Analisi III I1

30 giugno 2022

Indice

Capitolo 1

Spazi metrici

1.1 Spazi vettoriali

1.1.1 Definizione ed esempi

Definizione 1.1

X' è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ se esistono le due seguenti operazioni:

1. la *somma* che ad ogni coppia (x, y) di elementi di X associa la somma $x+y$. La somma ha queste proprietà#*è *associativa*, cioè

   $$(x+y)+z = x+(y+z)$$

   per ogni $x, y, z \in X$;#*è *commutativa*, cioè

   $$x+y = y+x, \forall x, y \in X$$

   #*esiste l'elemento neutro 0 tale che $0+x = x$ per ogni $x \in X$.#*esiste l'opposto x' tale che $x+x' = 0$ .In particolare, l'elemento opposto, se esiste, è unico.Dim. Supponiamo che esistano due opposti, x' e x'' con $x' \neq x''$, tali che $x+x' = 0$ e $x+x'' = 0$. Allora, per l'esistenza dell'elemento neutro:

   $$x' = x' + 0$$

   ma $0 = x + x''$, quindi

   $$x' = x' + (x + x'')$$

   e per associatività e per commutatività

   $$x' = (x' + x) + x'' = x''$$

   perché $x + x' = 0$, quindi $x' = x''$ e l'elemento opposto è unico.

2. il *prodotto scalare* $\cdot : X \times \mathbb{R} \to X$ tale che alla coppia (x, α) viene associato ilvettore $\alpha \cdot x$. Il prodotto scalare ha le seguenti proprietà:#* $1 * x = x$ #* $0 * x = 0$ #* $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ #*proprietà distributive: $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ e $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

Esempio 1.1

Esempi di spazi vettoriali reali sono lo stesso $\mathbb{R}$ e lo spazio $\mathbb{R}^n$ che è l'insieme dei vettori della forma $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dove gli x_i sono numeri reali. Uno spazio vettoriale sui complessi è $\mathbb{C}^n$ insieme delle n-uple $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ con $z_i \in \mathbb{C}$. Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sono vettori in $\mathbb{R}^n$, la somma si fa componente per componente ed è il vettore $(x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.

Se α è uno scalare, $\alpha * x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

Esempio 1.2

Sull'intervallo $[0, 1]$, posso considerare lo spazio vettoriale

$$X = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \ \text{ continue}\}$$

Date due funzioni $f, g \in X$, la funzione somma calcolata in un generico punto x in $[0, 1]$ è data da $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Dato uno scalare α , $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$.
Queste operazioni sono ben definite perché la somma di funzioni continue è ancora continua e lo stesso vale per il prodotto per uno scalare.

1.1.2 Il prodotto scalare

In $\mathbb{R}^n$ si può definire il *prodotto scalare*: è un'operazione $\cdot : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

$$(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Il prodotto scalare ha le seguenti proprietà:

- è *bilineare*, infatti dati tre vettori x, y, z e uno scalare $\alpha \in \mathbb{R}$, valgono le proprietà:
$$(x + z) \cdot y = x \cdot y + z \cdot y$$
$$(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$$
da cui segue la linearità nella prima componente, e lo stesso è vero per la seconda componente.

- è *commutativo*, cioè $x \cdot y = y \cdot x$.

- Il prodotto scalare di un vettore $x \in \mathbb{R}^n$ per se stesso è sempre positivo ed è nullo se e solo se $x = 0$.

1.1.3 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Proposizione 1.1

Il prodotto scalare verifica la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz: per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|x \cdot y| \leq |x| * |y|$$

dove

$$|x| = \sqrt{\sum_i x_i^2}.$$

Dimostrazione

Dato $t \in \mathbb{R}$ e due vettori x, y , considero la combinazione lineare $x + ty$ e faccio il prodotto scalare di questo vettore per se stesso:

$$(x + ty) \cdot (x + ty) \geq 0$$

per le proprietà del prodotto scalare.

Sviluppo il prodotto usando le proprietà di bilinearità:

$$x \cdot x + t * x \cdot y + t * y \cdot x + t^2 * y \cdot y \geq 0$$

e per la commutatività del prodotto scalare:

$$\sum_i x_i^2 + 2t * \sum_i x_i y_i + t^2 * \sum_i y_i^2 \geq 0$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. L'espressione è un trinomio in t quindi è positiva se $\Delta \leq 0, \forall t$.

$$\Delta = 4 * (\sum_i x_i y_i)^2 - 4 * \sum_i y_i^2 * \sum_i x_i^2 \leq 0$$

quindi

$$(\sum_i x_i y_i)^2 \leq \sum_i x_i^2 * \sum_i y_i^2$$

e prendendo la radice quadrata:

$$|\sum_i x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_i x_i^2} * \sqrt{\sum_i y_i^2}.$$

$$|x \cdot y| \leq |x| * |y|$$

1.2 Spazi metrici

1.2.1 Definizione di metrica

Definizione 1.2

Sia Y un insieme non vuoto, una metrica d su Y è una funzione $d\colon Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ che ad ogni coppia di elementi $(x, y) \in Y$ associa il numero reale positivo $d(x, y)$ tale che:

1. $d(x, y) = d(y, x)$ (simmetria)
2. $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$
3. dati tre punti x, y, z , $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare)

Definizione 1.3

Dato uno spazio metrico, la bolla centrata in x di raggio r è data da

$$B(x, r) = \{y \in Y \, t.c. \, d(x, y) < r\}$$

Definizione 1.4

Data una successione di punti $\{x_n\} \in Y$, la successione tende a x se per ogni r positivo esiste n_0 tale che per $n > n_0$, $x_n \in B(x, r)$.

La metrica permette di definire la convergenza.

Esempio 1.3

Dati x, y vettori in $\mathbb{R}^n$, se pongo

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

ottengo la metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$.

d soddisfa le proprietà della metrica, perché è simmetrica, è nulla solo se i punti coincidono, e applicando Cauchy-Schwarz si può dimostrare la disuguaglianza triangolare.

1.2.2 Norma

Definizione 1.5

Una *norma* su uno spazio vettoriale reale X è una funzione che a x associa $\|x\| \geq 0$ tale che

1. $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| * \|x\|$ (omogeneità)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (subadditività)

1.2.3 Relazione tra metriche e norme

Data una norma si ha automaticamente una metrica, ma non è sempre vero il viceversa.

