ovvero in $\mathbb{R}$, questo è semplicemente un intervallo; in $\mathbb{R}^2$ sarà un rettangolo, in $\mathbb{R}^3$ un parallelepipedo e così via. La misura dell'intervallo $[a_1, b_i]$ è ovviamente $|b_i - a_i|$.

Definizione

Si definisce **plurirettangolo** l'unione di più rettangoli *disgiunti*:

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} I_i \quad \text{con } I_i \cap I_j = \varnothing \ \text{ se } i \neq j$$

Su questo non c'è da discutere molto: presi tanti iperrettangoli, la loro unione è chiamata plurirettangolo. Poiché la misura di un rettangolo la conosciamo (base per altezza), possiamo definire la misura dell'iperrettangolo.

Definizione

Si definisce la **misura dell'iperrettangolo**:

$$m(I) = \prod_{I=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Così come il rettangolo e per il parallelepipedo si misurano moltiplicando le dimensioni, nel caso generale di un iperrettangolo la regola non varia. Siamo adesso pronti per iniziare a definire quelli che, secondo la teoria di Lebesgue, sono insiemi misurabili. Da adesso in poi, tranne dove specificato, per *misura* intenderemo sempre **misura secondo Lebesgue**.

Definizione

Siano A un insieme aperto e K un compatto, con $A, K \subseteq \mathbb{R}^n$. Si definiscono le misure dei due tipi di insieme:

$$m(A) = \sup\{m(Y) : Y \text{ plurirettangolo}, Y \subseteq A\}$$
$$m(K) = \inf\{m(Y) : Y \text{ plurirettangolo}, Y \supseteq K\}$$

Questo ci inizia a dire qualcosa di importante: tutti gli insiemi aperti e compatti sono misurabili secondo Lebesgue, e la loro misura si approssima con quella del plurirettangolo contenuto nell'aperto o che contiene il compatto. Notiamo come la misura di un aperto può essere $m(A) = +\infty$, mentre quella di un compatto può essere $m(K) = 0$. Ora definiamo la misura interna ed esterna di un insieme, a partire proprio da questo.

Definizione

Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si definiscono **misura interna e esterna** di E secondo Lebesgue:

$$\overline{m}(E) = \inf\{m(A),\ A \text{ aperto}, A \supseteq E\}$$
$$\underline{m}(E) = \sup\{m(K),\ K \text{ compatto}, K \subseteq E\}$$

Osserviamo immediatamente che $\forall E \subseteq \mathbb{R}^n$ vale $\underline{m}(E) \leq \overline{m}(E)$. Ora, detto questo, possiamo finalmente parlare di insiemi misurabili. Date le misure interna ed esterna di un insieme, è logico pensare che, quando queste coincidono, abbiamo a che fare esattamente con la misura di quell'insieme, più o meno come l'area delle partizioni inferiori e superiori per Riemann.

Definizione

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **misurabile secondo Lebesgue** se la sua misura interna coincide con l'esterna, ovvero:

$$m(E) = \overline{m}(E) = \underline{m}(E)$$

A volte, indicheremo con $m_n(E)$ la misura *n-dimensionale* di Lebesgue.

A proposito di insiemi misurabili, resta comodo sapere come e quando riconoscere un insieme misurabile da uno non misurabile. Il seguente teorema ci assicura la "misurabilità" di un insieme; non ne forniremo una dimostrazione.

Teorema

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile **se e solo se** per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $A_\varepsilon, K_\varepsilon$ aperto e compatto tali che:

$$|m(A_\varepsilon) - m(K_\varepsilon)| < \varepsilon$$

Ovvero un insieme sarà misurabile se esisteranno un aperto e un compatto tali che la differenza tra le loro misure è arbitrariamente piccola, ovvero coincide. Abbiamo appena dato una rigorosa definizione di misura, ora non resta che vederne le proprietà.

1.3 Proprietà della misura di Lebesgue

Parliamo delle proprietà della misura che abbiamo discusso finora. La prima proprietà fondamentale della misura di Lebesgue è che, presi $e_1, \cdots, E_n \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi **numerabili** a due a due disgiunti, ovvero che $E_i \cap E_j = \varnothing$ se $i \neq j$, allora, posto:

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

Si ha che E **è misurabile** e vale

$$m(E) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i)$$

Questa proprietà è molto interessante. Poiché possiamo considerare qualsiasi insieme come somma di insiemi disgiunti, la misura di quell'insieme, se è unione di un'infinità **numerabile** di insiemi, sarà esattamente la somma delle misure degli insiemi. Questo già può iniziare a far capire qualcosa ai più scaltri, ma ci arriveremo con calma.

Procediamo ora col dimostrare il primo teorema importante.

Teorema

Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi misurabili. Allora sono misurabili anche gli insiemi $E \cup F$, $E \cap F$ e $E \setminus F$.

Dimostrazione

Iniziamo col dimostrare che $E \setminus F$ è misurabile. Questo vuol dire che, per il teorema visto nel precedente capitolo, deve essere $\forall \varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}&\exists A, A' \text{ aperti, } K, K' \text{ compatti tali che:}\\ &K \subseteq E \subseteq A \quad m(A \setminus K) < \varepsilon\\ &K' \subseteq F \subseteq A' \quad m(A' \setminus K') < \varepsilon\end{aligned}$$

Allora costruisco due insiemi misurabili così definiti:

$$\begin{aligned}B &= (A \setminus K') \quad \text{aperto, che contiene } (E \setminus F)\\ C &= (K \setminus A') \quad \text{compatto, che e' contenuto in } (E \setminus F)\end{aligned}$$

Poiché B e C sono un aperto e un compatto contenente e contenuto in $E \setminus F$, se la loro differenza misura $m(B \setminus C) < \varepsilon$, anche $E \setminus F$ lo sarà. Posso scrivere:

$$\begin{aligned}&(B \setminus C) \subseteq (A \setminus K) \cup (A' \setminus K')\\ &m(B \setminus C) \leq m(A \setminus K) + m(A' \setminus K')\end{aligned}$$

Gli insiemi nella prima espressione sono tutti *aperti*, quindi sono misurabili secondo Lebesgue. Quindi è valida la seconda espressione. Le due misure valgono entrambe ε , quindi otteniamo che:

$$m(B \setminus C) \leq 2\varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di ε , otteniamo che $(E \setminus F)$ è **misurabile**.

