Tutorato Algebra I
Lezione II
02-19-2013

Esercizio 1. [DIK] Determinare gli automorfismi ϕ dell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi di Gauss e l'ideale generato da $(2+i)$. Sia l'anello quoziente

$$A = \frac{\mathbb{Z}[i]}{(2+i)}$$

Determinare char(A) e la cardinalità di A.

Esercizio 3. Sia l'anello quoziente $\mathbb{Z}_5[x]/(x^6-x^2+x-1)$. Calcolarne la cardinalità e affermare se ammette elementi nilpotenti. (*) Dimostrare che l'anello quoziente $\mathbb{Z}[x]/(x^6 - x^2 + x - 1)$ è ridotto (non ammette elementi nilpotenti).

Esercizio 4. [DIK] Nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si considerino gli ideali $I = (2)$ e $J = (3)$. Dire se gli anelli quoziente A/I e A/J sono campi.

Esercizio 5. [DIK] Nell'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$, sia $I = (5)$. Studiare l'anello quoziente A/I:

(1) provare che se $a \equiv 0 \bmod 5$, allora $a + b\sqrt{5} + I$ è nilpotente;
(2) provare che se $a \not\equiv 0 \bmod 5$, allora $a + b\sqrt{5} + I$ è invertibile;
(3) quali sono gli ideali di A/I?

Esercizio 6. [DIK] Sia l'anello $A = \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Sia $\alpha = x + \sqrt{5}y \in A$ definiamo la norma di α con $\nu(\alpha) = x^2 - 5y^2$. Sia $M = \{\alpha \in A : \nu(\alpha) \text{ pari}\}$. Dire se M è un ideale di A e, in caso affermativo, dire se M è massimale.

Esercizio 7. Siano I in $\mathbb{Z}[x]$ l'ideale generato da $p(x) = x^2 + 3$ e l'anello quoziente $\mathbb{Z}[x]/I$. Trovarne gli elementi invertibili e dimostrare che non è un U.F.D.

Esercizio 8. (*) Siano K un campo, B un dominio ma **non** un campo e un morfismo d'anelli $f : K[x] \to B$. Mostrare che se un polinomio irriducibile in $K[x]$ appartiene al nucleo del morfismo f, allora f non è suriettiva.

Esercizio 9. Nell'anello $\mathbb{Z}_7[x]$, siano

$$f(x) = 3x^4 + 2x^3 + 2x + 5 \qquad g(x) = 2x^2 + 5x - 1$$

due polinomi. Calcolare il quoziente della divisione euclidea di $f(x)$ per $g(x)$ e determinare un M.C.D. tra f e g.

Esercizio 10. [AVI] (*) Sia K un campo e a, $b \in K$ con $a \neq 0$. Provare che un polinomio $f(x) \in K[x]$ è irriducibile se e solo se $f(ax + b)$ è irriducibile.

Esercizio 11. Determinare tutti i polinomi irriducibili in $\mathbb{F}_2[x]$ fino al grado 5 e quelli in $\mathbb{F}_3[x]$ fino al grado 3.

Esercizio 12. [DIK] Si considerino in $\mathbb{Z}[x]$ i polinomi

$$f(x) = x^3 + x + 1 \qquad g(x) = x^4 + x^2 + 1$$

e gli ideali $I = (2, f(x))$ e $J = (2, g(x))$.

- Determinare quale degli ideali I e J è primo;
- Determinare quale degli ideali I e J è massimale;
- Decomporre $x^4 + x^2 + 1$ nel prodotto di fattori irriducibili in $\mathbb{F}_7[x]$.

Esercizio 13. (**) [AVI] Determinare il valore del parametro α per i quali il polinomio $f(x) = x^3 + x + \alpha$ è irriducibile su $\mathbb{F}_5[x]$. Considerata la classe di x^2+4x+2 nell'anello quoziente $\mathbb{F}_5[x]/(f(x))$, se ne determini l'inverso nei casi possibili.

Esercizio 14. Si provi l'irriducibilità dei seguenti polinomi

(1) $f(x) = x^4 + 830x^3 + 1200x^2 + 213x + 71$ in $\mathbb{Q}[x]$;
(2) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 4$ in $\mathbb{Q}[x]$;
(3) $f(x) = 10x^3 - 13x - 8$ in $\mathbb{Q}[x]$;
(4) $f(x) = x^4 + x^3 + 1$ in $\mathbb{Q}[x]$;
(5) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 18 + 3$ in $\mathbb{Q}[x]$;
(6) $f(x) = x^p + px + 1$ con p primo dispari (hint: $f(x - 1)$);
(7) (**) $f(x) = 1 + x + \ldots + x^{p-1} = \frac{x^p-1}{x-1}$ in $\mathbb{Q}[x]$;
(8) (**) $f(x) = x^2 - y^3$ in $\mathbb{Q}[x, y]$;
(9) (**) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ in $\mathbb{Q}[x, y]$.

Esercizio 15. Siano $A_1, \ldots, A_n$ anelli. Si definiscano addizione e moltiplicazione in $A_1 \times \ldots \times A_n$, prodotto cartesiano degli A_i, mediante le:

$$(a_1, \ldots a_n) + (b_1, \ldots b_n) = (a_1 + b_1, \ldots a_n + b_n);$$
$$a_1, \ldots a_n) \cdot (b_1, \ldots b_n) = (a_1 \cdot b_1, \ldots a_n \cdot b_n).$$

Verificare che queste operazioni dotano $A_1 \times \ldots \times A_n$ della struttura di anello e specificare zero ed unità. Quando $A_1 \times \ldots \times A_n$ è un dominio di integrità?

Esercizio 16. Sia ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{F}_2\}$. Si considerino le usuali operazioni binarie di somma e prodotto

$$(f + g)(n) =: f(n) + g(n);$$
$$(f \cdot g)(n) =: f(n) \cdot g(n).$$

(1) Verificare che ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ è un anello.
(2) ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ è un anello commutativo?
(3) ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ è un dominio di integrità?
(4) ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ è un campo?
(5) ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ è un ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$-modulo?
(6) Determinare $\mathrm{char}({\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}})$.

Siano

$$\mathfrak{a}_1 = \{f \in {\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}} | f(2n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\};$$
$$\mathfrak{a}_2 = \{f \in {\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}} | f(2n+1) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

(1) Verificare che $\mathfrak{a}_\mathfrak{i}$ è un ideale di ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$.
(2) (*) Dimostrare che gli anelli ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ e ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}} \times {\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$ sono isomorfi invocando il teorema cinese dei resti.
(3) Descrivere esplicitamente l'isomorfismo di anelli del punto (2). É un morfismo di ${\mathbb{F}_2}^{\mathbb{N}}$-moduli?

Riferimenti bibliografici

[AVI] Marina Avitabile, http://www.matapp.unimib.it/ avitabile/alg1/alg1.html;
[BML] Garrett Birkhoff, Mac Lane, Saunders (1967), *Algebra*, Chelsea;
[DIK] Dikran Dikranjan, Maria Silva Lucido, *Aritmetica e algebra*, Liguori Editore, 2007.