Proposizione 1.2

Data una norma, si ottiene una metrica ponendo

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Dimostrazione

Dimostro che d tale che $d(x, y) = \|x - y\|$ soddisfa le proprietà delle distanze.

1. Vale la simmetria infatti
$$d(x, y) = \|x - y\| = \| - (y - x)\| = \|y - x\| = d(y, x)$$
dove $\| - (y - x)\| = \|y - x\|$ deriva dalla proprietà $\|\alpha x\| = |\alpha| * \|x\|$ con $\alpha = -1$.
2. $$d(x, y) = \|y - x\| = 0$$
se e solo se $y = x$.
3. Vale la disuguaglianza triangolare infatti
$$d(x, y) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\|$$
e per la subadditività della norma
$$\leq \|x - z\| + \|z - y\|$$
$$= d(x, z) + d(z, y)$$

Esempio 1.4

Dato $x \in \mathbb{R}^n$, la norma euclidea si definisce come

$$d(x, O) = \sqrt{\sum_i x_i^2} = \sqrt{x \cdot x}.$$

Quindi si può dimostrare la disuguaglianza triangolare per d in termini di norme, e vale che

$$\|x-y\| = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_i x_i^2} + \sqrt{\sum_i y_i^2}$$

per Cauchy-Schwarz.

Esempio 1.5

Esistono metriche che non inducono nessuna norma. Ad esempio, dato $X \neq \emptyset$, definisco la metrica discreta tale che

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \iff x \neq y \\ 0 & \iff x = y \end{cases}$$

Con questa metrica, le successioni che tendono a $x \in X$ sono quelle definitivamente costanti e uguali a x .

Questa metrica non induce nessuna norma (non vale l'omogeneità).

1.3 Disuguaglianze fondamentali

1.3.1 Disuguaglianza di Young

Lemma 1.1

Dati due numeri reali positivi a, b , segue che

$$ab \leq a^p/p + b^q/q$$

dove $1/p + 1/q = 1$ e $p \geq q$ (queste condizioni implicano $q \geq 1$).

Definizione 1.6

Due numeri p, q si dicono *coniugati* se $1/p + 1/q = 1$, e l'unico caso in cui p e q coincidono è $p = q = 2$, in tutti gli altri casi $p \in (2, \infty)$ implica $q \in (1, 2)$ e viceversa.

Definizione 1.7

Dato X spazio vettoriale reale una combinazione lineare generica dei vettori x e y è un vettore della forma $\alpha x + \beta y$ con α, β scalari.

Definizione 1.8

Una combinazione convessa di x e y è della forma $px + (1-p)y$ con $p \in (0,1)$, in cui la somma dei coefficienti è 1.

Geometricamente, l'insieme delle combinazioni lineari tra due punti è la retta che li congiunge. Invece l'insieme delle combinazioni convesse di due punti è il segmento che li congiunge.

Definizione 1.9

Una *funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è *convessa* se per ogni x, y reali e per ogni $t \in [0, 1]$, si ha

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Geometricamente, il grafico di una funzione convessa è tale che preso un punto z nel segmento (x, y) , allora il valore $f(z)$ è più piccolo della combinazione convessa di $f(x)$ e $f(y)$, cioè il grafico della funzione sta sotto la retta che congiunge $f(x)$ e $f(y)$. Esempi di funzioni elementari convesse sono $f(x) = x^2$ e $f(x) = e^x$.

Una funzione è convessa se ha derivata seconda positiva.

Relazione di convessità per la funzione esponenziale:

$$e^{tx+(1-t)y} \leq t * e^x + (1 - t) * e^y$$

La disuguaglianza di Young si dimostra ponendo $t = 1/p$ $1 - t = 1/q$ in modo da ottenere una combinazione convessa.

Dimostrazione (dimostrazione della disuguaglianza)

Il caso in cui $a = 0$ o $b = 0$ è banale perché $ab = 0$ mentre il secondo membro è positivo, allora supponiamo che $a > 0, b > 0$.

$$ab = e^{\log(ab)} = e^{\log a + \log b} =$$

Nell'esponenziale moltiplico e divido il primo addendo per p e il secondo per q :

$$= e^{1/p*p \log a + 1/q*q \log b}$$
$$= e^{1/p*\log a^p + 1/q \log b^q}$$

e ottengo la funzione esponenziale calcolata in una combinazione convessa, allora, siccome la funzione esponenziale è convessa, vale $e^{tx+(1-t)y} = t * e^x + (1 - t) * e^y$ quindi proseguendo con le disuguaglianze

$$\leq 1/p * e^{\log a^p} + 1/q * e^{\log b^q}$$
$$= 1/p * a^p + 1/q * b^q.$$

cvd

1.3.2 Disuguaglianza di Hoelder

Teorema 1.1

Dati p, q coniugati, e numeri reali a_k, b_k , segue che

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq (\sum_k |a_k|^p)^{1/p} * (\sum_k |b_k|^q)^{1/q}.$$

Dimostrazione

Al singolo prodotto $|a_k b_k|$ posso applicare la disuguaglianza di Young, quindi

$$|a_k b_k| \leq |a_k|^p/p + |b_k|^q/q$$

e sommando a entrambi i membri

$$\sum_k |a_k b_k| \leq 1/p * \sum_k |a_k|^p + 1/q * \sum_k |b_k|^q, \text{ formula 1}$$

IPOTESI INIZIALE: suppongo che

$$\sum_k |a_k|^p = 1, \sum_k |b_k|^q = 1$$

allora in questo caso la formula 1 diventa:

$$\sum_k |a_k * b_k| \leq 1/p + 1/q = 1$$

quindi la tesi è vera in quest'ipotesi, perché $1 = (\sum_k |a_k|^p)^{1/p} * (\sum_k |b_k|^q)^{1/q}$.