Per dimostrare che anche $E \cup F$ e $E \cap F$ sono misurabili, per la teoria degli insiemi possiamo scriverli come:

$$\begin{aligned}E \cup F &= (E \setminus F) \cup F\\ E \cap F &= E \setminus (E \setminus F)\end{aligned}$$

Poiché sono tutte operazioni tra insiemi misurabili, e sappiamo che queste operazioni non mutano la misurabilità di un insieme, possiamo concludere che tutti questi insiemi sono misurabili.

Questo primo teorema ha ampliato ancora di più l'insieme degli insiemi misurabili secondo Lebesgue. Tuttavia, la potenza della misura di Lebesgue sta nelle prossime due proprietà, che sono la subadditività el'additività della misura.

Teorema (Sub-additività numerabile della misura di Lebesgue)

Sia $\{E_i\}$ una collezione **numerabile** di insiemi misurabili in $\mathbb{R}^n$. Posto $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, questo è misurabile; supponendo sia $\overline{m}(E) < +\infty$, vale:

$$m(E) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} E_i$$

Inoltre, se gli insiemi considerati sono inclusivi, cioè $E_i \subseteq E_{i+1}$, vale:

$$m(E) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)$$

Questo vuol dire che, se l'insieme che vogliamo misurare è l'unione di una quantità *numerabile* di sottoinsiemi, la sua misura sarà minore o al più uguale alla somma delle misure dei sottoinsiemi. Questo perché può anche capitare che ci siano parti di insieme in comune, ovvero che l'unione tra due sottoinsiemi non sia sempre vuota, e quindi la somma dei sottoinsiemi risulta maggiore dell'insieme unione. Inoltre, questo ci dice che, se conosciamo la misura dei sottoinsiemi, possiamo maggiorare la misura dell'insieme unione. L'ipotesi di numerabilità è fondamentale: se ciò non fosse possibile, non avrebbe senso parlare di sommatoria.

Teorema (Additività numerabile della misura di Lebesgue)

Siano $\{E_i\}$ una collezione **numerabile** di insiemi **disgiunti a due a due** misurabili, ovvero:

$$E_i \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{con } e_i \cap E_j = \varnothing \quad \text{se } i \neq j$$

Allora, posto $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, questo è misurabile e vale:

$$m(E) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$$

Questa proprietà ha una **conseguenza fondamentale**. Consideriamo $E_1, E_2, \cdot E_n$ un'infinità numerabile di insiemi aventi tutti **misura nulla**; la loro unione sarà quindi un insieme **di misura nulla**. Vi suggerisce qualcosa?

Sappiamo che un punto, ente primitivo adimensionale, ha misura **nulla**. Segue che, ogni insieme numerabile contenente punti ha anch'esso misura nulla. Consideriamo la funzione di Dirichlet:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

L'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ sappiamo essere **numerabile**; questo è un'unione numerabile di punti, e la cosa vale anche nell'intervallo dei reali $[0, 1]$. Per la teoria di Lebesgue vale $m(\mathbb{Q}) = 0$. Questo ci indica che la funzione di Dirichlet potrà essere integrabile e che quindi avrà integrale nullo. Lo vedremo meglio in seguito.

La conseguenza dell'additività numerabile ci dice anche che $m(\mathbb{N}) = m(\mathbb{Z}) = m(\mathbb{Q}) = 0$. Possiamo già dire che $m(\mathbb{R}) = +\infty$, questo indica che $m(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = +\infty$. In parole povere, ciò che fa misurare l'insieme dei reali ∞ sono gli irrazionali trascendenti, come e , π o $\sin 1$. Intrippante, eh?

Chiudiamo il capitolo con un'osservazione banale: se $F \subseteq E \subseteq \mathbb{R}^n$ qualunque, e si ha $m(E) = 0$, allora segue $m(F) = 0$.

1.4 Insieme di Cantor, insiemi illimitati

Questo capitolo, molto a sè nell'organismo generale del corso, tratterà di un argomento strano, per poi passare alla misura di intervalli illimitati. Poiché il corso non è impostato per essere un approfondimento della teoria di Lebesgue, altre volte ci prenderemo la libertà di introdurre capitoli in cui sospenderemo la trattazione per parlare di argomenti concernenti la misura, ma non proprio interni alla teoria della misura.

1.4.1 Insieme di Cantor

L'**insieme di Cantor** è un insieme notevole in matematica, poiché descrive il comportamento di una larga classe di funzioni note come **frattali**. La sua definizione parte da quelle che comunemente viene chiamata *suddivisione ternaria*. Come insieme da rappresentare, in realtà, fa un po' schifo.

