Corso:Algebra IV I1/Appendici/Separabilità e inseparabilità

1 Campi perfetti

Sia F un campo di caratteristica p , con $p > 0$ primo. Allora esiste l'omomorfismo di Frobenius $\phi : F \to F$ tale che $\phi(a) = a^p$. Vale che

$$\phi(a+b) = (a+b)^p = a^p + b^p = \phi(a) + \phi(b)$$
$$\phi(ab) = (ab)^p = a^p * b^p = \phi(a) * \phi(b)$$

Inoltre $\phi(1) = 1$ e in particolare ϕ è iniettivo.

L'immagine di ϕ , indicata con F^p , è l'insieme $\{a^p,\ a \in F\}$ ed è un sottocampo di F .

Definizione 6.1

F si dice *perfetto* se $F^p = F$, cioè se ϕ è suriettivo: in altre parole, F è perfetto se comunque prendo $a \in F$, esiste $b \in F$ tale che $a = b^p$.

Esempio 6.1

Ogni campo F finito di caratteristica prima è tale che $|F| = |F^p|$, e quindi è perfetto.

Esempio 6.2 (esempio di campo non perfetto infinito)

Considero $F = F_p(t)$ campo delle funzioni razionali a coefficienti in F_p nell'indeterminata t . Allora $t \notin F^p$. Infatti, se $t \in F^p$, esisterebbe $f(t)/g(t) \in F$ con $f(t), g(t) \in F[t]$, tale che $t = (f(t)/g(t))^p = \frac{f(t)^p}{g(t)^p}$, cioè $t * (g(t))^p = (f(t))^p$, ma questo non può avvenire perché se così fosse si avrebbe $p\mathrm{gr(f(t))} = 1 + \mathrm{p} * \mathrm{gr(g(t))}$.

Teorema 6.3

Sia $f(x) \in F(x)$ un polinomio irriducibile e non separabile. Allora carF = p primo, e F non è perfetto (e quindi in particolare non è finito).

Dimostrazione

Dire f irriducibile e non separabile significa che $f'(x) = 0$, e quindi necessariamente carF = p primo, e $f(x) = g(x^p)$ per un certo $g(x) \in F[x]$. Ora $g(x)$ è un polinomio della forma $\sum_i a_i x^i$, $a_i \in F$. Se F fosse perfetto, si avrebbe che

$a_i = b_i^p$ per un certo $b_i \in F$, e quindi

$$f(x) = \sum_i a_i x^{ip} = \sum_i b_i^p (x^i)^p$$

$$= \sum_i (b_i x^i)^p = (\sum_i b_i x^i)^p = (h(x))^p$$

dove ho posto $h(x) = \sum_i b_i x^i$. Quindi $f(x) = (h(x))^p$ ma f è irriducibile

quindi questo non può avvenire.

Corollario 6.1

Sia F un campo con carF = 0 o carF = p primo e F perfetto. Allora ogni estensione algebrica di F è separabile.

Dimostrazione

Sia $E \supseteq F$ un'estensione algebrica di F , allora ogni $\alpha \in E$ è algebrico su F . Il polinomio minimo di α che è irriducibile in $F[x]$ dev'essere separabile, altrimenti per il lemma precedente F non sarebbe perfetto.

Corollario 6.2

Sia F un campo con caratteristica prima, e $f(x) \in F[x]$ un polinomio irriducibile allora $f(x) = g(x^{p^n})$ per $n \geq 0$, e per un certo polinomio $g(x)$ irriducibile e separabile.

Dimostrazione

CASO 1: Se $f'(x) \neq 0$, $f(x)$ è separabile, allora il risultato è vero se prendo $n = 0$, e $g(x) = f(x)$.

CASO 2: Se invece $f'(x) = 0$, $f(x) = h(x^p)$ per un certo $h(x) \in F[x]$. Ora $h(x)$ dev'essere irriducibile, perché se h ammettesse una fattorizzazione propria, si avrebbe $h(x) = s(x) * t(x)$, e $f(x) = h(x^p) = s(x^p) * t(x^p)$, ma f è irriducibile e quindi questo non può avvenire. In particolare gr(h(x)) < gr(f(x)) .

