Teoria delle distribuzioni

6 luglio 2022

wikitolearn
collaborative textbooks

This book is the result of a collaborative effort of a community of people like you, who believe that knowledge only grows if shared.
We are waiting for you!

Get in touch with the rest of the team by visiting http://join.wikitolearn.org

Indice

Capitolo 1

Distribuzioni in D'

1.1 Introduzione

Il primo tentativo di rappresentare matematicamente le variabili fisiche consiste nel pensarle come funzioni, ossia come regole che assegnano un numero ad ogni valore assunto da una variabile indipendente.

Ad esempio, possiamo considerare la grandezza fisica "forza" f come funzione della variabile indipendente "tempo" t . La grandezza "forza" sarà da considerarsi nota qualora si conosca il suo valore $f(t)$ ad ogni istante t .

Tale modellizzazione delle variabili fisiche, tuttavia, comporta di essere in grado di definire *puntualmente* il loro valore. Questo è in generale impossibile, per motivazioni sia pratiche che teoriche. Dal punto di vista pratico, non vi è alcuno strumento in grado di misurare un valore puntuale: ogni strumento misura in realtà il valore medio assunto da una grandezza in un intorno piccolo, ma finito, del punto. Dal punto di vista teorico, la meccanica quantistica mostra che non è proprio possibile definire puntualmente le grandezze fisiche, e nel suo apparato matematico vediamo comparire "oggetti" come la delta di Dirac $\delta(x)$ che non sono descrivibili come funzioni .

La teoria delle distribuzioni consente di aggirare il problema della definizione puntuale delle grandezze fisiche, e di dare un senso a questi "oggetti" che emergono naturalmente nella meccanica quantistica.

Una grandezza fisica verrà modellizzata da un *funzionale lineare continuo* agente su *funzioni di prova*, ossia da una regola che assegna un valore ad ogni funzione in uno spazio di "funzioni di prova".

Convenzioni e notazioni

- Gli integrali sono da intendere secondo Lebesgue
- La discussione verrà fatta principalmente per variabili unidimensionali, la generalizzazione a variabili multidimensionali è banale, considerando
  - $\frac{d^k}{dx^k} \to D^k \equiv \frac{\partial^{k_1+k_2+\ldots k_n}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\ldots\partial x_n^{k_n}}$ dal momento che, come vedremo, l'ordine di derivazione è irrilevante per le distribuzioni
  - condizione di $\mathcal{C}^\infty$: $D^k f$ $\exists$ continua $\forall k, \forall x$

1.2 Lo spazio D delle funzioni di prova

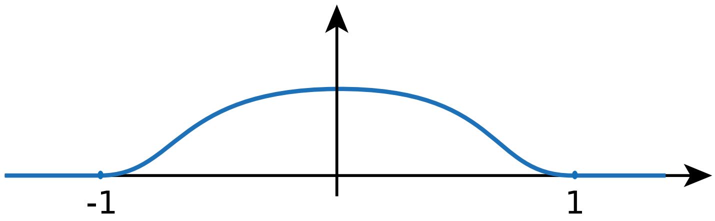
Un primo spazio di funzioni di prova è lo spazio $\mathcal{D}$, definito come

Definizione (Lo spazio D)

$$\mathcal{D} = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f \in \mathcal{C}^\infty, f \text{ a supporto compatto}\}$$

In questo spazio vi sono tutte le funzioni infinitamente differenziabili a supporto compatto, ossia nulle al di fuori di un intervallo limitato. Un primo esempio di funzione in $\mathcal{D}$ è il mollificatore, illustrato nel seguente esempio.

Esempio (Esempio: il mollificatore)



Mollificatore

$$\mathrm{X}(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \end{cases}$$

Chiaramente $\mathrm{X}(x) \in \mathcal{C}^\infty$. Inoltre $supp(\mathrm{X}) = [-1, 1]$. Dunque $\mathrm{X}(x) \in \mathcal{D}$

Esempio (Esempio: mollificatore normalizzato)

$$\gamma_a(x) = \frac{\mathrm{X}(x/a)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \mathrm{X}(x/a)} = \frac{1}{a} \frac{\mathrm{X}(x/a)}{\int_{-1}^{1} dx \mathrm{X}(x)}$$

Il mollificatore è un esempio importante di funzione di prova, in quanto consente di *regolarizzare* le funzioni continue e a supporto compatto tramite il processo di convoluzione. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema

Ogni $f(x)$ continua e a supporto compatto è il limite uniforme per $a \to 0^+$ di una famiglia $f_a(x) \in \mathcal{D}$.

Dimostrazione

Consideriamo

$$f_a(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \, \gamma_a(x - y) f(y)$$

Verifichiamo innanzitutto che $f_a(x) \in \mathcal{D}$.