ELIMINAZIONE DELL'IPOTESI: Per i vettori di $\mathbb{R}^n$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, definisco

$$\|a\|_p = (\sum_k |a_k|^p)^{1/p}$$

$$a' = \frac{a}{\|a\|_p} = (\frac{a_1}{\|a\|_p}, \ldots, \frac{a_n}{\|a\|_p})$$

e analogamente definisco

$$b' = \frac{b}{\|b\|_p} = (\frac{b_1}{\|b\|_p}, \ldots, \frac{b_n}{\|b\|_p})$$

Ora a' e b' soddisfano le ipotesi, infatti

$$\sum_k |(a')_k|^p = \sum_k \frac{|a_k|^p}{(\|a_k\|_p)^p} = \frac{(\|a\|_p)^p}{(\|a\|_p)^p} = 1$$

Allora posso applicare ad a' e b' la formula 1 e si ha:

$$\sum_k |(a')_k * (b')_k| = \sum_k \frac{a_k}{\|a\|_p} * \frac{b_k}{\|b\|_q} \leq 1$$

cioè, moltiplicando per $\|a\|_p * \|b\|_q$:

$$\sum_k |a_k b_k| \leq \|a_k\|_p * \|b_k\|_q$$

cvd

Nel caso $p = q = 2$, ottengo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

1.3.3 Disuguaglianza di Minkowski

Dimostro che la funzione $\|a\|_p = (\sum_k |a_k|^p)^{1/p}$ è una norma:

1. $\|a\| = 0$ se e solo se a è il vettore nullo.
2. $$\|ta\|_p = (\sum_k |ta_k|^p)^{1/p}$$ $$= (|t|^p * \sum_k |a_k|^p)^{1/p} = |t| * \|a\|_p$$
3. la disuguaglianza triangolare è data dalla disuguaglianza di Minkowski.

Teorema 1.2 (disuguaglianza di Minkowski)

$$(\sum_k (|a_k + b_k|)^p)^{1/p} \leq (\sum_k |a_k|^p)^{1/p} + (\sum_k |b_k|^p)^{1/p}$$

o in altre parole

$$\|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$$

(se $p = 2$, ottengo la disuguaglianza triangolare per la norma euclidea)

Dimostrazione

$$\sum_k |a_k + b_k|^p \leq \sum (|a_k| + |b_k|)^p$$

Cerco di applicare la disuguaglianza di Hoelder:

$$(|a_k| + |b_k|)^p = (|a_k| + |b_k|)^{p-1} * (|a_k| + |b_k|)^1$$

e sommando:

$$\sum_k (|a_k| + |b_k|)^p = \sum_k (|a_k| + |b_k|)^{p-1} * (|a_k| + |b_k|)^1$$

Distribuisco su a_k e b_k :

$$= \sum_k |a_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} + \sum_k |b_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1}$$

Analizzo la prima sommatoria, a cui posso applicare Hoelder:

$$= \sum_k |a_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} \leq \|a\|_p * [(\sum_k (|a_k| + |b_k|)^{p-1})^q]^{1/q}, \text{ formula 1}$$

Se due numeri sono coniugati il loro prodotto e la loro somma sono uguali, infatti $1/p + 1/q = (p+q)/(pq) = 1$ quindi $p + q = pq$. Allora si ha

$$(p-1)q = p * q - q = p + q - q = p$$

quindi la formula 1 si riscrive come:

$$\sum_k |a_k|(|a_k| + |b_k|)^{p-1} \leq \|a\|_p * [\sum_k (|a_k| + |b_k|)^p]^{1/q}$$

Trattando analogamente il secondo addendo alla fine si ha

$$\sum_k (|a_k| + |b_k|)^p \leq (\|a\|_p + \|b\|_p) * [\sum_k (|a_k| + |b_k|)^p]^{1/q}$$

e dividendo per $[\sum_k (|a_k| + |b_k|)^p]^{1/q}$:

$$[\sum_k (a_k + b_k)^p]^{1/p} = \|a + b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$$

cvd

1.3.4 Casi particolari di norme p

La funzione $\| \cdot \|_p$ è una norma, e in particolare:

1. Se $p = 1$, ottengo
$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$
2. Nel caso limite $p = \infty$, si ha
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$
e siccome $p = \infty$ non rientra nei casi dimostrati, bisogna dimostrare che $\| \cdot \|_\infty$ è una norma:#* $\|x\|_\infty = 0$ se x è il vettore nullo#*Vale l'omogeneità, infatti, dato uno scalare $t \in \mathbb{R}$:
$$\|tx\|_\infty = \max\{|tx_1|, |tx_2|, \ldots, |tx_n|\}$$
$$= \max\{|t| * |x_1|, |t| * |x_2|, \ldots, |t| * |x_n|\}$$
$$= |t| * \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} = |t| * \|x\|_\infty$$
3. Dati due vettori x, y :
$$\|x + y\|_\infty = \max\{|x_1 + y_1|, |x_2 + y_2|, \ldots, |x_n + y_n|\}$$
se supponiamo che $\|x + y\|_\infty = |x_i + y_i|$, si ha
$$\|x + y\|_\infty = |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \max x + \max y = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

1.3.5 Rappresentazione geometrica delle norme

Per capire come sono fatte le norme considero le bolle centrate in 0 e di raggio 1, cioè

$$B(0,1) = \{x\, t.c.\, \|x\| \leq 1\}$$

1. Per la norma 1,
$$B(0,1) = \{(x,y)\, t.c.\, \|(x,y)\| \leq 1\}$$
$$B(0,1) = \{(x,y)\, t.c.\, |x| + |y| \leq 1\}$$
Dove $x > 0, y > 0$, la palla è delimitata dalla retta $x + y = 1$ .Dove $x > 0, y < 0$, la palla è delimitata dalla retta $x - y = 1$ .Dove $x < 0, y > 0$, la palla è delimitata dalla retta $-x + y = 1$ .Dove $x < 0, y < 0$, la palla è delimitata dalla retta $-x - y = 1$ .Queste quattro rette, che si intersecano nei punti $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$, formano un rombo.Quindi la bolla è un rombo, e non una sfera come si direbbe intuitivamente.

2. Per $p = \infty$, la sfera unitaria è un quadrato:
$$B(0,1) = \{(x,y)\, t.c.\, \max\{|x|, |y|\} = 1\}$$
Le bolle sono dei quadrati centrati nell'origine e di lato 2, in ogni quadrante la bolla è delimitata da due segmenti, uno verticale e uno orizzontale, che si intersecano nei vertici del quadrato.