Per induzione sul grado, il risultato è vero per $h(x)$, cioè posso scrivere $h(x) = g(x^{p^n})$, con $n \geq 0$ e $g(x)$ separabile e irriducibile. Allora $f(x) = h(x^p) = g(x^{p^{n+1}})$ e quindi vale l'asserto anche per f .

2 Estensione puramente inseparabile

Definizione 6.2

Data $E \supseteq F$ un'estensione algebrica, $E \supseteq F$ si dice *separabile* (su F) se ogni elemento di E è separabile su F , ovvero se per ogni $\alpha \in E$, il polinomio minimo di α in $F[x]$ è un polinomio separabile (su F).

Definizione 6.3

Data $E \supseteq F$ un'estensione algebrica, dico che $E \supseteq F$ è *puramente inseparabile* se gli unici elementi di E separabili su F sono gli elementi di F (un'estensione puramente inseparabile ha il minor numero possibile di elementi separabili).

Esempio 6.3

F come estensione di se stesso è puramente inseparabile.

Osservazione 6.1

Se $E \supset F$ è un'estensione algebrica e puramente inseparabile, allora carF = p e F non può essere perfetto per il primo teorema dimostrato.

Teorema 6.4

Sia $E \supseteq F$ un'estensione algebrica, con F campo di caratteristica p prima. Allora sono equivalenti queste tre affermazioni:

1. E è puramente inseparabile su F ;
2. comunque prendo $\alpha \in E$, $\alpha^{p^n} \in F$ per $n \geq 0$;
3. ogni elemento di E ha polinomio minimo su F della forma $x^{p^n} - a$, con $a \in F$ e $n \geq 0$.

Corollario 6.3

Sia $E = F(\alpha)$ un'estensione semplice, con F di caratteristica p primo, e $\alpha^{p^n} \in F$ per un certo $n \geq 0$. Allora E è puramente inseparabile su F .

Dimostrazione

Sia $\beta \in E = F(\alpha)$, **devo mostrare che** $\beta^{p^*} \in F$. Infatti, se questo avviene, E è puramente inseparabile su F per il teorema appena enunciato.

$\beta \in F(\alpha)$, allora $\beta = a_m\alpha^m + a_{m-1}\alpha^{m-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0$ con $a_i \in F$. Quindi, siccome siamo in caratteristica p

$$\beta^{p^n} = a_m^{p^n} * \alpha^{p^n * m} + a_{m-1}^{p^n} * \alpha^{p^n*(m-1)} + \cdots + a_1^{p^n}\alpha^{p^n} + a_0^{p^n} \in F$$

perché per ipotesi $\alpha^{p^n} \in F$.

Esempio 6.4

Per avere un esempio non banale di estensione puramente inseparabile prendo F un campo di caratteristica p primo, non perfetto. Allora esiste un elemento

$a \in F \setminus F^p$. Pongo $f(x) = x^p - a \in F[x]$, sia M il campo di spezzamento per $f(x)$ su F , e α una radice di $f(x)$. Considero $E = F(\alpha)$. Siccome $f(\alpha) = 0$, $\alpha^p = a \in F$, quindi E è un'estensione di F puramente inseparabile.

Osservo che $E \neq F$, perché $a \notin F^p$. Inoltre $E = F(\alpha)$ è campo di spezzamento per $f(x)$ su F , perché $f(x) = x^p - a$ con $a = \alpha^p$, cioè $f(x) = x^p - \alpha^p = (x - \alpha)^p$.

Conclusione: se F è un campo con carF = p primo e F non perfetto, allora F ammette un'estensione puramente inseparabile non banale.

3 Condizioni equivalenti ad essere puramente inseparabile

Teorema 6.5

Data un'estensione algebrica $E \supseteq F$ con carF = p primo, allora sono equivalenti

1. $E \supseteq F$ è puramente inseparabile.
2. per ogni $\alpha \in E$, esiste $n \geq 0$ con $\alpha^{p^n} \in F$;
3. il polinomio minimo su F di ogni elemento di E è della forma $x^{p^n} - a$, $n \geq 0, a \in F$

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: sia $\alpha \in E$ e $f(x)$ il polinomio minimo di α su F . Allora per il corollario precedente posso scrivere $f(x) = g(x^{p^n})$ con $g(x) \in F[x]$ polinomio irriducibile e separabile. Allora $g(x)$ è polinomio minimo di α^{p^n} essendo $g(x)$ irriducibile e monico, e quindi α^{p^n} è separabile su F . Ma per l'ipotesi l'estensione è puramente inseparabile quindi tutti gli elementi separabili su F stanno in F , allora $\alpha^{p^n} \in F$.