Per costruire l'insieme di Cantor partiamo dall'intervallo sull'asse dei reali $[0, 1]$. Questo insieme lo chiameremo C_0 . Adesso, dividiamo in tre l'intervallo, e buttiamo via il pezzo centrale: otteniamo l'insieme $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Questo lo chiameremo C_1 . Iteriamo il processo all'infinito, dividendo in tre parti gli insiemi ottenuti e buttando via la parte centrale, costruendo degli insiemi così definiti:

$$
\begin{aligned}
&C_0 = [0, 1] \\
&C_1 = [0, 1] \setminus \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3} C_0 \right\} \\
&C_2 = C_1 \setminus \bigcup_{j=0}^{1} \left\{ \frac{1 + 3j}{3^2} + \frac{1}{3} C_1 \right\} \\
&\vdots \\
&C_{k+1} = C_k \setminus \bigcup_{j=0}^{k} \left\{ \frac{1 + 3j}{3^k} + \frac{1}{3} c_k \right\}
\end{aligned}
$$

L'insieme di Cantor è definito come:

$$
C_{\mathrm{C}} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k
$$

Nell'immagine qui sotto vediamo le prime iterazioni dell'insieme di Cantor:

Cosa possiamo dire sull'insieme di Cantor? La prima cosa evidente è che *non è per nulla* un connesso, anzi, si dimostra che è totalmente disconnesso. Tuttavia, l'insieme di Cantor è un **compatto**, e sappiamo che i compatti sono misurabili nella teoria di Lebesgue. Possiamo quindi chiederci quanto misura o, meglio, se i suoi elementi sono numerabili, così da ricondurci a un caso simile ai razionali. Non possiamo purtroppo applicare l'additività della misura perché l'insieme di Cantor è **non numerabile**, addirittura si può dimostrare che contiene tanti punti quanti ce ne sono in $[0,1]$. Nonostante ciò, risulta, come intuitivamente si può pensare, $m(C_{\mathrm{C}}) = 0$; questo risultato può essere anche visto come $m(C_{\mathrm{C}}) = \lim_{k\to\infty} m(C_k)$.

1.4.2 Misura di insiemi prodotto, insiemi illimitati

Misurare insiemi illimitati può risultare difficile, o, almeno, non intuitivamente semplice, date le definizioni utilizzate finora. Tuttavia, Lebesgue aggira il problema in maniera molto tranquilla.

Definizione

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme *illimitato*. Diremo che E è **misurabile** se, per ogni $r > 0$, l'insieme $E \cap B(0,r)$ è misurabile, ovvero:

$$\underline{m}\big(E \cap B(0,r)\big) = \overline{m}\big(E \cap B(0,r)\big) \quad \forall r > 0$$

La misura di Lebesgue di insiemi illimitati si riconduce quindi alla misura della palla centrata nell'origine con raggio qualsiasi, positivo.

Definizione (Misura prodotto)

Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $F \subseteq \mathbb{R}^k$ due insiemi misurabili. Allora l'insieme $E \times F \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ è **misurabile** e vale:

$$m_{n+k}(E \times F) = M_n(E) \cdot m_k(F)$$

1.4.3 Spazi di misura

Finora abbiamo sempre operato nell'insieme $\mathbb{R}^n$, considerando suoi sottinsiemi e definendo l'insieme $\mathcal{M}$, che include tutti gli insiemi *misurabili secondo Lebesgue*, a cui abbiamo quindi applicato la misura di Lebesgue indicata con m . Lo spazio così costruito, che si indica con:

$$\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m\big) \quad \text{Spazio di misura}$$

Dove:

- $\mathbb{R}^n$ è l'insieme ambiente;
- $\mathcal{M}$ è l'insieme degli insiemi misurabili;
- m è la misura utilizzata, nel nostro caso quella di Lebesgue.

In particolare, il nostro spazio di misura così costruito, include $\mathcal{M}$, l'insieme dei misurabili; in questo sono inclusi **tutti gli aperti**: un insieme che contiene tutti gli aperti viene chiamato **σ-algebra**, e ha buone proprietà topologiche in matematica.

Lo spazio di misura in cui ci muoviamo, e continueremo a muoverci in tutto il corso, non è l'unico possibile; già sostituendo la misura di Lebesgue con la classica misura di Jordan-Peano, si ottiene uno spazio di misura notevolmente diverso. Parlando di misure, però, ce ne sono diverse da poter prendere in considerazione; ad esempio, la famosa **delta di Dirac** non è altro che una misura, così definita:

$$\delta_p(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in E \\ 0 & \text{se } p \notin E \end{cases}$$

È facile dimostrare che rispetta tutte le proprietà di una misura, e valgono anche la sub-additività e l'additività numerabile.

Un altro esempio particolare di misura è la **probabilità di un evento** di verificarsi: definita nell'intervallo $[0,1]$, posti:

$$\begin{aligned} &m(\varnothing) = 0 \\ &m([0,1]) = 1 \end{aligned}$$

Si definisce una funzione $p(x)$ chiamata **distribuzione di probabilità**:

$$p(E) = \int_E p(x)dx$$

Dove E indica l'evento, che quindi viene visto come **un sottoinsieme di <mah>[0,1]</math>**. Valgono quindi:

$$\begin{aligned} &m(\varnothing) = p(\varnothing) = 0 \\ &m([0,1]) = p([0,1]) = \int_{[0,1]} p(x)dx = 1 \end{aligned}$$

L'integrale considerato è **quello di Lebesgue**! Lo spazio di misura in cui si opera la probabilità è quindi $\big([0,1], \mathcal{M}, m\big)$, ovvero null'altro che una restrizione dello spazio di misura in cui ci muoviamo.