3. Per p generico, le bolle sono ovali, che stanno tra il rombo e il quadrato.

Queste norme inducono la stessa topologia.

1.3.6 Norme equivalenti

Definizione 1.10

Due norme qualunque, $\|\cdot\|_A$ e $\|\cdot\|_B$ sono equivalenti se e solo se esistono due costanti positive c, d tali che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_A \leq c * \|x\|_B$$
$$\|x\|_B \leq d * \|x\|_A$$

Esercizio 1.1

Mostrare che questa è una relazione di equivalenza tra norme.

Dimostrazione

1. La relazione di equivalenza di norme è riflessiva, infatti ogni norma è equivalente a se stessa se pongo $c = d = 1$.

2. La relazione è simmetrica per definizione.

3. La relazione è transitiva, infatti

$$\|x\|_A \sim \|x\|_B, \longrightarrow \|x\|_A \leq c * \|x\|_B, \wedge \|x\|_B \leq d * \|x\|_A$$

$$\|x\|_B \sim \|x\|_C, \longrightarrow \|x\|_B \leq e * \|x\|_C, \wedge \|x\|_C \leq f * \|x\|_B$$

Allora

$$\|x\|_A \leq c * \|x\|_B \leq c * e * \|x\|_C$$

$$\|x\|_C \leq b * \|x\|_B \leq d * f * \|x\|_A$$

quindi $\|x\|_A \sim \|x\|_C$ con costanti $c * e$ e $d * f$.

Date due norme equivalenti, se $x_n \to 0$ per la norma $\|\cdot\|_B$, allora $x_n \to 0$ per $\|\cdot\|_A$, perché se $c * \|x\|_B \to 0$, anche $\|x\|_A$ che è minore tende a 0. Vale anche viceversa.

Supponiamo che $x_n \to z$ per la norma $\|\cdot\|_B$, allora $x_n - z \to 0$ per questa norma e quindi si torna nel caso precedente.

Allora, se una successione converge per una norma, converge anche per tutte le norme equivalenti ad essa.

Lemma 1.2

La norma 1 e la norma 2 sono equivalenti.

Dimostrazione

DISUGUAGLIANZA 1: $\|x\|_2 \leq M * \|x\|_1$

Dato $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, dove gli e_i costituiscono una base, si ha per subadditività della norma 2

$$\|x\|_2 = \sum_i |x_i| * \|e_i\|_2$$

e ponendo $M = \max_i\{\|e_i\|_2\}$ si ha

$$\|x\|_2 \leq M * \sum_i |x_i| = M * \|x\|_1$$

DISUGUAGLIANZA 2: $\|x\|_1 \leq c * \|x\|_2$

Dimostro quest'uguaglianza per induzione: per $n = 2$, considero

$$(|x_1| + |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1||x_2|$$

e siccome $|x_1|^2 + |x_2|^2 + 2|x_1||x_2| \geq 0$, posso maggiorare $2|x_1 x_2|$ con $|x_1|^2 + |x_2|^2$ e proseguendo con le disuguaglianze

$$\leq 2|x_1|^2 + 2|x_2|^2 \leq 2 * (|x_1|^2 + |x_2|^2)$$

e prendendo la radice del primo e ultimo membro:

$$|x_1| + |x_2| \leq \sqrt{2} * \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} \leq c * \|x\|_2$$

Suppongo l'asserto vero per n , cioè $\|x\|_1 = C * \|x\|_2$, $C \in \mathbb{R}$ e lo dimostro per $n + 1$:

$$(\sum_{i=1}^{n+1} |x_i|)^2 = (x_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} |x_i|)^2$$

e sviluppando il quadrato

$$x_{n+1}^2 + (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + 2x_{n+1} * \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

e maggiorando l'ultimo termine come nel caso $n = 2$:

$$x_{n+1}^2 + (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + x_{n+1}^2 + (\sum_{i=1}^{n} |x_i|)^2$$

$$\leq 2x_{n+1}^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$$

ma il passo induttivo, $\sum_{i=1}^{n} |x_i| < c\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ implica che $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \leq c^2 * \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ e proseguendo con le disuguaglianze si ha:

$$\leq 2x_{n+1}^2 + 2c^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\leq 2c^2(x_{n+1}^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2)$$

e ponendo $2c^2 = C^2$:

$$\leq C^2 * \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2$$

cioè, prendendo la radice del primo e ultimo membro:

$$\|x\|_1 \leq C * \|x\|_2$$

Teorema 1.3

Negli spazi di dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.

Dimostrazione

Sia $\|\cdot\|$ una norma generica in $\mathbb{R}^n$, dimostro che è equivalente alla norma 1, e in questo modo per il fatto che questa è una relazione di equivalenza, tutte le norme sono equivalenti.

CONDIZIONE 1: Per x generico in $\mathbb{R}^n$, esso si può scrivere in funzione dei vettori della base canonica

$$x = \sum_i x_i e_i$$

$$\|x\| = \| \sum_i x_i e_i\|$$

e per subadditività della norma:

$$\leq \sum_i |x_i| * \|e_i\|$$

e se pongo

$$M = \max\{\|e_1\|, \dots \|e_n\|\}$$

ottengo

$$\leq M * \sum_i |x_i| = M * \|x\|_1,$$

quindi

$$\|x\| \leq M * \|x\|_1, \text{ condizione 1}$$

CONDIZIONE 2: $\|x\|_1 \leq C * \|x\|$

Per la seconda parte del teorema serve il seguente corollario, che si ricava dalla disuguaglianza appena dimostrata: *la norma* $\|\cdot\|$ *è continua rispetto alla topologia indotta dalla norma 1, o equivalentemente, se* $x_n \to x$ *per la norma 1, allora* $x_n \to x$ *per la norma* $\|\cdot\|$.

Questo implica anche che se $\|x_n - x\|_1 \to 0$, allora $\|x_n - x\| \to 0$. Questo si ricava dalla prima disuguaglianza.

Per dimostrare la seconda disuguaglianza, considero la circonferenza:

$$S = \{s \in \mathbb{R}^n \, t.c. \, \|s\|_1 = 1\}$$

che è un compatto per la topologia indotta dalla norma 2 perché è chiusa e limitata. Siccome per l'esercizio precedente le norme 1 e 2 sono equivalenti, allora l'insieme è un compatto anche nella topologia indotta dalla norma 1.

