Tutorato Algebra I
Lezione I
02-11-2013

Esercizio 1. (Preliminari) Sia $f : X \to Y$ una funzione, $A \in X$ e $B \in Y$

(1) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ e vale l'eguaglianza sse f è iniettiva;
(2) $B \supseteq f(f^{-1}(B))$ e vale l'eguaglianza sse f è suriettiva;
(3) [DIK] Sia $X = Y$ e $f \circ f \circ f = id_X$, si può concludere che f è biiettiva?
(4) Siano A e B insiemi e $\mathcal{P}(X)$ insieme delle parti dell'insieme X. Quale delle seguenti proposizioni è vera?
- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$;
- $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$;
- $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \times B)$.

Esercizio 2. [DIK] (Insieme delle parti) Siano A un insieme e B un sottoinsieme di A, $\emptyset \neq B \neq A$. Sia

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \\ X &\longrightarrow B \setminus X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \\ X &\longrightarrow B \cap X \end{aligned}$$

(1) f è iniettiva? f è suriettiva? $f^{-1}(B) =?$;
(2) g è iniettiva? g è suriettiva? $g^{-1}(B) =?$ $g^{-1}(A) =?$ $g^{-1}(\emptyset) =?$.

Esercizio 3. [DIK] (Insieme delle parti) Sia X un insieme e sia $j_X(x) = \{x\}$. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione e sia $f_* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ tale che $f_*(B) = f(B)$.
Si provi che:

(1) j_X è iniettiva e che $f_* \circ j_X = j_Y \circ f$;
(2) f è iniettiva sse f_* iniettiva;
(3) f è suriettiva sse f_* suriettiva;

Esercizio 4. [DIK] Siano (N_1, s_1) e (N_2, s_2) due sistemi di Peano, allora esiste un'unica biiezione $f : N_1 \to N_2$, tale che se $\{a_1\} = N_1 \setminus s_1(N_1)$ e $\{a_2\} = N_2 \setminus s_2(N_2)$, si ha $f(a_1) = a_2$ e $f(s_1(n)) = s_2(f(n))$ per ogni $n \in N_1$.

Esercizio 5. [BML] Dimostrare che $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ non è numerabile.

Hint. Se $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è una qualsiasi successione di funzioni $s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si definisca $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $g(n) = s_n(n) + 1 \dots$

Esercizio 6. (Cardinalità) Provare se esiste una corrispondenza biunivoca tra:

(1) $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$;
(2) $X \neq \emptyset$ insieme e $\mathcal{P}(X)$;
(3) $\mathcal{P}(X)$ e $\mathrm{Hom}(X, \{0,1\})$;
(4) (*) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}$;
(5) $\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$ e $\mathrm{Hom}(A \times B, C)$;
(6) (*) $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \{0,1\})$ e $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Siano A e B insiemi, $\mathrm{Hom}(A, B) = B^A =: \{f : A \to B\}$.

Esercizio 7. (Principio di induzione)[BML] Dimostrare per induzione:

(1)
$$1 + 2 + 3 \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$
(2)
$$1 + 4 + 9 \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$
(3)
$$1 + 8 + 27 \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Esercizio 8. (Binomio di Newton) Sia A un anello commutativo. Provare, per induzione su n, che per ogni a, $b \in A$ vale la formula del binomio di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Esercizio 9. (Numeri di Fibonacci) La successione di Fibonacci è definita in maniera ricorsiva

$$\begin{aligned} &F_0 = 0; \\ &F_1 = 1; \\ &F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \qquad \text{per } k > 1. \end{aligned}$$

Provare, per induzione su k, la formula di Binet per i numeri di Fibonacci

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5})}{2} \right)^k \right].$$

Calcolare la $k-$esima potenza della matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per saperne di più, leggi *La formula di Binet per i numeri di Fibonacci: una dimostrazione con l'algebra lineare* di Francesco Daddi.

Riferimenti bibliografici

[BML] Garrett Birkhoff, Mac Lane, Saunders (1967), *Algebra*, Chelsea;

[DIK] Dikran Dikranjan, Maria Silva Lucido, *Aritmetica e algebra*, Liguori Editore, 2007.