- $f_a(x) \in \mathcal{C}^\infty$. Infatti
$$\frac{d^k}{dx^k} f_a(x) = \frac{d^k}{dx^k} \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \gamma_a(x-y) f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\frac{d^k}{dx^k} \gamma_a(x-y) \right) f(y),$$
dove il passaggio dell'operazione di derivata sotto il segno di integrale è giustificato dalla continuità di f . Poichè $\gamma_a \in \mathcal{D}, \gamma_a \in \mathcal{C}^\infty$ e dunque $\frac{d^k}{dx^k}\gamma_a(x-y)$ esiste continua $\forall k$. Si conclude dunque che $f_a(x) \in \mathcal{C}^\infty$.

- $f_a(x)$ è a supporto compatto. Per ipotesi f è a supporto compatto, dunque $f(y) = 0$ per $y < b_1 \vee y > b_2$. Inoltre $\gamma_a(x-y) = 0$ per $x < y - a \vee x > y + a$. Data dunque $x > a + b_2 \vee x < b_1 - a$ si ha in tali intervalli $f_a(x) = \int dy\, \gamma_a(x-y) f(y) = 0$, e quindi f_a è a supporto compatto ($supp(f_a) = [b_1 - a, b_2 + a]$).

Ora ci resta da dimostrare che $\lim_{a \to 0^+} f_a(x) = f(x)$. Consideriamo

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_a(x)| &= \left| f(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \gamma_a(x-y) f(y) \right| \\
&= \left| \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(x) \gamma_a(x-y)}_{\int_{-\infty}^{+\infty} dy \gamma_a(x-y) = 1} - \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, \gamma_a(x-y) f(y) \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, |f(x) - f(y)|\, \gamma_a(x-y)
\end{aligned}$$

Poichè f è continua sul compatto $[b_1, b_2]$ è ivi uniformemente continua:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ t.c\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Se ora $a < \delta$ si ha

$$\begin{cases} |x-y| > \delta & \gamma_a(x-y) = 0 \text{ perchè } x-y \text{ non è in } [-a, a] \\ |x-y| < \delta & |f(x) - f(y)| < \epsilon \end{cases}$$

Poichè prendere $a < \delta$ equivale a considerare il $\lim_{a \to 0^+} f_a(x)$ si ha la tesi.

Questo teorema ci dice che $\mathcal{D}$ è denso nello spazio delle funzioni continue e a supporto compatto: ogni funzione continua a supporto compatto è limite uniforme di una famiglia di funzioni di prova in $\mathcal{D}$, quindi non solo continue ma anche infinitamente differenziabili.

Un altro esempio di funzione in $\mathcal{D}$ è la cosiddetta *smooth characteristic function*, ossia la funzione caratteristica regolarizzata dal mollificatore. Ricordiamo che la funzione caratteristica di un insieme A è una funzione che vale 1 se $x \in A$ e 0 altrimenti.

Esempio (Esempio: smooth characteristic function)

Consideriamo una funzione continua

$$h(x) = \begin{cases} 1 & a - \alpha \leq x \leq b + \alpha \\ 0 & x \leq d_1 \vee x \geq d_2 \end{cases} \qquad d_1 < a - \alpha,\, d_2 > b + \alpha$$

Tale funzione vale 1 nell'intervallo $[a - \alpha, b + \alpha]$ ed è nulla al di fuori di un intervallo più ampio. Chiaramente, il supporto di h è compatto e h è continua. Definiamo

$$\mathrm{X}_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, h(y)\gamma_\alpha(x - y)$$

Si ha che

$$\mathrm{X}_{a,b} = 1 \quad a \leq x \leq b$$

e questo giustifica di considerare $\mathrm{X}_{a,b}$ come funzione caratteristica dell'intervallo $[a, b]$.

Infatti $\gamma_\alpha(x - y) \neq 0 \Leftrightarrow x - \alpha \leq y \leq x + \alpha$. Prendendo $a \leq x \leq b$, si ha che per tali valori di y $h(y) = 1$. Dunque

$$\mathrm{X}_{a,b} = \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} dy\, \gamma_\alpha(x - y) = 1$$

Teorema

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty, \forall\, (a, b) \in \mathbb{R},\ \exists g \in \mathcal{D}\, t.c\, g(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$$

Dimostrazione

Consideriamo $\phi(x) = f(x)\mathrm{X}_{a,b}$. Chiaramente $\phi \in \mathcal{C}^\infty$, in quanto lo sono sia f che $\mathrm{X}_{a,b}$. Inoltre, ϕ è nulla al di fuori di un intervallo finito. Si ha quindi $\phi \in \mathcal{D}$. Per $a \leq x \leq b$, inoltre, $\phi(x) = f(x)$, da cui la tesi.