Introduco una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ tale che $x \mapsto \|x\|$. Questa funzione è continua per la topologia indotta dalla norma 1 per il corollario, allora ammette minimo ristretta ad S per il teorema di Weierstrass. Esiste $m > 0$ tale che $f(x) \geq m \forall x \in S$ (m è strettamente positivo perché l'unico punto per cui la norma si annulla è l'origine, che non rientra in S).

Prendo un generico $x \in \mathbb{R}^n$ diverso da 0 e considero

$$\frac{x}{\|x\|_1}$$

che appartiene ad S , allora

$$m \leq f(\frac{x}{\|x\|_1})$$
$$= \|\frac{x}{\|x\|_1}\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1}$$

(l'ultimo passaggio vale perché $\|x\|_1$ è uno scalare e può essere postato fuori dalla norma), si ha quindi

$$\|x\| \geq m * \|x\|_1$$

e complessivamente ho dimostrato che

$$m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M * \|x\|_1$$

Ora ogni norma in $\mathbb{R}^n$ induce la topologia euclidea.

Questo non vale per le metriche, perché, ad esempio, la metrica discreta non induce la topologia euclidea.

1.3.7 Completezza di R^n

Corollario 1.1

$\mathbb{R}^n$ con una qualunque norma è completo.

Dimostrazione

Considero una successione di Cauchy per la norma generica, e mostro che converge ad un certo vettore. So che se $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$, allora per la disuguaglianza

$$\|x\|_2 \leq d * \|x\|$$

segue che anche per la norma euclidea $\|x_n - x_m\|_2 \leq \varepsilon$. Siccome $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidea è completo, allora $\|x_n - x\|_2 \leq \varepsilon$ per un certo x , e quindi, usando la disuguaglianza opposta

$$\|x\| \leq c * \|x\|_2$$

segue che $\|x_n - x\| \leq \varepsilon$.

cvd

1.3.8 Spazi di dimensione infinita

In spazi di dimensione infinita, questo risultato in generale non vale.

Considero X insieme delle funzioni continue a valori reali definite su $[0,1]$. Definisco due norme su questo spazio:

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]}\{|f(t)|\}, \text{ norma uniforme}$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt, \text{ norma integrale}$$

Per quanto riguarda la norma integrale, in generale

$$\int_0^1 |f|\,dt = 0$$

non implica necessariamente $f = 0$, ma nel caso di f continua questo avviene sempre. Infatti, data f continua, supponiamo che $\int_0^1 |f|\,dt = 0$ e che ci sia un punto t_0 in cui f non è 0. Siccome f è continua, ci sarebbe un intorno in cui f è non nulla, allora

$$\int_0^1 f(t)\,dt > \int_{B(t_0,r)} |f(t)| > 0$$

e il primo integrale risulterebbe strettamente positivo, contrariamente alle ipotesi.

Confronto le due norme:

$$\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$$

infatti

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f|\,dt \le \int_0^1 \max\{|f(t)|\}\,dt \le \max\{|f(t)|\} * 1 \le \|f\|_\infty$$

Geometricamente gli intorni di raggio r della norma 1 contengono quelli della norma infinito, la topologia generata dalla norma infinito è più forte di quella generata dalla norma 1.

Per la disuguaglianza $\|x\|_1 \le \|x\|_\infty$, la convergenza uniforme implica la convergenza in norma integrale. Ci si chiede se vale viceversa, cioè se esiste c tale che

$$\|f\|_\infty \le c * \|f\|.$$

Questo non è vero, infatti esistono successioni che convergono in norma 1 ma non in norma infinito.

Considero ad esempio la successione di funzioni f_n tali che sono nulle prima di $x = 1/2 - 1/n$ e dopo a $x = 1/2 + 1/n$, passano per il punto $(1/2 - 1/n, 0)$, si raccordano con continuità fino a raggiungere $(1/2, 1)$ e poi decrescono nuovamente fino al punto $(1/2 + 1/n, 0)$.

Tutte queste funzioni hanno norma infinito uguale a 1 (è il sup), ma la norma integrale, che è l'area del triangolo, è data da $1/2 * (1/2 + 1/n - 1/2 + 1/n) = \frac{1}{n}$ e tende a 0 per $n \to \infty$.

Nella dimostrazione precedente, il passaggio che non su può applicare negli spazi di dimensione infinita è il fatto che la costante m non risulta strettamente positiva. Inoltre le bolle unitarie non sono compatte.

1.4 Spazi di dimensione infinita ricalcati sulle norme p

1.4.1 Spazi l^p

Suppongo di avere una successione $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ di numeri reali o complessi. Introduco la norma

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p}$$

Mostro che lo spazio

$$X = \{\text{successioni convergenti, cioè } t.c. \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \text{ è finito}\}$$

con la norma p è uno spazio vettoriale, cioè mostro che la somma e il prodotto

di due suoi elementi sta ancora nello spazio.

Date due successioni $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, considero la somma $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$, e mostro che se $\|x\|_p$ è finita e $\|y\|_p$ è finita, allora anche $\|x + y\|_p$ è finita.

Se mostro che la norma p è effettivamente una norma, vale la disuguaglianza triangolare e quindi anche l'asserto da dimostrare.

Proposizione 1.3

[disuguaglianza triangolare per la norma p] Si ha che

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p)^{1/p}$$

Dimostrazione

Per ogni n naturale vale la disuguaglianza di Minkowski:

$$(\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p)^{1/p} \leq (\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p} + (\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{1/p}$$

e passando al limite per $n \to \infty$, al secondo membro applico il teorema per cui il limite della somma è la somma del limiti se i limiti esistono finiti, e ottengo il risultato cercato.

Segue che gli spazi l^p sono effettivamente spazi vettoriali.

1.4.2 Alcuni spazi l^p

In particolare, lo spazio l^1 è l'insieme delle successioni tale che $\sum_i |x_i|$ sia finito.

Lo spazio l^2 è l'insieme delle successioni tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2 < \infty$$

e si ha che

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

Se p, q sono coniugati e $p \to \infty$, allora $q \to 1$.

$$\|x\|_\infty = \sup_n\{x_n\} < \infty$$

Verificando che questa è una norma. si ha che l^∞ è lo spazio delle successioni limitate.

