Tutorato di Algebra I
Foglio di esercizi I

Esercizio. [BML] Dimostrare per induzione:

(1)
$$1 + 2 + 3 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

(2)
$$1 + 4 + 9 \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

(3)
$$1 + 8 + 27 \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2;$$

Esercizio. [BML] Dimostrare che non esistono numeri naturali tra n e $n+1$.

Esercizio. Siano X e Y insiemi finiti, calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi:

(1) $X^Y = \{f : X \to Y\}$;
(2) $\{f \in X^Y \text{ iniettive}\}$;
(3) $\{f \in X^Y \text{ suriettive}\}$;
(4) $\{f \in X^Y \text{ biunivoche}\}$;
(5) $\{f \in X^X$ che fissano n elementi, i.e. $\exists Z \subseteq X$, $|Z| = n$, tale che $\forall x \in Z\; f(x) = x\}$.

Esercizio. [BML] (Paradosso di Galileo) Se X è numerabile, dimostrare che esiste una iniezione $X \to X$ che non è una bijezione.

Esercizio. [BML] Dimostrare che $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ non è numerabile.

Hint. Se $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è una qualsiasi successione di funzioni $s_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si definisca $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $g(n) = s_n(n) + 1 \ldots$

Esercizio. [BML] Dimostrare che:

(1) $n^2 \equiv_8 0, 1$ oppure $4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
(2) Se $n \equiv_8 7$, n non può essere espresso come somma di tre quadrati;
(3) La somma dei cubi di tre interi consecutivi è divisibile per 9.

Esercizio. [BOS](*) Un semigruppo G è un gruppo se e solo se $\forall a, b \in G$ l'equazioni $ax = b$ e $xa = b$ hanno ciascuna una e una sola soluzione.

Esercizio. Sia G gruppo e $\emptyset \neq H \subseteq G$ sottoinsieme di G. H è un sottogruppo di G se e solo se $\forall a, b \in G \quad ab^{-1} \in H$.

Esercizio. Sia G gruppo e $\emptyset \neq H \subseteq G$ sottoinsieme finito di G. H è un sottogruppo di G se e solo se H è chiuso rispetto al prodotto.

Esercizio. Sia G gruppo e $H, K \leq G$ sottogruppi di G. $H \cup K$ è un sottogruppo di G se e solo se $H \subseteq K$ o $K \subseteq H$.

Esercizio. Sia $\phi : G \to H$ morfismo di gruppi. Provare che:

(1) $\phi(1_G) = 1_H$;
(2) $\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1} \quad \forall x \in G$;
(3) $\forall x \in G$, di ordine finito, $o(\phi(x)) | o(x)$ e se ϕ è una bijezione, $o(\phi(x)) = o(x)$.

Esercizio. Determinare gli automorfismi del gruppo additivo $\mathbb{Z}$.

Esercizio. [BOS] La funzione esponenziale definisce un isomorfismo tra il gruppo additivo $\mathbb{R}$ e il gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}_{>0}$. Riflettere sulla possibile esistenza di un isomorfismo tra il gruppo additivo $\mathbb{Q}$ e il gruppo moltiplicativo $\mathbb{Q}_{>0}$.

Esercizio. [BML] Riflettere sulla possibile esistenza di un isomorfismo tra il gruppo additivo $\mathbb{R}$ e il gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}_{\neq 0}$.

Esercizio. [BML] Siano $\{a_i\}_{i=1,\dots,m+n}$ sequenza di elementi di un monoide moltiplicativo, dimostrare che

$$\left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\prod_{j=1}^{n} a_{m+j}\right) = \prod_{k=1}^{m+n} a_k.$$

Esercizio. [BOS] Sia G un gruppo abeliano finito. Allora

$$\prod_{g \in G} g^2 = 1$$

(cfr. Teorema di Wilson).

Esercizio. [BOS] Se G è un gruppo e $a^2 = 1$ per ogni $a \in G$, allora G è abeliano.

Esercizio. Siano $A_1, \dots, A_n$ anelli. Si definiscano addizione e moltiplicazione in $A_1 \times \dots \times A_n$, prodotto cartesiano degli A_i, mediante le:

$$(a_1, \dots a_n) + (b_1, \dots b_n) = (a_1 + b_1, \dots a_n + b_n);$$
$$a_1, \dots a_n) \cdot (b_1, \dots b_n) = (a_1 \cdot b_1, \dots a_n \cdot b_n).$$

Verificare che queste operazioni dotano $A_1 \times \dots \times A_n$ della struttura di anello e specificare zero ed unità. Quando $A_1 \times \dots \times A_n$ è un dominio di integrità?

Esercizio. Sia M A-modulo. Dotiamo l'A-modulo $T(M) = A \oplus M$ del prodotto così definito:

$$(a, m) \cdot (b, n) =: (ab, an + bm).$$

Verificare che:

(1) $T(M)$ è un anello commutativo con unità;
(2) La mappa
$$A \longrightarrow T(M)$$
$$a \longrightarrow (a, 0)$$
è un morfismo di anelli;
(3) $M \subseteq T(M)$ è un ideale tale che $M^2 = 0$.

Esercizio. Sia ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{F}_2\}$. Si considerino le usuali operazioni binarie di somma e prodotto

$$(f + g)(n) =: f(n) + g(n);$$
$$(f \cdot g)(n) =: f(n) \cdot g(n).$$

(1) Verificare che ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ è un anello.
(2) ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ è un anello commutativo?
(3) ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ è un dominio di integrità?
(4) ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ è un campo?
(5) ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ è un ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$-modulo?
(6) Determinare $\mathrm{char}({\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}})$.

Siano

$$\mathfrak{a}_1 = \{f \in {\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}} | f(2n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\};$$
$$\mathfrak{a}_2 = \{f \in {\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}} | f(2n+1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

(1) Verificare che $\mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ è un ideale di ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$.
(2) (*) Dimostrare che gli anelli A e $A \times A$ sono isomorfi invocando il teorema cinese dei resti.

(3) Descrivere esplicitamente l'isomorfismo di anelli del punto (2). É un morfismo di A-moduli?

Riferimenti bibliografici

[BML] Garrett Birkhoff, Mac Lane, Saunders (1967), *Algebra*, Chelsea;
[BOS] Siegfried Bosch, *Algebra*, 7. Auflage, Springer Verlag 2009.