Osservazione

Se $f \in \mathcal{D}$ e $g \in \mathcal{C}^\infty$, $gf \in \mathcal{D}$.

Definiamo ora la nozione di convergenza in $\mathcal{D}$.

Definizione (Convergenza in D)

$\{f_n\}$ *[1] converge in $\mathcal{D}$ se:

1. $\{f_n^{(k)}\}$ converge uniformemente
2. $supp f_n \subset I$, con I intervallo limitato

È facile notare che con questa definizione di convergenza, il limite $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ è di nuovo una test function in $\mathcal{D}$, ossia una funzione $\mathcal{C}^\infty$ a supporto compatto. Questo indica che $\mathcal{D}$ è *chiuso rispetto alla convergenza.*

Per sottolineare l'importanza della seconda condizione imposta nella definizione, proponiamo alcuni esempi.

Esempio

1. $f_n = \frac{\gamma(x)}{n} \to 0 \; n \to \infty$. Infatti $supp \frac{\gamma(x)}{n} \subset [-1,1]$
2. $f_n = \frac{\gamma(x/n)}{n}$ non converge in $\mathcal{D}$ in quanto $\nexists I$ t.c $supp(f_n) \subset I$

Osservazione

In seguito faremo sempre riferimento alla convergenza a 0 , dal momento che se $f_n \to f, \; f_n - f \to 0$, e dunque è sufficiente studiare tale caso.

[1] La definizione rimane valida considerando una famiglia $\{f_\nu\}$ di funzioni di prova, con ν indice continuo

1.3 Distribuzioni su D: lo spazio D'

Definizione (Distribuzioni su D)

Una distribuzione è un funzionale lineare continuo $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$, ossia una regola che assegna ad ogni funzione in $\mathcal{D}$ un numero complesso. Tale numero, ossia l'azione della distribuzione sulla funzione di prova, verrà indicato con $\langle \varphi, f \rangle$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \varphi(f_1) + \lambda_2 \varphi(f_2) \quad & \text{linearità} \\ \text{se } \{f_n\} \to 0 \text{ in } \mathcal{D} \Rightarrow \varphi(f_n) \to 0 \text{ in } \mathbb{C} \quad & \text{continuità} \end{aligned}$$

Definizione (Lo spazio D')

L'insieme dei funzionali lineari continui $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ si denota con $\mathcal{D}'$ e rappresenta lo spazio duale di $\mathcal{D}$.

$\mathcal{D}'$ è spazio lineare con le operazioni

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 + \varphi_2, f \rangle = \langle \varphi_1, f \rangle + \langle \varphi_2, f \rangle \quad & \text{somma} \\ \langle \alpha\varphi, f \rangle = \langle \varphi, \alpha f \rangle \quad & \text{moltiplicazione per uno scalare} \end{aligned}$$

Ci chiediamo ora che tipo di oggetti siano le distribuzioni in $\mathcal{D}'$. Vedremo a breve che ogni funzione localmente integrabile definisce una *distribuzione regolare* su $\mathcal{D}'$. Questo è di estrema importanza perchè ci consente di trattare le funzioni localmente integrabili come distribuzioni: tornando a quanto detto nell'Introduzione, il formalismo distribuzionale consente di trattare tutte le variabili fisiche precedentemente definite come funzioni. Tuttavia, in $\mathcal{D}'$ vi sono anche altri oggetti, le cosiddette *distribuzioni singolari*, che non possono essere trattate come funzioni ma acquistano senso solo in ambito distribuzionale.

Teorema

$\forall f \in \mathcal{L}^1_{loc}$ è possibile definire una distribuzione $\varphi_f \in \mathcal{D}'$ tramite

$$\langle \varphi_f, g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) g(x)$$

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che il funzionale definito da $\langle \varphi_f, g \rangle$, con $g \in \mathcal{D}$, è lineare e continuo.

