Prova scritta di Istituzioni di Analisi
12/6/2012

Primo modulo:

1.

Sia $X = L^2(-\infty, +\infty)$

i) mostrare che le funzioni $f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ sono linearmente indipendenti e che se $P(x)$ e' un polinomio, la funzione $P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ appartiene a X;
ii) calcolare esplicitamente le prime tre funzioni ottenute applicando il procedimento di ortogonalizzazione all' insieme $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$;
iii) calcolare il prodotto scalare (f_n, φ_0) , dove φ_0 e' la prima funzione ottenuta in ii).

2.

i) Mostrare che l'insieme dei numeri razionali della forma $\frac{m}{2^n}$, dove $m, n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq m \leq 2^n$ e' denso in $[0,1]$;
ii) sia X uno spazio normato e A un sottoinsieme chiuso di X; dimostrare che A e' convesso se e solo se $x, y \in A \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in A$.

3.

Dimostrare che l^∞ non e' separabile.

Primo e secondo modulo:

4.

Sia X uno spazio normato $(X \neq \{0\})$ e X^* il suo duale algebrico
i) dimostrare che X^* e' chiuso in $\mathbb{R}^X$ per la topologia prodotto;
ii) dimostrare che $\mathbb{R}^X$ non e' primo numerabile.