Capitolo 2

Integrale secondo Lebesgue

2.1 Dalla funzione semplice alle funzioni misurabili: il capovolgimento di pensiero

La teoria della misura che abbiamo costruito finora è molto soddisfacente: abbiamo ottenuto uno spazio di misura che è addirittura una σ-algebra, quindi non potevamo chiedere di meglio. Non resta però che fare il passo successivo e arrivare a calcolare l'area di superfici delimitate da funzioni, ovvero gli **integrali**. Con calma, procediamo in questa direzione, introducendo anche l'intuizione che ha permesso a Lebesgue di cambiare punto di vista sulle aree sottese dalle funzioni.

Procedendo gradualmente, iniziamo a vedere delle funzioni *semplici da integrare*.

Definizione (Funzione semplice)

Siano $\{\alpha_i\} \in \mathbb{R}$, con $i = 1, \cdots, N$ coefficienti reali; siano inoltre $\{E_i\} \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi misurabili disgiunti a due a due, tali che $E_i \cap E_j = \varnothing \, \forall \, i \neq j$. Chiameremo **funzione semplice**:

$$s(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$$

Dove $\chi_{E_i}(x)$ è la funzione caratteristica definita come:

$$\chi_{E_i} = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Una funzione semplice, quindi, non è altro che la somma, o l'unione, di più funzioni caratteristiche (moltiplicate per un coefficiente reale). Poiché, quindi, la funzione semplice non è altro che unione di costanti, è facile calcolarne l'integrale: sarà, semplicemente, la somma dei rettangoli formati dalle varie funzioni caratteristiche di cui è formata.

Definizione (Integrale della funzione semplice)

Si definisce **integrale secondo Lebesgue della funzione semplice**:

$$\int_{\mathbb{R}^n} s(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i m(E_i)$$

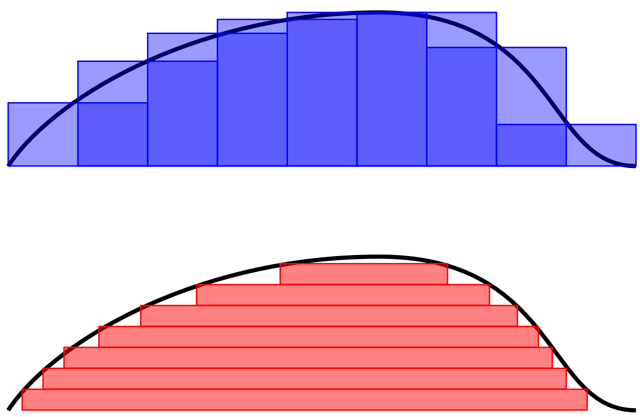
Detto questo, possiamo finalmente **calcolare l'integrale della funzione di Dirichlet**; essendo definita come:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Risulta essere quindi $D(x) = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$, ovvero la funzione caratteristica nell'intervallo $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Vale allora:

$$\int_{\mathbb{R}^n} D(x)dx = \int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)dx = \sum 0 = 0$$

Le funzioni semplici, nella teoria di Lebesgue, hanno la notevole rilevanza di essere *gli approssimatori* delle funzioni, nel calcolo dell'integrale. Intendiamo dire che, mentre Riemann approssimava le aree tramite rettangoli, Lebesgue lo fa tramite le funzioni semplici. Nella seguente immagine si confrontano le due intuizioni.



In blu l'intuizione di Riemann, in rosso la teoria di Lebesgue

Inoltre, la potenza dell'integrale di Lebesgue sta anche nel fatto **che le aree possono essere infinite**, esattamente come le misure di insiemi; infatti, le aree sottese da curve non sono altro che sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, e un insieme può avere misura infinita, quindi anche l'integrale di una funzione può risultare essere $+\infty$. Quindi, se l'insieme sotteso da una curva è misurabile, vuol dire che la curva lo è. Lebesgue non parla proprio in questi termini.

Definizione (Funzione misurabile)

Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione reale, con $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme reale misurabile. Diremo che f **è misurabile** se e solo se, *per ogni* A *aperto di* $\mathbb{R}^n$, vale:

$$f^{-1}(A) \text{ è misurabile in } \mathbb{R}^n \quad \forall\, A \subseteq \mathbb{R}^n \text{ aperto}$$

Poniamo attenzione a questa definizione e notiamo subito una cosa: poiché la controimmagine di una funzione *continua* su un aperto **è ancora un aperto**, ed è misurabile, risulta che **tutte le funzioni continue sono misurabili**. Ovviamente, l'insieme delle funzioni misurabili non si restringe solo alle continue: notiamo che anche le funzioni semplici escono fuori dall'insieme delle funzioni continue. Ora che abbiamo definito quali funzioni sono misurabili, non resta che definire l'integrale di Lebesgue.

2.2 Integrale di Lebesgue e proprietà

Definizione (Integrale di Lebesgue)

Suppponiamo $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme misurabile; consideriamo la funzione $f : E \to \mathbb{R}$ *misurabile*. Assumiamo che la funzione **abbia solo valori positivi**, ovvero sia $f : E \to [0, +\infty]$. Definiamo **integrale secondo Lebesgue**:

$$\int_E f(x)dx = \sup_{\begin{Bmatrix} s \text{ } semplice \\ s(x) \leq f(x) \end{Bmatrix}} \int_E s(x)dx$$

Inoltre, se $\sup \int_E s(x)dx < +\infty$ si dice che $f(x)$ è **sommabile**.

In sintesi, la definizione rappresenta l'intuizione già spiegata nel capitolo precedente con l'immagine: mentre Riemann approssimava dal basso e dall'alto l'area con dei rettangoli, andando poi al limite, Lebesgue approssima **senza passare al limite** l'area con l'area della funzione semplice più simile a quella. La mancanza del limite è un grandissimo passo avanti.