1. linearità. Ovvia, segue dalla linearità dell'integrale.
2. continuità. Sia $\{g_n\}$ una successione di funzioni di prova in $\mathcal{D}$, tale che $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$. Dobbiamo mostrare che $\langle \varphi_f, g_n \rangle \to 0$ in $\mathbb{C}$. Iniziamo notando che, per la condizione 2. nella definizione di convergenza, le $\{g_n\}$ hanno supporto contenuto in un intervallo I limitato. Dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) g_n(x) = \int_I dx\, f(x) g_n(x)$$

Valutiamo ora $|\langle \varphi_f, 0\rangle - \langle \varphi_f, g_n \rangle| = |\langle \varphi_f, g_n \rangle|$.

$$|\langle \varphi_f, g_n \rangle| = \left| \int_I dx\, f(x) g_n(x) \right| \leq \int_I dx\, |f(x) g_n(x)| = \int_I dx\, |f(x)|\, |g_n(x)|$$

Poichè $\lim_{n\to\infty} g_n = 0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n}$ t.c $\forall n \geq \bar{n},\ |g_n| < \epsilon$ si ha

$$\int_I |f(x)|\, |g_n(x)| < \epsilon \underbrace{\int_I |f(x)|}_{<\infty \text{ dato che } f\in\mathcal{L}^1}$$

Ora siamo pronti a dare la definizione di distribuzione regolare.

Definizione (Distribuzione regolare)

Una distribuzione $\varphi \in \mathcal{D}'$ è detta regolare se $\exists f \in \mathcal{L}^1_{loc}$ tale che

$$\langle \varphi, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) g(x)$$

Definizione (Distribuzione singolare)

Una distribuzione $\varphi \in \mathcal{D}'$ è detta singolare se non è regolare, ossia se $\nexists f \in \mathcal{L}^1_{loc}$ tale che

$$\langle \varphi, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) g(x)$$

Osservazione

Date due distribuzioni regolari φ_f , φ_g supponiamo

$$\langle \varphi_f, h \rangle = \langle \varphi_g, h \rangle \quad \forall h \in \mathcal{D}$$

Possiamo concludere che le due funzioni localmente integrabili sono uguali? $f = g$? No! Possiamo solo concludere che sono uguali entro un insieme di misura (secondo Lebesgue) nulla, ossia le due funzioni sono *uguali quasi ovunque* $f \simeq g$. Vi è dunque una corrispondenza uno a uno tra le classi di equivalenza $[f]_{\simeq} = \left\{ g \in \mathcal{L}^1_{loc} \text{ t.c } g \simeq f \ \left(\text{i.e } \int dx\, g(x) = \int dx\, f(x) \right) \right\}$ delle funzioni localmente integrabili e le distribuzioni regolari.

Se tuttavia consideriamo due funzioni continue f, g (funzioni localmente integrabili non sono necessariamente continue, in quanto possono essere continue a tratti) che inducono la stessa distribuzione, segue necessariamente $f = g$. Poichè le funzioni di prova in $\mathcal{D}$ sono continue, ogni $f \in \mathcal{D}$ identifica univocamente una distribuzione regolare, ed è a sua volta univocamente determinata da tale distribuzione. Considerando $\mathcal{D}$ come lo spazio di tali distribuzioni, possiamo quindi scrivere

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$$

Definizione (Convergenza in D')

Data una successione di distribuzioni $\{\varphi_n\} \in \mathcal{D}'$ si dice che φ_n converge n $\mathcal{D}'$ se $\langle \varphi_n, f \rangle$ converge in $\mathbb{C}$ $\forall f \in \mathcal{D}$.

Si può dimostrare che $\mathcal{D}'$ è chiuso rispetto a tale definizione di convergenza, ossia che il funzionale definito da $\langle \varphi_\infty, f \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \varphi_n, f \rangle$ è in $\mathcal{D}'$.

Un caso particolare di convergenza è la *convergenza dominata*. In questo caso è possibile stabilire una relazione tra la convergenza in senso funzionale di una successione di funzioni localmente integrabili e la convergenza delle stesse intese come distribuzioni.

Teorema (Convergenza dominata)

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni localmente integrabili che convergono quasi ovunque alla funzione f . Se $\exists g \in \mathcal{L}^1_{loc}$ t.c $|f_n(x)| \leq g(x) \forall n, \forall x$, ossia se la successione è dominata da una funzione localmente integrabile, allora $f \in \mathcal{L}^1_{loc}$ e la successione di distribuzioni regolari corrispondenti, $\{\varphi_{f_n}\}$, converge in $\mathcal{D}'$ alla distribuzione regolare che corrisponde a f, φ_f .

Osservazione

La convergenza uniforme rientra come caso particolare nella convergenza dominata

Tuttavia, è possibile che una successione di distribuzioni regolari converga in $\mathcal{D}'$, dunque in senso distribuzionale, senza che la corrispondente successione di funzioni in $\mathcal{L}^1_{loc}$ converga puntualmente, o che entrambe le successioni convergano ma la distribuzione limite in $\mathcal{D}'$ non corrisponda al limite della successione di funzioni localmente integrabili. I seguenti esempi mostrano il verificarsi di queste situazioni.