$2 \longrightarrow 3$: per ipotesi, $\alpha^{p^n} \in F$, cioè α è radice del polinomio $x^{p^n} - \alpha^{p^n} \in F[x]$. Ma essendo in caratteristica p , $g(x) = x^{p^n} - \alpha^{p^n} = (x - \alpha)^{p^n}$, quindi un fattore irriducibile di $g(x)$ in $F[x]$ sarà della forma $f(x) = (x - \alpha)^r$. Siccome $f(\alpha) = 0$, segue che $f(x)$ è il polinomio minimo di α su F e quindi $f(x)$ è univocamente determinato. Dunque $f(x)$ e' l'unico fattore irriducibile di $g(x)$ in $F[x]$ e pertanto $g(x)$ è una potenza di $f(x)$, quindi $r \mid p^n$ e $r = p^m$, $m \in \mathbb{N}$. Segue che $f(x) = x^{p^m} - a$ con $a = \alpha^{p^m} \in F$.

$3 \longrightarrow 1$: sia $\alpha \in E$ e supponiamo che α sia separabile su F . **Vogliamo mostrare che** $\alpha \in F$. Per ipotesi il polinomio minimo di α su F è della forma $f(x) = x^{p^n} - a$, $a \in F, n \geq 0$.

$f(\alpha) = 0$ implica che $a = \alpha^{p^n}$. Allora $f(x) = x^{p^n} - \alpha^{p^n} = (x - \alpha)^{p^n}$. Se $n \geq 1$ (e quindi $p^n > 1$), $(x - \alpha)^2 \mid f(x)$ ma $f(x)$ dev'essere separabile, allora non può avere radici multiple, rimane provato che $n = 0$ e $\alpha \in F$.

Corollario 6.4

Sia F un campo di caratteristica p , con p primo, e E un'estensione di F puramente inseparabile. Allora

1. Se $E \supseteq L \supseteq F$, allora $E \supseteq L$ e $L \supseteq F$ sono puramente inseparabili.
2. se $|E : F|$ è finito, allora $|E : F| = p^*$.

Dimostrazione

1. $E \supseteq F$ è puramente inseparabile, quindi per il teorema appena dimostrato,dato $\alpha \in E$, si ha che $\alpha^{p^n} \in F$ per $n \geq 0$. Allora $\alpha^{p^n} \in L$, quindi $E \supseteq L$ è puramente inseparabile.Inoltre se $\beta \in L$, si ha $\beta \in E$, e siccome $E \supseteq F$ è puramente inseparabile, $\beta^{p^m} \in F$ per un certo $m \geq 0$, quindi $L \supseteq F$ è puramente inseparabile.
2. Procediamo per induzione su $|E : F|$. Se $|E : F| = 1$, allora $1 = p^0$ e quindi il passo base vale. Altrimenti, prendo $\alpha \in E \setminus F$, allora per la condizione 3 del teorema precedente, il polinomio minimo di α su F è della forma $x^{p^n} - a$. Quindi $|F(\alpha) : F| = p^n$. Considero la catena di estensioni $E \supseteq F(\alpha) \supseteq F$. Per la prima parte di questo corollario, $E \supseteq F(\alpha)$ è puramente inseparabile, e ha grado $< |E : F|$ perché hoscelto $\alpha \in E \setminus F$, allora per induzione $|E : F(\alpha)| = p^m$ e il resto segue dal teorema della torre, cioè $|E : F| = p^{n+m}$.

Corollario 6.5 (transitività delle estensioni puramente inseparabili)

Data la catena di estensioni $E \supseteq L \supseteq F$, con $E \supseteq L$ e $L \supseteq F$ estensioni puramente inseparabili, allora $E \supseteq F$ è puramente inseparabile.