Come già detto, le funzioni integrabili secondo Lebesgue sono tantissime, e sforano lo spazio delle funzioni continue. Tuttavia, le funzioni *sommabili*, ovvero quelle di integrale limitato, sono un po' meno: ad esempio, $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua in $(0, 1)$, è integrabile, vale $\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty$ e quindi **non è sommabile**. Parleremo dello spazio delle funzioni sommabile nel prossimo capitolo.

In questo ci soffermeremo a parlare delle proprietà dell'integrale di Lebesgue. Nella sua dissertazione, Lebesgue espose la sua teoria della misura, presentando l'integrale ed elencando le sei proprietà che questo rispetta. Sono le seguenti.

1. Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$, allora $\int_e f(x)dx \leq \int_E g(x)dx$;
2. Se $A \subseteq E$, allora $\int_A f(x)dx \leq \int_E f(x)dx$, con $f(x) \geq 0$;
3. Linearità: $\int_E [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_E f(x)dx + \beta \int_E g(x)dx$;
4. Se $f(x) = 0\, \forall\, x \in E$, allora $\int_E f(x)dx = 0$, anche se $m(E) = +\infty$;
5. Se $m(E) = 0$, allora $\int_e f(x)dx = 0$, anche se $f(x) = +\infty\, \forall\, x \in E$;

6. Se $\Omega \subseteq E$, si ha $\int_\Omega f(x)dx = \int_E f(x)\chi_\Omega(x)dx$

Le proprietà $4, 5$ rispecchiano il fatto che $0 \cdot \infty = 0$; inoltre, la 5 ci indica che la misura di una retta è 0 . Quindi, se prendiamo la funzione costante $f(x) = 1$ nell'intervallo $[0, 1]$, e mandiamo *un insieme numerabile* di punti all'infinito, l'integrale **resterà sempre** 1 .

2.3 Spazio delle funzioni sommabili a potenza 2

Nota iniziale In questo capitolo consideriamo nota la **norma del sup essenziale** definita come:

$$\|f(x) - g(x)\|_\infty = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|_n$$

Dove le funzioni $f(x), g(x)$ sono due funzioni continue definite su un compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$; il modulo $|\cdot|_n$ è il modulo in $\mathbb{R}^n$

Questo è un capitolo abbastanza strano in questo corso. Le cose potranno sembrare messe a caso, e forse un po' lo sono. Vediamo cosa ne viene fuori.

Iniziamo partendo da una proprietà *nascosta* degli integrali, ovvero che non è ne immediata, ne facilmente individuabile. Consideriamo una successione di funzioni $f_n(x) = x^n$, con $x \in [0, 1]$ e $n \in \mathbb{N}$. Abbiamo che:

$$f_n(x) \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Questo vuol dire che $f_n \not\rightarrow f_\infty$ nello spazio delle funzioni continue $C^0[0, 1]$, ovvero che la successione di funzioni *continue* tende a una funzione che **non è continua**. Tuttavia, gli integrali hanno uno strano comportamento in questo caso. Il teorema seguente rientra nella teoria di Riemann per l'integrazione; poiché la teoria di Lebesgue è una generalizzazione, vale anche per l'integrale di Lebesgue.

Teorema

Se $f_n \to f_0$ nello spazio $C^0[0, 1]$, ovvero vale $\|f_n - f_0\|_\infty \to 0$, allora:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 f_o(x)dx$$

Ovvero **l'integrale è un'applicazione continua sullo spazio delle funzioni continue**.

Dimostrazione

Quello che ci stiamo chiedendo è se è vera la tesi:

$$\int_0^1 \big(f_n(x) - f_0(x)\big)dx \to 0$$

Facciamo delle maggiorazioni:

$$\int_0^1 |f_n(x) - f_0(x)|dx \to 0 \geq \left| \int_0^1 \big(f_n(x) - f_0(x)\big)dx \right| \geq 0$$

Ma il maggiore di questi termini:

$\int_0^1 |f_n(x) - f_0(x)|dx \to 0 \leq \int_0^1 \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_0(x)|dx = \|f_n - f_0\|_\infty \int_0^1 dx \leq \|f_n(x) - f_0(x)\|_\infty \to 0$

Quindi è vera la tesi.

Iniziamo ora a parlare dello spazio $C^0[0,1]$ ovvero dell'insieme delle funzioni continue nell'intervallo $[0,1]$. Su questo spazio possiamo dire un paio di cose:

1. è uno **spazio vettoriale**, è valida la linearità, la somma di due funzioni continue *resta* una funzione continua, esiste l'elemento neutro (che è lo 0) ed esiste l'inverso di ogni funzioni continua tale che $f(x) \cdot f^{-1}(x) = 1$.
2. si può definire una norma, e scegliamo proprio la **norma del sup essenziale** presentata a inizio capitolo.

Ci possiamo chiedere qual è la dimensione di questo spazio; si dimostra che esistono *infinite* funzioni continue linearmente indipendenti, e quindi la dimensione è proprio $dim\big(C^0[0,1]\big) = +\infty$.

Dette queste poche cose sullo spazio $C^0[0,1]$, si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema

L'insieme $\big(C^0, \|\cdot\|_\infty\big)$ è uno **spazio di Banach** (ovvero uno spazio metrico completo).

Ora, gli spazi di Banach sono belli e carini, ma in realtà noi vorremmo avere uno **spazio di Hilbert**, ovvero uno spazio di Banach con una norma **generata da un prodotto scalare**, perché con un prodotto scalare si possono fare tante cose belle e carine. Ci chiediamo: è lo spazio $\big(C^0, \|\cdot\|_\infty\big)$ uno spazio di Hilbert?