Esempio

$$f_n(x) = \sin(nx)$$

Come funzioni localmente integrabili, questa successione non converge puntualmente per nessun x eccetto 0 . Tuttavia considerando la convergenza delle distribuzioni regolari associate, si ha

$$\langle \varphi_{f_n}, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \sin(nx) g(x) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \cos(nx) g'(x)$$
$$|\langle \varphi_{f_n}, g \rangle| \le \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \left| g'(x) \right| \to 0 \text{ per } n \to \infty$$

in quanto se $g \in \mathcal{D}, g'$ è limitata. Dunque in senso distribuzionale la successione converge alla distribuzione nulla. *[1]

Esempio

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & |x| \ge \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2} & |x| < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Come funzioni si ha $f_n \to 0$ quasi ovunque (eccetto in 0 , dove il limite non esiste). In senso distribuzionale, tuttavia, per ogni $g \in \mathcal{D}$ si ha

$$\langle \varphi_{f_n}, g \rangle = \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dx\, g(x) \to g(0)$$

e dunque

$$\varphi_{f_n} \to \delta$$

Questo caso mostra che anche se entrambi i limiti esistono, la corrispondenza tra il limite in senso di funzioni e in senso di distribuzioni non è garantita.

[1] Notare che quanto dimostrato è un caso particolare del Lemma di Riemann-Lebesgue

1.4 Operazioni sulle distribuzioni

Le operazioni sulle distribuzioni sono definite a partire dalle operazioni sulle funzioni di prova. Per comprendere le definizioni è utile fare riferimento alle rappresentazioni integrali, valide per le distribuzioni regolari.

Rototraslazioni e diffeomorfismi Sulle funzioni una rototraslazione è definita come

$$T_{R,b} f = f(R^{-1}(x - b))$$

. Definiamo la rototraslazione di una distribuzione come:

$$\langle T_{R,b}\,\varphi, f\rangle = \left\langle \varphi, T_{R^{-1},-b} f\right\rangle$$

Per distribuzioni regolari, infatti, questa definizione ha significato immediato: un semplice cambio di variabile consente di verificare l'eguaglianza

$$\int dx\,\varphi(R^{-1}(x-b))f(x) = \int dx\,\varphi(x)f(R(x+b))$$

In generale possiamo estendere questo procedimento per definire come si comporta una distribuzione sotto un generico diffeomorfismo. Un diffeomorfismo $\xi : x \to \xi(x)$ è una funzione $\mathcal{C}^\infty$ invertibile ($det(J(x)) \neq 0$, con J matrice jacobiana associata a ξ).

Una funzione di prova è necessariamente scalare rispetto a questo cambio di variabili, ossia

$$f'(\xi(x)) = f(x) \Rightarrow f'(x) = f(\xi^{-1}(x)) \equiv (\xi * f)(x)$$

. Sotto l'azione di $\xi, f \to \xi * f$ (pull-back). Per le distribuzioni si definisce

$$\langle \xi * \varphi, f\rangle = \left\langle \varphi, \xi^{-1} * f\right\rangle$$

Vediamo il significato di questa definizione per le distribuzioni regolari. Svolgiamo il secondo membro dell'eguaglianza in rappresentazione integrale

$$\int dx\,\varphi(x)(\xi^{-1}(x)*f(x)) = \int dx\,\varphi(x)f(\xi(x)) = \int dy\ [det(J(y))]^{-1}\,\varphi(\xi^{-1}(y))f(y)$$

Eguagliando tale espressione al primo membro dell'eguaglianza ricaviamo l'espressione per $\xi * \varphi$:

$$(\xi * \varphi)(x) = [det(J(x))]^{-1}\,\varphi(\xi^{-1}(x))$$

Alternativamente

$$\varphi(\xi^{-1}(x)) = [det(J(x))]\,(\xi * \varphi)(x)$$

Da questa espressione notiamo che, a differenza delle funzioni di prova, le distribuzioni trasformano sotto diffeomorfismi come *misure*.

Derivazione **Definizione** (Derivata di una distribuzione)

$$\left\langle D^k\varphi, f\right\rangle = (-1)^k\left\langle \varphi, D^k f\right\rangle$$

Poniamoci ancora una volta in rappresentazione integrale per comprendere il significato della definizione, e poniamo k=1.

$$\int dx\left(\frac{d}{dx}\varphi(x)\right)f(x)\underbrace{=}_{IBP} -\int dx\,\varphi(x)f'(x)$$

Osservazione

La definizione è ben posta perchè se $f \in \mathcal{D} \Rightarrow D^k f \in \mathcal{D}$.

