Tutorato Algebra I
Lezione V
16-04-2014

Esercizio 1. [DIK] A anello commutativo unitario e $a \in A$.

(1) Dimostrare che se a è nilpotente, allora $a+1$ è invertibile.
(2) Dimostrare che se a è nilpotente e u invertibile, allora $a+u$ è invertibile.

Esercizio 2. [DIK] A anello commutativo unitario finito. Si dimostri che:

(1) ogni ideale primo di A è massimale.
(2) esiste un $k \in \mathbb{N}$ tale che $a^k = 0$ per tutti gli elementi nilpotenti a in A.

Esercizio 2. [DIK] Sia A un dominio d'integrità e $a, b \in A$. Supponiamo che esistano interi positivi m, n coprimi tali che $a^n = b^n$ e $a^m = b^m$, allora $a = b$.

Esercizio 3. [DIK] Dato A un anello commutativo unitario, sia $e \in A \neq 0, 1$ tale che $e^2 = e$. Allora gli ideali principali $A_1 = (e)$ e $A_2 = (1-e)$, considerati come anelli, sono unitari e $A \cong A_1 \times A_2$.

Esercizio 4. [DIK] Sia A un dominio a ideali principali e sia I un ideale di A non banale. Dimostrare che ogni elemento non invertibile del quoziente $B = A/I$ è divisore dello zero.

Esercizio 5. [DIK] Trovare un isomorfismo di anelli

$$\mathbb{Z}_{11}[x]/(x^2+1) \qquad \mathbb{Z}_{11}[x]/(x^2+x+4)$$

Esercizio 6. (omomorfismo di Frobenius) [BOS] Sia K un campo in caratteristica $p > 0$ e la seguente applicazione

$$\begin{aligned} \sigma : K &\longrightarrow K \\ a &\longrightarrow a^p. \end{aligned}$$

(1) Dimostrare che σ è un omomorfismo di campi.
(2) Dimostrare che se K è finito allora l'omomorfismo di Frobenius σ è un automorfismo. É necessaria l'ipotesi di finitezza?
(3) Si descriva esplicitamente l'omomorfismo di Frobenius di $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
(4) Determinare se il polinomio $p(x) = x^4 + x^2 + 1$ nell'anello di polinomi $\mathbb{Z}_2[x]$ sia irriducibile.

Riferimenti bibliografici

[DIK] D. Dikranjan, M. S. Lucido, *Aritmetica e algebra*, Liguori Editore, 2007.
[BOS] Siegfried Bosch, *Algebra*, 7. Auflage, Springer Verlag 2009.