Tutorato Algebra I
Lezione IV
11-04-2014

**Esercizio 1.** [VEZ] Sia $S$ un insieme.

$$\phi_S : \mathrm{Hom}(S,S) \to \mathrm{Hom}(S,S)$$
$$f \longrightarrow f \circ f.$$

(1) Stabile sotto quali condizioni $\mathrm{Hom}(S,S)$ e $S$ sono equipollenti.
(2) Stabilire il minimo $k \in \mathbb{N}$ tale che l'applicazione $\phi_{\{1,2,\dots,k\}}$ non è suriettiva [iniettiva].
(3) Sia $S$ infinito. Stabilire se $\phi_S$ è suriettiva [iniettiva].

**Esercizio 2.** [VEZ] Sia $S$ un insieme e $k \in \mathbb{N}$ fissato. Sia $\mathrm{Hom}(S,S)$ il monoide delle funzioni da $S$ a valori in $S$ e $\mathrm{Sym}(S)$ il sottomonoide (gruppo) delle funzioni biiettive. Sia

$$\phi_k : \mathrm{Hom}(S,S) \to \mathrm{Hom}(S,S)$$
$$f \longrightarrow f^k.$$

(1) $\phi_k^{-1}(id_k) \subseteq \mathrm{Sym}(S)$?
(2) $\phi_k^{-1}(id_k) = \mathrm{Sym}(S)$?
(3) $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} \phi_k^{-1}(id_k) \subseteq \mathrm{Sym}(S)$?
(4) $\phi_k^{-1}(\mathrm{Sym}(S)) \subseteq \mathrm{Sym}(S)$?

**Esercizio 3.** [DIK] Sia $f : X \to X$ iniettiva non suriettiva. Si provi che per ogni $x \in X \setminus f(X)$ esiste una funzione $h : \mathbb{N} \to X$ con $h(0) = x$.

**Esercizio 4.** [DIK] **Sia $X$ un insieme infinito. Dimostrare che per ogni $x \in X$ esiste una biezione $f : X \to X \setminus \{x\}$.**

(1) Esibire esplicitamente una biezione come nell'enunciato dell'Esercizio 4 per $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
(2) Osservare che l'enunciato dell'Esercizio 4 è equivalente alla seguente proposizione: per ogni singleton $\{*\}$ disgiunto da $X$ esiste una biezione $f : X \to X \cup \{*\}$.
(3) **Lemma 1.** Per ogni $x \in X$ esiste una funzione $h : \mathbb{N} \to X$ iniettiva tale che $h(0) = x$.

(4) **Lemma 2.** Sia $X = \bigcup_{i\in I} C_i$ una partizione e sia $Y$ un sottoinsieme di $X$. Se per ogni $i \in I$ $h_i : C_i \to C_i \cap Y$ è un'applicazione iniettiva, si provi che l'applicazione $h : X \to Y$ definita da $h(x) =: h_i(x)$ per $x \in C_i$ è iniettiva. Inoltre $h$ è biettiva se e solo se ogni $h_i$ è biettiva. In particolare osservare che se per ogni $i \in I$ esiste una biezione $h_i : C_i \to C_i \cap Y$, provare che esiste anche una biezione $h : X \to Y$.
(5) Dimostrare l'enunciato dell'Esercizio 4.
(6) **Corollario.** Per ogni insieme finito $F \subseteq X$ esiste una biezione $f : X \to X \setminus F$.

**Esercizio 5.** [DIK] Sia $X$ e $Y$ insiemi e siano assegnate le seguenti partizioni

$$X = \bigsqcup_{i\in I} X_i \qquad Y = \bigsqcup_{i\in I} Y_i$$

con $|X_i| = |Y_i|$ per ogni $i \in I$. Provare che $X$ e $Y$ sono equipollenti.

**Esercizio 6.** [DIK] Sia $X$ un insieme infinito. Dimostrare che:
(1) esiste una partizione di $X$ in insiemi numerabili, i.e.

$$\mathcal{P} = \{X_i : i \in I\}$$

tale che $X = \sqcup_{i\in I} X_i$ e $|X_i| = |\mathbb{N}|$;
(2) $|X| = |X \times \{0, 1\}|$;
(3) esiste una partizione di $X$ tale che $X = X_1 \sqcup X_2$ e $|X_1| = |X_2| = |X|$.

## Riferimenti bibliografici

[DIK] D. Dikranjan, M. S. Lucido, *Aritmetica e algebra*, Liguori Editore, 2007.
[VEZ] Alberto Vezzani, http://users.mat.unimi.it/users/vezzani/Pages/Teaching.htm.