Dimostrazione

Sia $E \supseteq F$, e $E \neq F$, allora $L \supset F$ oppure $E \supset L$, da cui segue che carF = p (voglio escludere il caso di caratteristica 0). Data $\alpha \in E$, $\alpha^{p^n} \in L$, ma $E \supseteq L$ è puramente inseparabile quindi posso applicare questa proprietà ad α^{p^n} , cioè $(\alpha^{p^n})^{p^m} = \alpha^{p^{n+m}} \in F$, e quindi $E \supseteq F$ è puramente inseparabile.

4 Proprietà del campo degli elementi separabili su F

Sia $E \supseteq F$ un'estensione algebrica, e considero l'insieme

$$S = \{\alpha \in E \, t.c. \, \alpha \, separabile \, su \, F\}$$

Allora S è un campo, ed è l'unico campo con $E \supseteq S \supseteq F$, $E \supseteq S$ puramente inseparabile e $S \supseteq F$ separabile.

Per dimostrare questo fatto è necessario il seguente lemma:

Lemma 6.1

Sia $E = F(\alpha, \beta)$ con α, β separabili su F , allora $E \supseteq F$ è separabile.

Dimostrazione

Siano $f(x), g(x)$ i polinomi minimi di α e β rispettivamente su F , e sia $h(x) = f(x) * g(x) \in F[x]$.

Sia L campo di spezzamento per $h(x)$ su F . Ora $h(x)$ è un polinomio i cui fattori irriducibili, f, g , sono separabili su F , allora $L \supseteq F$ è normale di grado finito.

Se considero la catena di estensioni $L \supseteq E \supseteq F$, con $L \supseteq F$ separabile, segue che anche $E \supseteq F$ è separabile.

Teorema 6.6

Sia $E \supseteq F$ un'estensione algebrica, e sia

$$S = \{\alpha \in E \, t.c. \, \alpha \, separabile \, su \, F\}$$

Allora S è un campo, ed è l'unico campo intermedio $E \supseteq S \supseteq F$ tale che $E \supseteq S$ è puramente inseparabile e $S \supseteq F$ è separabile.

Dimostrazione

1. Per dimostrare che S **è un campo**, basta mostrare che, dati $\alpha, \beta \in S$, $\alpha - \beta \in S$ e $\alpha\beta^{-1} \in S$ per $\beta \neq 0$. Considero $F(\alpha, \beta)$, che è un'estensione separabile di F per il lemma precedente. $F(\alpha, \beta)$ contiene $\alpha - \beta$ e $\alpha\beta^{-1}$, e quindi sono separabili su F . In particolare stanno in S .

2. ovviamente $S \supseteq F$ **è separabile** per come S è definito.

3. Rimane da provare che $E \supseteq S$ **è puramente inseparabile**. Possiamo assumere che CarF = p , perché in caratteristica 0 , S esaurisce tutti gli elementi di E . Sia $\alpha \in E$, e considero $f(x)$ polinomio minimo di α su F .Si avrà $f(x) = g(x^{p^n})$ con $g(x)$ monico, irriducibile e separabile. Inoltre $0 = f(\alpha) = g(\alpha^{p^n})$, allora g è il polinomio minimo di α^{p^n} ed è separabile, quindi α^{p^n} è separabile su F , cioè per definizione $\alpha^{p^n} \in S$, quindi $E \supseteq S$ è puramente inseparabile perché vale la condizione 3 del teorema.

4. **Mostriamo l'unicità di** S . Sia T un campo con $E \supseteq T \supseteq F$, con $T \supseteq F$ separabile e $E \supseteq T$ puramente inseparabile. Mostriamo che $T = S$ .Dal fatto che $T \supseteq F$ è separabile, segue che tutti gli elementi di T sono separabili su F , quindi $T \subseteq S$. Allora considero la catena di estensioni $E \supseteq S \supseteq T$: siccome $E \supseteq T$ è puramente inseparabile, anche $S \supseteq T$ lo è. Considero ora la catena di estensioni $S \supseteq T \supseteq F$, siccome $S \supseteq F$ è separabile, anche $S \supseteq T$ è separabile. Allora $S = T$ perché S è contemporaneamente separabile e puramente inseparabile su T .

Corollario 6.6

Sia $E \supseteq F$ un'estensione di grado finito e non separabile, allora carF | |E : F| .

Dimostrazione

Siccome per ipotesi l'estensione è non separabile, si ha che CarF = p primo. Sia S l'insieme degli elementi di E separabili su S , allora $E \neq S$, $E \supseteq S$ è puramente inseparabile e $|E : S| = p^*$. Dal teorema della torre segue che carF = p | |E : S| | |E : F| = |E : S| ∗ |S : F| .