Questi sono spazi vettoriali normati completi (di Banach). Inoltre l^2 ha in particolare la caratteristica che la norma 2 induce un prodotto scalare.

Proposizione 1.4

Gli spazi l^p sono di dimensione infinita.

Dimostrazione

La dimensione di uno spazio vettoriale è la cardinalità di una base qualsiasi. Se fisso n , e considero le potenze $x^1, x^2, \dots, x^n$, ottengo l'insieme dei polinomi di grado al più n e questo non basta a coprire tutto lo spazio delle funzioni continue.

La base canonica di questo spazio è data da

$$e_1 = (1, 0, \dots),\ e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots,\ e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$$

Prendendo un numero finito di e_n , genero solo uno spazio di successioni che sono identicamente nulle a partire dall'indice $n+1$.

Infatti, ogni vettore che si scrive come combinazione lineare degli e_k ha coordinate nulle da $n+1$ in poi. La successione $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sta in l^2 ma non è definitivamente nulla, quindi non si può scrivere come combinazione lineare di n vettori.

1.5 Spazi L^p

Generalizzo gli spazi l^p a spazi $\mathcal{L}^p$.

1.5.1 Teoria astratta dell'integrazione

Definizione 1.11

In astratto, dato un insieme non vuoto X , § una σ -algebra di sottoinsiemi di X , μ è una funzione definita su § a valori in $[0,\infty]$ tale che

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$$

se $A_n \cap A_m = \emptyset$ quando $n \neq m$.

Definizione 1.12

$f : X \to \mathbb{R}$ si dice *misurabile* se $f^{-1}(A) \in$ § per ogni A aperto di $\mathbb{R}$.

Lo spazio $\mathcal{L}^p(X,\sigma,\mu)$ è l'insieme delle funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ tali che f è misurabile e

$$\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$$

l^p è un caso particolare di spazio $\mathcal{L}^p$ se μ è la misura del conteggio e $X = \mathbb{N}$. In questo caso l^p è lo spazio delle successioni p -sommabili.

1.5.2 Norme p

Data $f \in \mathcal{L}^p$, si chiede che

$$(\int_X |f|^p \, d\mu)^{1/p}$$

sia una norma.

1. se l'integrale vale 0, non posso concludere che la funzione è nulla, ma solo che è quasi ovunque nulla (cioè esiste $E \subset X$ di misura 0 e tale che per ogni $x \notin E$, $f(x) = 0$).

2. se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\|\alpha f\|_p = |\alpha| * \|f\|_p$.
3. se f, g sono misurabili, allora
$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$
e questa proprietà si dimostra facendo lo stesso percorso fatto per la disuguaglianza di Minkowski in $\mathbb{R}^n$.

Per dimostrare la forma integrale della disuguaglianza di Minkowski, si ha che Young per i numeri reali implica Hoelder in forma integrale, che con gli stessi conti implica Minkowski in forma integrale.

Proposizione 1.5 (disuguaglianza di Hoelder in forma integrale)

Se f, g sono misurabili, allora
$$\int_X f * g \, d\mu \leq (\int_X |f|^p)^{1/p} * (\int_X |g|^q)^{1/q}$$
con $1/p + 1/q = 1$.

Dimostrazione

IPOTESI PRELIMINARE: $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$,

allora dimostro che
$$\int_X f * g \, d\mu \leq 1$$
Fissato x , $f(x), g(x)$ svolgono il ruolo di a, b nella disuguaglianza di Young.

Per monotonia dell'integrale:
$$\int_X \|f * g\| \, d\mu \leq 1/p * \int_X \|f\|^p \, d\mu + 1/q * \int_X \|g\|^q \, d\mu = 1$$
e per omogeneità dell'integrale si può eliminare l'ipotesi preliminare.

cvd

Questa disuguaglianza vale anche se una delle due norme è infinita.

1.6 Definizione degli spazi L^p

Per fare in modo che le "norme p " siano norme a tutti gli effetti negli spazi $\mathcal{L}^p$, sostituisco le funzioni con le loro classi di equivalenza rispetto alla relazione R tale che fRg se f, g sono uguali quasi ovunque. Se $f \sim g$, allora f, g sno diverse sull'insieme A di misura nulla, allora, per ogni $x \in A^c$ si deve avere $f(x) = g(x)$.

PASSO 1: **Mostro che R è una relazione di equivalenza**.

Dimostrazione

1. R è riflessiva, infatti $f \sim f$ con $A = \emptyset$.
2. R è simmetrica, infatti se $f \sim g$, allora $f(x) = g(x)$ su A^c , ma si ha anche $g(x) = f(x)$ su A^c cioè $g \sim f$.
3. R è transitiva, cioè mostro che se $f \sim g$ e $g \sim h$, allora $f \sim h$ .Se $f \sim g$ allora $f(x) = g(x) \forall x \in A^c$. Se $g \sim h$, allora $g(x) = h(x) \forall x \in B^c$, con $\mu(A) = 0$ e $\mu(B) = 0$.

   $$f(x) = h(x) \forall x \in A^c \cap B^c$$

   e verifico che il complementare di quest'intersezione ha misura nulla:

   $$\mu((A^c \cap B^c)^c) = \mu(A \cup B)$$

   per le leggi di complementazione, e $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0$.

Si può ora definire

$$L^p = \{[f]_R, \, t.c. \, f \text{ è misurabile, } \wedge \int |f|^p, \text{è finito}\}$$

Su questo spazio definisco la somma:

$$[f]_R + [g]_R = [f + g]_R$$

PASSO 2: **Verifico che la somma è ben definita e non dipende dalla scelta del rappresentante nella classe di equivalenza**.

Dimostrazione

Date $f, f_1 \in [f]_R$ e $g, g_1 \in [g]_R$ mostro che $f + g \sim f_1 + g_1$, cioè che $[f + g]_R = [f_1 + g_1]_R$.

$$f \sim f_1 \longrightarrow f = f_1 \forall x \in A^c, \text{con}\, \mu(A) = 0$$
$$g \sim g_1 \longrightarrow g = g_1 \forall x \in B^c, \;\text{con}\, \mu(B) = 0$$
$$f + g = f_1 + g_1 \forall x \in A^c \cap B^c$$

e come prima $\mu(A^c \cap b^c) = 0$.