Affinché sia uno spazio di Hilbert, la norma utilizzata deve essere generata da un prodotto scalare, quindi deve rispettare l'identità del parallelogramma. Presi due generici vettori appartenenti allo spazio, deve valere:

$$\|\underline{u} + \underline{w}\|^2 + \|\underline{u} - \underline{w}\|^2 = 2(\|\underline{u}\|^2 + \|\underline{w}\|^2$$

Prendiamo due funzioni continue dello spazio, per semplicità di cose prendiamo 1 e x . La norma del sup essenziale $\|1 + x\|_\infty$ nell'intervallo $[0,1]$ vale 2 (perché al punto $x = 1$ si ha che x vale proprio 1 , e $1 + 1 = 2$, giusto per dire due volte la stessa cosa; $1 + 1 = 2$ a meno che non siamo in base 2, ma per fortuna non vogliamo farci male); la norma $\|1 - x\|_\infty$ vale invece 1 , i calcoli li lasciamo a voi. Si ha che:

$$\begin{aligned}&\|1 + x\|_\infty^2 + \|1 - x\|_\infty^2 = 2(\|1\|_\infty^2 + \|x\|_\infty^2)\\&4 + 1 = 2 \cdot (1 + 1) \Rightarrow 5 = 4\end{aligned}$$

A meno che non abbiamo sbagliato matematica o assunto droghe strane, $5 \neq 4$, quindi $\left(C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty\right)$ *non è uno spazio di Hilbert.*

Dobbiamo allora cambiare norma, e sceglierne un'altra, magari stavolta che provenga da un prodotto scalare. Scegliamo la norma *p-esima*, anche detta norma L^p , la norma:

$$\|f\|_p = \int_0^1 |f(x)|^p dx$$

Nel nostro caso non consideriamo numeri strani, potremmo anche prendere la norma $\|f\|_7$ per divertimento, ma non otterremmo ciò che cerchiamo. Per questo, prendiamo la norma L^2 definita come:

$$L^2(f) = \|f(x)\|_2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx$$

Questa norma ha belle proprietà: è bilineare, **vale l'identità del parallelogramma**, quindi è generata da un prodotto scalare, vale anche la disuguaglianza triangolare, e inoltre, se $\|f(x)\| = \int_0^1 |f(x)|^2 dx = 0$, deve necessariamente essere $f(x) = 0$. Dimostreremo questo e non il resto.

Dimostrazione

Dobbiamo verificare che:

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx = 0 \quad \text{se e solo se } u(x) = 0$$

.

Procediamo per assurdo; supponiamo che $u(x)$ non sia identicamente nulla in tutto l'intervallo, ma che esiste un punto in cui assume valore positivo, ovvero:

$$\exists\, p \in [0,1] \quad u(p) = \delta > 0$$

Poiché ci muoviamo nello spazio delle funzioni continue, per il *teorema della permanenza del segno* deve esserci tutto un intorno del punto p del tipo $I = (p-\varepsilon; p+\varepsilon)$ in cui vale, ad esempio:

$$u(x) \geq \frac{1}{2}\delta \quad \forall\, x \in I$$

Ne consegue che:

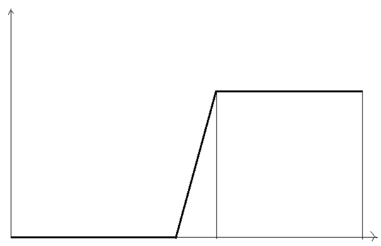
$$\int_0^1 u^2(x)dx \geq \int_{p-\varepsilon}^{p+\varepsilon} \frac{1}{2}\delta dx = \frac{1}{2}\delta \cdot 2\varepsilon = \delta\varepsilon > 0$$

Ciò nega l'ipotesi, quindi è vera la tesi.

Tuttavia, questa bella norma ha un comportamento strano nello spazio $C^0[0,1]$. Consideriamo la successione di funzioni:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \quad x \in \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right] \\ n\left(x - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\right) \quad x \in \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ 1 \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Nell'immagine qui vediamo la funzione considerata: assume valore nullo fino a $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, poi cresce linearmente fino ad assumere il valore 1 da $\frac{1}{2}$ a 1 .



Al crescere di n questa funzione tende a:

$$f_n(x) \to \begin{Bmatrix} 0 \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right) \\ 1 \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{Bmatrix} = f_\infty(x)$$

La funzione $f_\infty(x)$ è uscita fuori dallo spazio $C^0[0,1]$. Ops. (Windows è alla ricerca di una soluzione al problema...)

La funzione $f_n(x)$ non è quindi *una successione di Cauchy* rispetto alla norma del sup, infatti $\|f_n - f_\infty\|_\infty \not\to 0$. Se invece provassimo con la norma L^2 :

$$\int_0^1 |f_(x) - f_\infty(x)|^2 dx \leq \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\substack{\textit{area del triangolo} \\ \textit{evidenziato}}}$$

Rispetto a questa norma, quindi, la successione è di Cauchy. Tuttavia siamo sempre usciti dallo spazio delle funzioni continue, e potremmo attendere anni prima che Windows ci dia una risposta, ma basta creare lo spazio:

$$L^2(0,1) = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} : \int_0^1 |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

Questo spazio, generalmente indicato con L^p (l'indice p indica la potenza utilizzata, che nomina la norma), si chiama **spazio delle funzioni sommabili**. Questo contiene tutte le funzioni continue e non solo. Ad esempio, ci chiediamo se la funzione di Dirichlet vi appartenga. Sappiamo che il suo integrale vale 0 , ma la funzione non è identicamente 0 , quindi da un poco fastidio. Questo problema si risolve utilizzando la nozione **quasi ovunque**.