Proposizione 6.2

Sia $E \supseteq L \supseteq F$ una catena di estensioni con $E \supseteq L$ separabile e $L \supseteq F$ separabile, allora $E \supseteq F$ è separabile.

Dimostrazione

Sia S l'insieme degli elementi di E separabili su F . Siccome $L \supseteq F$ è separabile, segue che $L \subseteq S$, allora posso considerare la catena di estensioni $E \supseteq S \supseteq L$. Siccome $E \supseteq L$ è separabile segue che $E \supseteq S$ è separabile per un argomento già visto. Inoltre $E \supseteq S$ è puramente inseparabile e unendo le due condizioni si ha $E = S$, e quindi $E \supseteq F$ è separabile.

5 Grado di separabilità

Definizione 6.4

Sia $E \supseteq F$ un'estensione di grado finito, e sia S l'insieme degli elementi di E separabili su F . Si dice *grado di separabilità* di E su F il grado di S su F , cioè $|E : F|_s = |S : F|$.

L'estensione $E \supseteq F$ è separabile se e solo se $|E : F| = |E : F|_s$. In generale $|E : F|_s \mid |E : F|$, e il quoziente $\frac{|E:F|}{|E:F|_s}$ è una potenza di p .

Lemma 6.2

Sia $E \supseteq F$ un'estensione puramente inseparabile, e sia $f(x) \in F[x]$ monico, irriducibile e separabile. Allora $f(x)$ è irriducibile in $E[x]$.

Dimostrazione

Sia $g(x)$ un fattore monico e irriducibile di $f(x)$ in $E[x]$, e **mostriamo che** $g = f$, provando così che f rimane irriducibile in $E[x]$. Sia M il campo di spezzamento per $f(x)$ su E , quindi $M \supseteq E \supseteq F$. Allora in M , posso scrivere $g(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$ dove gli α_i sono radici di $g(x)$ e quindi anche di $f(x)$.

Sia

$$S = \{\beta \in M \, t.c. \, \beta \; separabile \, su \, F\}$$

e voglio mostrare che $g(x) \in S[x]$. Gli α_i , radici di g , sono anche radici di f . Ora f è polinomio minimo di ciascuna sua radice in particolare di ciascun α_i .

Per ipotesi $f(x)$ è separabile su F , allora gli α_i stanno in S , $x-\alpha_i \in S[x]$ allora $g(x) \in S[x]$. Inoltre $g(x) \in E[x]$ quindi i coefficienti di g stanno in $S \cap E$.

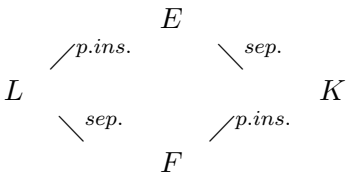
Concludo che $E \cap S = F$ infatti valgono questi fatti:

1. $E \supseteq E \cap S \supseteq F$ e $E \supseteq F$ è puramente inseparabile, allora $E \cap S \supseteq F$ è puramente inseparabile.
2. per costruzione $S \supseteq F$ è separabile, e quindi anche $E \cap S \supseteq F$ è separabile.

Allora $E \cap S = F$, cioè $g(x) \in F[x]$, allora $g = f$.

Teorema 6.7

Sia $E \supseteq F$ un'estensione di grado finito, e siano K, L campi intermedi tra E ed F con $E \supseteq L$ puramente inseparabile, $L \supseteq F$ separabile, $E \supseteq K$ separabile, $K \supseteq F$ puramente inseparabile, come mostra lo schema seguente:



Allora $|L : F| = |E : K|$.