Osservazione

Questa definizione consente di concludere che ogni distribuzione è infinitamente differenziabile. Per le ditribuzioni è quindi sempre possibile:

- scambiare l'ordine di derivazione: $\frac{d^2\varphi}{dx_j dx_k} = \frac{d^2\varphi}{dx_k dx_j}$
- scambiare l'operazione di limite con l'operazione di derivata $\varphi_n \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} D^k \varphi_n = D^k \lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$
- scambiare l'operazione di somma con l'operazione di derivata (derivare una serie termine a termine) $D^k \sum \varphi_n = \sum D^k \varphi_n$

Integrazione La definizione della primitiva di una distribuzione è più delicata. Ci piacerebbe infatti procedere come per le altre definizioni e porre

$$\left\langle \Phi, f' \right\rangle = \langle \varphi, -f \rangle \quad \forall f \in \mathcal{D}$$

dove Φ rappresenta la primitiva di φ . Tuttavia questa definizione non è ben posta, in quanto non tutte le funzioni in $\mathcal{D}$ hanno primitiva che è a sua volta in $\mathcal{D}$. Il seguente lemma, tuttavia, ci consente di costruire una definizione ben posta.

Lemma

Sia $\mathcal{H}$ il sottospazio di $\mathcal{D}$ delle funzioni di prova aventi primitiva in $\mathcal{D}$. Sia ora $h \in \mathcal{H}$ e $g \in \mathcal{D}$ t.c $\int dx\, g(x) = 1$. $\forall f \in \mathcal{D}$ possiamo decomporre f come

$$f = F(\infty)g + h, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} dx\, f(x)$$

Definiamo ora

$$\langle \Phi, f \rangle = F(\infty) \langle \Phi, g \rangle + \langle \Phi, h \rangle = F(\infty) \langle \Phi, g \rangle - \langle \varphi, H \rangle \quad H(x) = \int_{-\infty}^{x} dx\, h(x)$$

Il termine $F(\infty) \langle \Phi, g \rangle$ rappresenta una costante di integrazione, mentre la definizione della primitiva Φ di φ tramite l'azione su h risulta ben posta perchè $h \in \mathcal{H}$ e dunque $H(x) \in \mathcal{D}$.

1.5 Delta di Dirac

Sebbene ci si riferisca alla δ di Dirac come ad una funzione, e si trovino spesso nella letteratura espressioni quali $\delta(x)$, $\int dx\, \delta(x) f(x), \ldots$, esse sono in realtà un abuso di linguaggio. Infatti la δ di Dirac acquista senso solo come distribuzione, ossia come funzionale agente su funzioni, ed è inoltre l'esempio più noto di distribuzione singolare, come ora dimostreremo. Proprio perchè è singolare, esprimerne l'azione tramite un integrale è formalmente errato, poichè non esiste nessuna funzione $\delta(x) \in \mathcal{L}^1_{loc}$ corrispondente al funzionale δ .

L'espressione definitoria del funzionale δ di Dirac è

$$\langle \delta, f \rangle \equiv f(0)$$

Teorema

La distribuzione δ definita da

$$\langle \delta, f \rangle \equiv f(0)$$

è una distribuzione singolare.

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che $\nexists\, \delta(x) \in \mathcal{L}^1_{loc}$ t.c. $\langle \delta, f \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x) f(x)$. Supponiamo per assurdo che tale funzione $\delta(x)$ esista. L'eguaglianza sopra enunciata deve essere valida $\forall f \in \mathcal{D}$. Sia dunque $f = \mathrm{X}(x/\alpha)$.

Ora, dalla definizione si ha

$$\langle \delta, \mathrm{X}(x/\alpha) \rangle = \mathrm{X}(0) = \frac{1}{e}$$

Tuttavia

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_{-\alpha}^{\alpha} dx\, \delta(x) \mathrm{X}(x/\alpha) = 0$$

e si ha dunque un assurdo.

Proprietà Consideriamo $\delta(\xi(x))$, con $\xi(x)$ diffeomorfismo. In base alla definizione data in Operazioni sulle distribuzioni, si ha

$$\begin{aligned}
\delta(\xi(x)) &= [det(J)]^{-1} (\xi^{-1} * \delta) \\
\left\langle \xi^{-1} * \delta, f \right\rangle &= \langle \delta, \xi * f \rangle = (\xi * f)(0) \\
\xi * f = f(\xi^{-1}(x)) &\Rightarrow (\xi * f)(0) = f(\xi^{-1}(0)) \\
\delta(\xi(x)) &= [det(J)]^{-1} \delta(x - \xi^{-1}(0))
\end{aligned}$$

Se $\xi(x) = 0$ per $x = x_\alpha, \alpha = 1, \ldots, n$

Costruzione generale di rappresentazioni della δ **Teorema**

Sia $\{\varphi_n\}$ una successione di distribuzioni regolari in $\mathcal{D}'$. Se le seguenti condizioni sono soddisfatte

1. $\int_{|x|<a} dx\, \varphi_n \to 1$ per $n \to \infty$
2. $\int_{|x|<L} dx\, |\varphi_n| < C_L\ \forall n$
3. $\int_{a<|x|<1/a} dx\, \varphi_n(x)\, f(x) \to 0$ per $n \to \infty\ \forall f \in \mathcal{D}, \forall a > 0$ ($x \in [-1/a, -a] \vee [a, 1/a]$)

allora

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \delta$$

Dimostrazione

Dobbiamo dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \langle \varphi_n, f \rangle = f(0)\ \forall f \in \mathcal{D}$.

Consideriamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi_n(x)\, f(x) = \underbrace{f(0) \int_{|x|<a} dx\, \varphi_n(x)}_{I_1} + \underbrace{\int_{|x|<a} dx\, \varphi_n(x)\, (f(x) - f(0))}_{I_2} + \underbrace{\int_{|x|>a} dx\, \varphi(x)\, f(x)}_{I_3}$$

1. $I_1 \to f(0)$ per $n \to \infty$ grazie alla condizione 1.
2. $\left| \int_{|x|<a} \varphi_n(x)\, (f(x) - f(0)) \right| \leq \int_{|x|<a} |\varphi_n(x)|\, |f(x) - f(0)|$. Poichè $f \in \mathcal{D}$, f è lipschitziana nell'intervallo $|x| < a$: $\exists M > 0$ t.c $|f(x) - f(0)| < |x|\, M$. Vale dunque

$$\int_{|x|<a} |\varphi_n(x)|\, |f(x) - f(0)| < aM \int_{|x|<a} |\varphi_n(x)| < aMC_L\ L > a$$

3. $I_3 \to 0$ per $n \to \infty$ grazie alla condizione 3. Infatti

$$\int_{|x|>a} dx\, \varphi_n(x) f(x) = \int_a^{1/a} \varphi_n(x) f(x) + \int_{-1/a}^{-a} \varphi_n(x) f(x)$$

per $1/a$ abbastanza grande da essere oltre il supporto di f .

In conclusione quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \varphi_n(x)\, f(x) \underbrace{\to}_{n\to\infty} f(0) \quad \forall f \in \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \langle \varphi_n, f \rangle \underbrace{\to}_{n\to\infty} \langle \delta, f \rangle \text{ i.e. } \varphi_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \delta$$

Questo teorema fornisce delle condizioni *sufficienti ma non necessarie* affinchè una successione di distribuzioni converga al funzionale delta. Il seguente esempio mostra infatti che esistono successioni di distribuzioni convergenti alla δ che non soddisfano le condizioni del teorema.

Esempio

$$\varphi_\Lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\Lambda dk\,\cos(kx) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\Lambda x)}{x}$$

La condizione 1. è certamente soddisfatta, in quanto

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} dx\,\frac{\sin(\Lambda x)}{x} = \underbrace{\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-a\Lambda}^{a\Lambda} dy\,\frac{\sin(y)}{y}}_{y=\Lambda x} = \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy\,\frac{\sin(y)}{y}}_{\pi} = 1$$

Analogamente, la condizione 3. è verificata. Infatti

$$\frac{1}{\pi}\int_{a<|x|<1/a} dx\,\frac{\sin(\Lambda x)}{x} f(x) = \frac{1}{\pi}\left[\int_a^{1/a} dx\; + \int_{-1/a}^{a} dx\right]\frac{\sin(\Lambda x)}{x} f(x) \underbrace{\to}_{\Lambda\to\infty} 0$$

in quanto $\frac{f(x)}{x}$ soddisfa le ipotesi del lemma di Riemann-Lebesgue nei due intervalli $[-1/a,-a]\,,[a,1/a]$.

Tuttavia la condizione 2. non è verificata, dal momento che la costante C_L non può essere scelta indipendentemente da L .

Dunque la successione non rispetta le ipotesi del teorema. Ciononostante

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{\sin(\Lambda x)}{x} = \delta$$

Infatti

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,\frac{\sin(\Lambda x)}{x} f(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} dx\,\frac{\sin(\Lambda x)}{x}\,(f(0)+xg(x)) + \frac{1}{\pi}\int_{|x|>a} dx\,\frac{\sin(\Lambda x)}{x} f(x) \\ &= \frac{2}{\pi} f(0)\underbrace{\int_0^\infty dy\,\frac{\sin(y)}{y}}_{I_1} + \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{-a}^{a} dx\, g(x)\sin(\Lambda x)}_{I_2} + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_a^{1/a} dx\,\frac{\sin(\Lambda x)}{x}\,(f(x)+f(-x))}_{I_3}\end{aligned}$$