Definizione (Quasi ovunque)

Diremo che $f \approx g$, con $f, g : D \to \mathbb{R}$, **quasi ovunque** (approssimato con **q.o.**) se vale $f(x) = g(x)$ per ogni x appartenente all'insieme considerato $D \setminus E$, con $m(E) = 0$, ovvero se le funzioni sono identiche a meno di un insieme di punti *insignificante* (o a misura nulla).

Possiamo considerare la funzione di Dirichlet uguale alla funzione nulla *quasi ovunque* in $[0, 1]$ poiché sappiamo che i razionali sono un insieme insignificante. In questo modo, anche la funzione di Dirichlet rientra nello spazio delle funzioni sommabili. Inoltre, data questa definizione, possiamo anche dire che $f(x)$, la funzione integranda, non è una funzione, bensì rappresenta una **classe di funzioni**.

Inoltre, finalmente, abbiamo raggiunto il nostro scopo: $L^2(0, 1)$ è uno **spazio di Hilbert**.

Esempio

Vediamo per quali $\alpha > 0 \ \in \mathbb{R}$ la funzione $\frac{1}{x^\alpha} \in L^2(0, 1)$. Ci stiamo chiedendo se l'area di un ramo di iperbole equilatera e sue potenza è finita o no. Forse negli scorsi capitoli vi abbiamo già spoilerato il risultato, ma adesso lo calcoliamo.

Per risolvere il problema dei calcoli, taglio ad una fissata quota R il grafico con un segmento orizzontale, incontrando la funzione nel punto (x_R, R) ; otteniamo la funzione:

$$T_R\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) = \begin{cases} R & x \in [0, x_R] \\ \frac{1}{x^\alpha} & x \in (x_R, 1] \end{cases}$$

Al crescere di R , la successione tende alla funzione $\frac{1}{x^\alpha}$; la successione è monotona e, quindi, misurabile.

$$\int_0^1 T_R\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx = Rx_R + \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x_R}^1$$

Calcoliamoci esplicitamente il valore di x_R :

$$\frac{1}{x_R^\alpha} = R \quad \to \ x_R = \frac{1}{R^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Sostituendo sopra:

$$\begin{aligned} & Rx_R + \frac{1}{1-\alpha} - \frac{x_R^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ & \alpha\left(\frac{x_R^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) + \frac{1}{1-\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{R^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\right) + \frac{1}{1-\alpha} \end{aligned}$$

L'unico modo per avere un'area finita è quello di avere il termine tra parentesi nullo, ovvero far tendere $R \to \infty$; deve necessariamente essere che $1 - \alpha > 0$, altrimenti il denominatore andrebbe al numeratore facendo esplodere l'are all'infinito, quindi otteniamo $\alpha < 1$. Infatti la funzione $\frac{1}{x}$ non è sommabile.

2.4 Passaggio al limite e derivazione sotto il segno di integrale

2.4.1 Integrale di limiti

La teoria di Lebesgue è uno strumento *potente*, molto più di Riemann. La potenza si nota in tre teoremi della teoria, che ci mostrano come si può passare al limite sotto il segno di integrale.

Teorema (di Beppo Levi sulla convergenza monotona)

Supponiamo sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni *misurabili* definite: $f_n : E \subseteq \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$, con E misurabile; supponiamo inoltre che siano:

1. funzioni monotone crescenti, ovvero $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots f_n(x)$ valido $\forall x \in E$, con x fissato;
2. la successione tende al limite: $f_n(x) \to f_0(x)\ \forall x \in E$.

Allora:

1. f_0 è **misurabile**;
2. Vale:
$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_E f_0(x)dx$$

Ovvero si può invertire arbitrariamente il segno di limite con quello di integrale.

Questo è già un risultato notevole: sotto opportune condizioni di positività e crescenza monotona, limite e integrale si possono scambiare. Esiste un corollario che permette anche al simbolo di sommatoria di poter essere scambiato:

Corollario (del teorema di Beppo Levi)

Sia $\{f_n\}$ successione di funzioni non negative; supponiamo sia $F_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$ una funzione monotona non decrescente; Allora vale:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_E f_j(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_E \sum_{j=1}^{n} f_j(x)dx = \int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)dx$$

Ovvero, se $f_n > 0$, possiamo scambiare sommatoria con integrale.

Questo risultato è molto importante: risulta più comodo studiare una serie di funzioni, invece che sommare infiniti integrali.

Il teorema di Beppo Levi permette anche di dimostrare il seguente teorema.

Teorema (di Fatou)

Supponiamo avere una successione di funzioni misurabili non negative $\{f_n\}$ (unica ipotesi); allora vale la tesi:

$$\int_E \big(\liminf f_j(x)\big)dx \leq \liminf \int_E f_j(x)dx$$

Il termine $\liminf$, chiamato **minimo limite**, è definito come segue.

Definizione ("Minimo limite")

Prendiamo una successione di reali $a_k = \{a_0, a_1, a_2 \cdots\}$; questa ha sicuramente un inf , che sia finito o meno, che chiameremo b_0 . Adesso, eliminiamo il termine a_0 dalla successione, ottenendo:

$$a_{k1} = \{a_1, a_2, \cdots\}$$

Anche questa successione ha un inf , che chiameremo b_1 . Iterando il processo all'infinito, otteniamo la successione b_n degli inf , che risulta essere **monotona crescente**, o meglio, non decrescente, quindi è regolare e ammette limite:

$$\lim b_n = \liminf a_k$$

Per la definizione di $\limsup$ il procedimento è lo stesso, ottenendo una successione dei sup monotona non crescente.

Il teorema di Fatou permette di dimostrare il più importante di questa terna, il teorema di Lebesgue.