Dimostrazione

Mostro le due disuguaglianze:

DISUGUAGLIANZA 1: $|L : F| \leq |E : K|$: Sia $\alpha \in L$, e sia $f(x) \in F[x]$ il suo polinomio minimo. Siccome $K \supseteq F$ è puramente inseparabile, $f(x)$ rimane irriducibile come polinomio in $K[x]$. Allora $|F(\alpha) : F| = |K(\alpha) : K|$. Per il teorema dell'elemento primitivo, siccome $L \supseteq F$ è separabile, posso scrivere $L = F(\alpha)$ (con abuso di notazione). Allora $|L : F| = |F(\alpha) : F| = |K(\alpha) : K| \leq |E : K|$. DISUGUAGLIANZA 2: $|E : K| \leq |L : F| : E \supseteq K$ e per il teorema dell'elemento primitivo posso scrivere $E = K(\beta)$ per un certo β . $E \supseteq L$ è puramente inseparabile, allora $\beta^{p^n} \in L$ per un certo $n \geq 0$, $p = \text{carF}$ (se $\text{carF} = 0$, $L = E$ e $K = F$). Considero $E = K(\beta) \supseteq K(\beta^{p^n})$. Da un lato, siccome $\beta^{p^n} \in K(\beta^{p^n})$, $E \supseteq K(\beta^{p^n})$ è puramente inseparabile; d'altra parte $E \supseteq K(\beta^{p^n}) \supseteq K$, e siccome $E \supseteq K$ è separabile, lo è anche $E \supseteq K(\beta^{p^n})$. Deduco che $E = K(\beta^{p^n})$.

Quindi

$$|E : K| = |K(\beta^{p^n}) : K| = |F(\beta^{p^n}) : F| \leq |L : F|$$

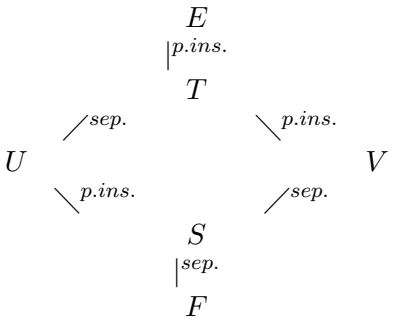
perché $\beta^{p^n} \in L$. Noto anche che la seconda uguglianza segue dallo stesso argomento usato all'inizio di questa dimostrazione.

Teorema 6.8 (moltiplicatività del grado di separabilità)

Siano $E \supseteq U \supseteq F$ campi con $|E : F|$ finito. Allora $|E : F|_s = |E : U|_s * |U : F|_s$.

Dimostrazione

Considero lo schema seguente:



Considero $E \supseteq U$, e chiamo

$$T = \{\beta \in E \, t.c. \, \beta \, separabile \, su \, U\}$$

allora segue che $E \supseteq T$ è puramente inseparabile, $T \supseteq U$ è separabile.

Considero poi $U \supseteq F$, e pongo

$$S = \{\alpha \in U \, t.c. \, \alpha \, separabile \, su \, F\}$$

allora segue che $U \supseteq S$ è puramente inseparabile e $S \supseteq F$ è separabile.

Considero la catena di estensioni

$$E \supseteq T \supseteq U \supseteq S \supseteq F$$

e pongo

$$V = \{\gamma \in T \, t.c. \gamma \, separabile \, su \, S\}$$

allora $T \supseteq V$ è puramente inseparabile, mentre $V \supseteq S$ è separabile.

Ogni pezzo della catena di estensioni $V \supseteq S \supseteq F$ è separabile. Allora $V \supseteq F$ **è separabile** per transitività.

Se considero $E \supseteq T \supseteq V$, $E \supseteq T$ è puramente inseparabile e $T \supseteq V$ è puramente inseparabile, allora $E \supseteq V$ **è puramente inseparabile**. Per l'unicità del campo intermedio V che soddisfa queste due condizioni segue che

$$V = \{\gamma \in E \, t.c. \, \gamma \, separabile \, su \, F\}$$

Segue che $|E : F|_s = |V : F|$, inoltre per il teorema della torre

$$|V : F| = |V : S| * |S : F| = |V : S| * |U : F|_s,$$

ma $|V : S| = |T : U|$ per il teorema precedente, e $|T : U| = |E : U|_s$ cioè, unendo queste formule, $|E : F|_s = |E : U|_s * |U : F|_s$.

6 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

6.1 Testo

- **Corso:Algebra IV I1/Appendici/Separabilità e inseparabilità** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAlgebra_IV_I1/Appendici/Separabilit%C3%A0_e_inseparabilit%C3%A0?oldid=48536 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio

6.2 Immagini

6.3 Licenza dell'opera

- [Project:Copyright Creative Commons Attribution Share Alike 3.0 & GNU FDL]
- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0