Ora:

1. $I_1 = \frac{\pi}{2}$
2. $|I_2| = \left|\int_{-a}^{a}\sin(\Lambda x) g(x)\right| \le \int_{-a}^{a}|g(x)| \le 2aM$
3. $I_3 \to 0$ per $\Lambda\to\infty$ per il lemma di Riemann-Lebesgue applicato a $h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{x}$

Dunque

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\left\langle\frac{\sin(\Lambda x)}{\pi x}, f\right\rangle = f(0) \Rightarrow \frac{\sin(\Lambda x)}{\pi x}\underbrace{\to}_{\Lambda\to\infty}\delta$$

Il seguente esempio mostra invece una successione che rispetta le ipotesi del teorema.

Esempio (Esempio: rappresentazione Lorenziana)

Consideriamo

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} \quad \epsilon = \frac{1}{k}$$

e verifichiamo che le ipotesi del teorema sono soddisfatte.

1.
$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} dx\, \frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\epsilon})\,\Big|_{-a}^{a} \underbrace{\rightarrow}_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\left(\arctan(\infty) - \arctan(-\infty)\right) = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

2. $\frac{1}{\pi}\int_{-L}^{L}\left|\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}\right| = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\left(\frac{L}{\epsilon}\right) - \arctan\left(\frac{-L}{\epsilon}\right)\right) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{L}{\epsilon}\right) < 1 (C_L = 1)$

3. $\frac{1}{\pi}\left|\int_{a<|x|<1/a} dx\, \frac{\epsilon f(x)}{x^2+\epsilon^2}\right| \leq \frac{1}{\pi}\int_{a<|x|<1/a} dx \left|\frac{\epsilon f(x)}{x^2+\epsilon^2}\right| \leq \frac{M\epsilon}{a^2+\epsilon^2} 2\left(\frac{1}{a} - a\right) \propto \epsilon \underbrace{\rightarrow}_{\epsilon\to 0} 0$

La rappresentazione lorenziana consente di dimostrare la *formula di Plemely-Soch7otzki.*

1.6 Heaviside step functional

1.7 Hadamard finite part e principal value

Formula di Plemely-Sochotzki

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{x \pm i\epsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta(x)$$

Capitolo 2

Distribuzioni in S'

Capitolo 3

Convoluzione

Capitolo 4

Fonti per testo e immagini; autori; licenze

4.1 Testo

- **Utente:Sofia/Teoria delle distribuzioni/Distribuzioni in D'/Introduzione** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ASofia/Teoria_delle_distribuzioni/Distribuzioni_in_D'/Introduzione?oldid=38583 *Contributori:* Sofia
- **Utente:Sofia/Teoria delle distribuzioni/Distribuzioni in D'/Lo spazio D delle funzioni di prova** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ASofia/Teoria_delle_distribuzioni/Distribuzioni_in_D'/Lo_spazio_D_delle_funzioni_di_prova?oldid=38658 *Contributori:* Sofia
- **Utente:Sofia/Teoria delle distribuzioni/Distribuzioni in D'/Distribuzioni su D: lo spazio D'** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ASofia/Teoria_delle_distribuzioni/Distribuzioni_in_D'/Distribuzioni_su_D%3A_lo_spazio_D'?oldid=38657 *Contributori:* Sofia
- **Utente:Sofia/Teoria delle distribuzioni/Distribuzioni in D'/Operazioni sulle distribuzioni** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ASofia/Teoria_delle_distribuzioni/Distribuzioni_in_D'/Operazioni_sulle_distribuzioni?oldid=38566 *Contributori:* Sofia
- **Utente:Sofia/Teoria delle distribuzioni/Distribuzioni in D'/Delta di Dirac** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ASofia/Teoria_delle_distribuzioni/Distribuzioni_in_D'/Delta_di_Dirac?oldid=47368 *Contributori:* Sofia
- **Utente:Sofia/Teoria delle distribuzioni/Distribuzioni in D'/Heaviside step functional** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ASofia/Teoria_delle_distribuzioni/Distribuzioni_in_D'/Heaviside_step_functional?oldid=38575 *Contributori:* Sofia
- **Utente:Sofia/Teoria delle distribuzioni/Distribuzioni in D'/Hadamard finite part e principal value** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ASofia/Teoria_delle_distribuzioni/Distribuzioni_in_D'/Hadamard_finite_part_e_principal_value?oldid=38641 *Contributori:* Sofia

4.2 Immagini

- **File:Mollifier_Illustration.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/37/Mollifier_Illustration.svg *Licenza:* CC0 *Contributori:* *Artista originale:* Fred the Oyster

4.3 Licenza dell'opera