Teorema (di Lebesgue sulla convergenza dominata)

Supponiamo $\{f_n\}$ sia una successione di funzioni misurabili, che convergono $f_n \to f$ quasi ovunque; inoltre, queste sono tali che:

$$|f_n(x)| \leq \psi(x) \text{ quasi ovunque}$$

Ovvero la funzione $\psi(x)$ *domina* la convergenza dall'alto. Su questa funzione dominante poniamo l'ipotesi di sommabilità, ovvero $\int_E \psi(x)dx < +\infty$. Allora si ha che:

$$\lim_{j\to\infty} \int_E f_j(x)dx = \int_E \left(\lim_{j\to\infty} f_j(x)\right) dx$$

La tesi è identica a quella del teorema di Levi, solo cambiano le ipotesi, che in questo caso sono nettamente più interessanti: raramente si ha a che fare con una successione monotona crescente, mentre è più facile maggiorare una successione convergente con una funzione sommabile. L'importanza di questo teorema sta nelle sue applicazioni.

2.4.2 Derivabilità sotto il segno di integrale

Lemma (di Lebesgue)

Supponiamo di avere una funzione $F(t)$ così definita:

$$F(t) = \int_E f(x,t)dx$$

E che esista una funzione $g(x)$ **sommabile** tale che $|f(x,t)| \leq g(x)$ quasi ovunque. Supponiamo inoltre che $f(x,t)$ sia **integrabile** (per la condizione imposta a $g(x)$, risulta essere anche sommabile) e che sia *continua nella variabile* t ad ogni x fissato (non ci interessa il suo comportamento in x , può anche essere discontinua). La tesi è che $F(t)$ **è continua**.

Il punto di approdo più importante è racchiuso nel seguente teorema.

Teorema (di derivazione sotto il segno di integrale)

Supponiamo $f(x,t)$ sia sommabile in E per ogni t , e che sia anche derivabile nella variabile t per quasi ogni x in E . Inoltre, sia $g(x)$ una funzione misurabile tale che:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$$

Definita la funzione $F(t) = \int_E f(x,t)dx$, allora $F(t)$ **è derivabile** e vale:

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

Ovvero, la teoria di Lebesgue permette di portare il segno di derivata sotto il segno di integrale (sotto opportune condizioni).

Capitolo 3

Fonti per testo e immagini; autori; licenze

3.1 Testo

- **Corso:Misura e integrale di Lebesgue/Misura di Lebesgue/Il problema di fondo: dove Riemann fallisce** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMisura_e_integrale_di_Lebesgue/Misura_di_Lebesgue/Il_problema_di_fondo%3A_dove_Riemann_fallisce?oldid=39300 *Contributori:* Ale e Dan
- **Corso:Misura e integrale di Lebesgue/Misura di Lebesgue/Elementi fondamentali, misura di Lebesgue** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMisura_e_integrale_di_Lebesgue/Misura_di_Lebesgue/Elementi_fondamentali%2C_misura_di_Lebesgue?oldid=39298 *Contributori:* Ale e Dan
- **Corso:Misura e integrale di Lebesgue/Misura di Lebesgue/Proprietà della misura di Lebesgue** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMisura_e_integrale_di_Lebesgue/Misura_di_Lebesgue/Propriet%C3%A0_della_misura_di_Lebesgue?oldid=39304 *Contributori:* Ale e Dan
- **Corso:Misura e integrale di Lebesgue/Misura di Lebesgue/Insieme di Cantor, insiemi illimitati** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMisura_e_integrale_di_Lebesgue/Misura_di_Lebesgue/Insieme_di_Cantor%2C_insiemi_illimitati?oldid=39302 *Contributori:* Ale e Dan
- **Corso:Misura e integrale di Lebesgue/Integrale secondo Lebesgue/Dalla funzione semplice alle funzioni misurabili: il capovolgimento di pensiero** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMisura_e_integrale_di_Lebesgue/Integrale_secondo_Lebesgue/Dalla_funzione_semplice_alle_funzioni_misurabili%3A_il_capovolgimento_di_pensiero?oldid=39309 *Contributori:* Ale e Dan
- **Corso:Misura e integrale di Lebesgue/Integrale secondo Lebesgue/Integrale di Lebesgue e proprietà** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMisura_e_integrale_di_Lebesgue/Integrale_secondo_Lebesgue/Integrale_di_Lebesgue_e_propriet%C3%A0?oldid=39311 *Contributori:* Ale e Dan
- **Corso:Misura e integrale di Lebesgue/Integrale secondo Lebesgue/Spazio delle funzioni sommabili a potenza 2** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMisura_e_integrale_di_Lebesgue/Integrale_secondo_Lebesgue/Spazio_delle_funzioni_sommabili_a_potenza_2?oldid=39315 *Contributori:* Ale e Dan
- **Corso:Misura e integrale di Lebesgue/Integrale secondo Lebesgue/Passaggio al limite e derivazione sotto il segno di integrale** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMisura_e_integrale_di_Lebesgue/Integrale_secondo_Lebesgue/Passaggio_al_limite_e_derivazione_sotto_il_segno_di_integrale?oldid=39313 *Contributori:* Ale e Dan

3.2 Immagini

- **File:Cantor_set_in_seven_iterations.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/56/Cantor_set_in_seven_iterations.svg *Licenza:* Public domain *Contributori:* From en.wikipedia.org Image:Cantor_set_in_seven_iterations.svg *Artista originale:* 127 “rect”
- **File:Leb1.png** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/9/96/Leb1.png *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:RandLintegrals.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/af/RandLintegrals.svg *Licenza:* Public domain *Contributori:* Own work *Artista originale:* Aaron Rotenberg

3.3 Licenza dell’opera