Definisco poi il prodotto per uno scalare

$$[\alpha * f] = \alpha * [f]$$

e se $f \sim f_1$, ovviamente $\alpha f \sim \alpha f_1$.

Allora $\mathcal{L}^p$ con la somma e il prodotto definiti è uno spazio vettoriale.

Definisco la norma:

$$\|[f]\| = \|f\|_p$$

PASSO 3: **Mostro che la norma è ben definita, e non dipende dal rappresentante scelto in** $[f]_R$.

Dimostrazione

Mostro che

$$f \sim f_1 \longrightarrow \int_X |f|^p \, d\mu = \int_X |f_1|^p \, d\mu$$

Divido X in A e A^c , e non riscrivo l'integrale sull'insieme A di misura nulla che fa 0, quindi rimane da dimostrare:

$$\int_{A^c} |f|^p \, d\mu = \int_{A^c} |f_1|^p \, d\mu$$

e questo è vero perché su A^c f, f_1 coincidono.

Ora è soddisfatta anche la prima proprietà della norma che mancava negli spazi $\mathcal{L}^p$:

$$\|f\|_p = 0 \iff [f]_R = [0]_R$$

Infatti

$$\|f\|_p = 0 \iff \int_X |f|^p \, d\mu = 0$$

e questo è vero se e solo se l'integranda è quasi ovunque nulla, e quindi se $f \sim 0$.

Le altre proprietà continuano a valere.

Per brevità si scrive

$$L^p(\mu) = \{f : X \to \mathbb{R} \, t.c. \, f \text{ è misurabile}, \int |f|^p \text{ è finito}\}$$

ma in realtà questo è lo spazio delle classi di equivalenza.

1.6.1 Completezza di L^p

Teorema 1.4

Se $p \geq 1$ e μ è una misura positiva, $L^p(\mu)$ è completo per la norma p .

Per la dimostrazione servono alcuni preliminari.

Considero una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valori reali. Fisso un intero k e pongo $b_k = \inf\{a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\}$ allora $b_k \leq b_{k+1}$. Pongo $\liminf a_n = \sup b_k$. Analogamente si pone

$$\limsup a_n = \inf_k \sup_{n>k} a_n$$

La successione ammette limite se e solo se il liminf e il limsup coincidono.

Prendendo tutte le sottosuccessioni convergenti della successione di partenza, se calcolo l'inf di questi limiti ottengo l'inf della successione di partenza.

Il liminf di una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è la funzione definita puntualmente come $\liminf f_n(x)$.

Lemma (di Fatou)

Data una successione di funzioni misurabili positive $f_n : X \to [0,\infty]$ con f_n misurabili, allora

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Proposizione 1.6 (estrazione di una sottosuccessione)

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di Cauchy in L^p , cioè tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste N tale che per ogni coppia di indici $m, n > N$ segue che

$$\|f_n - f_m\|_p \le \varepsilon.$$

Allora esiste una sottosuccessione $(f_n)_i$ estratta dalla successione di partenza tale che, per ogni i ,

$$\|(f_n)_{i+1} - (f_n)_i\|_p \le \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Dimostrazione

Pongo $\varepsilon = 1$. Allora esiste un indice n_1 tale che per ogni $m, n > n_1$, allora

$$\|f_n - f_m\| \le \varepsilon$$

Scelgo $(f_n)_1 = f_{n_1}$ come primo elemento della sottosuccessione.

Per $\varepsilon = 1/2$ ripeto il procedimento: esiste n_2 tale che per ogni $m, n > n_2$

$$\|f_m - f_n\| \le 1/2$$

Posso scegliere $n_1 < n_2 < \dots$ senza perdita di generalità, perché n_2 verifica sicuramente la condizione vera per $n > n_1$, che è più debole.

Come secondo elemento della sottosuccessione considero quindi f_{n_2} .

Gli elementi che sto scegliendo verificano la proprietà, perché per $i = 0$ si ha:

$$\|f_{n_2} - f_{n_1}\| \le 1 = \frac{1}{2^{i-1}}$$

(e questo è vero perché $n_2 > n_1$ e per $n > n_1$, $|f_m - f_n| \le 1$.)

Proseguo e pongo $\varepsilon = 1/4 = \frac{1}{2^2}$. Allora esiste $n_3 > n_2 > n_1$ tale che per ogni $n, m > n_3$

$$\|f_n - f_m\| \leq 1/4$$

e pongo $(f_n)_3 = f_{n_3}$.

Per induzione costruisco la sottosuccessione che verifica la proprietà.

Dimostrazione (dimostrazione della completezza)

Data una successione di Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, per ogni k, chiamo

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

dove le f_{n_i} sono gli elementi della sottosuccessione scelta prima.

Osservo che per Minkowski, avendo una somma finita

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leq \sum_{i} \frac{1}{2^{i-1}} \leq 1,$$

(ho una parte della sommatoria della serie geometrica di ragione 1/2 .)

quindi g_k **sta in** L^p .

Definisco poi

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| = \lim_{k\to\infty} g_k$$

Applico il lemma di Fatou:

$$\int |g|^p = \int \liminf_{k\to\infty} |g_k|^p \leq \liminf \int |g_k|^p \leq 1$$

per la formula 1, quindi **ho mostrato che** $g \in L^p$ perché ha integrale finito.

Anche l'integranda $g(x)$ dev'essere finita quasi ovunque.

Pongo

$$f = f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$$

la serie è assolutamente convergente quasi ovunque, e pongo $f(x) = 0$ dove la serie non converge assolutamente (è un insieme di misura nulla).

Ho una serie telescopica, quindi

$$\sum_{i=1}^{k-1} f_{n_{i+1}} - f_{n_i} = f_{n_k} - f_{n_1}$$

Allora

$$f = f_{n_1} + \lim_{k\to\infty} f_{n_k} - f_{n_1} = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}$$

f **può essere considerato come limite della successione estratta**.

Applico nuovamente Fatou a $|f - f_{n_k}|$. Per come sono state definite le f_{n_k} , per ogni ε esiste N tale che per ogni $m, n > N$

$$\int |f_m - f_n|^p \, d\mu \leq \varepsilon$$

Fisso $m > M$. Applico Fatou sapendo che $f_{n_k} \to f$.

$$\int_X |f - f_m|^p \, d\mu = \int \liminf |f_{n_k} - f_m|^p \leq \liminf_n \int_X |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leq \varepsilon^p$$

Allora $f - f_m \in L^p$, allora **anche** $f \in L^p$, infatti $f = f - f_m + f_m$ ed è somma di funzioni di L^p .

Rimane da mostrare che

$$\|f - f_m\|_p \to 0 \iff m \to \infty$$

ma per $m > M$, ho già dimostrato

$$\|f - f_m\|_p \leq \varepsilon$$

Quindi **la successione converge al limite puntuale di** f_{n_k} **che sta in** L^p **per quanto dimostrato prima**, e ogni successione di Cauchy converge.

Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è unna successione di Cauchy in $\mathcal{L}^p$, allora esiste $f \in \mathcal{L}^p$ che è limite puntuale di una sottosuccessione di f_n . In generale devo considerare sottosuccessioni, e non posso affermare che tutta la successione converge puntualmente al limite.

Ci sono due tipi di convergenza.

Non è vero che una successione di Cauchy converge puntualmente al limite della successione in L^p , come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.6

Su $[0, 1]$, definisco questa successione di funzioni:

$$f_1 = 1 \forall x$$

$$f_{2,1} = \begin{cases} 1 & \iff x \in [0, 1/2] \\ 0 & \iff x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

$$f_{2,2} = \begin{cases} 0 & \iff x \in [0, 1/2] \\ 1 & \iff x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Al passo successivo suddivido l'intervallo in quattro:

$$f_{4,1} = \begin{cases} 1 & \iff x \in [0, 1/4] \\ 0 & \iff x \in [1/4, 1] \end{cases}$$

$$f_{4,2} = \begin{cases} 1 & \iff x \in [1/4, 2/4] \\ 0 & \iff x \in [0, 1/4] \vee x \in [2/4, 1] \end{cases}$$

$$f_{4,3} = \begin{cases} 1 & \iff x \in [2/4, 3/4] \\ 0 & \iff x \in [0, 2/4] \vee x \in [3/4, 1] \end{cases}$$

$$f_{4,4} = \begin{cases} 1 & \iff x \in [3/4, 1] \\ 0 & \iff x \in [0, 3/4] \end{cases}$$

Poi divido in ottavi e ripeto il procedimento. Il picco delle funzioni si sposta lungo l'intervallo, e diminuisce ogni volta che le suddivisioni dell'intervallo aumentano.

Si ha che $f_n \to 0$ in $L^1([0, 1])$, cioè

$$\int_0^1 |f_n - 0| \, dx \to 0$$

infatti, se $f_n = f_{m,k}$ tale che $[0, 1]$ è fatto da intervalli di ampiezza $1/m$ a quel passo, si ha che l'integrale è l'area del picco, cioè

$$\int_0^1 f_n \, dx = 1/2^m$$

ma per $m \to \infty$, l'integrale va a 0.

Questa successione però non converge puntualmente, infatti, per x fissato $f_n(x)$ vale alternatamente 0 e 1 e non converge, infatti al crescere di n , x si può trovare sopra o sotto il picco.

Però posso prendere una sottosuccessione, che converge puntualmente alla funzione nulla. Considero la sottosuccessione $f_{m,1}$ pr ogni m , cioè prendo solo le funzioni in cui il picco si trova all'inizio, cioè la successione della prima funzione che definisco dopo ogni suddivisione.

Se prendo x positiva, il picco definitivamente si sposta a sinistra e quindi f converge alla funzione nulla puntualmente.

1.6.2 Lo spazio L^infinito

Chiamo

$$L^{\infty} = \{f : X \to \mathbb{R}\,\text{misurabili}\,t.c.\,\exists m\,t.c.\,|f(x)| \leq m \text{ quasi ovunque}\}$$

L^{∞} è l'insieme delle funzioni essenzialmente limitate.

Pongo $\beta = \inf\{m\,t.c.\,|f(x)| < m\}$ e dimostro che β è un minimo, cioè che $|f| \leq \beta$.

Per mostrare che $|f(x)| \leq \beta$ quasi ovunque mostro che

$$X = \{x\,t.c.\,|f(x)| \geq \beta\}$$

ha misura nulla.

Per ogni n , definisco

$$E_n = \{x\,t.c.\,|f(x)| > \beta + 1/n\}$$

e questo insieme ha misura nulla.

$$E = \bigcup_n E_n$$

allora $\mu(E) = 0$ perché è unione di insiemi di misura nulla.

Quindi $\beta = \inf m$ è un minimo e $|f(x)| \leq \beta$ quasi ovunque.

Mostro che β è una norma:

1. $f = 0$ quasi ovunque se e solo se $\|f\|_{\infty} = 0$, perché posso eliminare l'insieme di misura nulla in cui f non è nulla.
2. $\|\alpha f\|^{\infty} = |\alpha| * \|f\|^{\infty}$
3. se prendo due funzioni essenzialmente limitate deve valere la disuguaglianza triangolare. Quasi ovunque

$$|f(x) + g(x)| \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$$

Quindi (L^{∞}, β) è uno spazio normato e si può dimostrare che è completo.

La disuguaglianza di Hoelder si estende al caso $p = \infty$, $q = 1$. La disuguaglianza di Hoelder dice che se $f \in L^1, g \in L^{\infty}$, allora

$$|fg|_1 \leq \|f\|_{\infty} * \|g\|_1$$

Capitolo 2

Spazi di Hilbert

2.1 Spazi con prodotto scalare

2.1.1 Prodotto scalare

Definizione 2.1

Considero uno spazio vettoriale reale o complesso, di dimensione anche infinita. Si chiama *prodotto scalare* su X una forma bilineare $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$, che verifica le seguenti condizioni:

1. linearità rispetto la prima componente, cioè

$$\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle,$$

2. simmetria

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

e tale che

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$$

Nel caso complesso si richiede che $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, cioè è antilineare nella seconda variabile, mentre vale la linearità nella prima componente. Valgono le seguenti proprietà:

1.

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

2.

$$\begin{aligned} \langle x, \alpha y \rangle &= \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} \\ &= \bar{\alpha} * \overline{\langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Esempio 2.1

Un esempio è $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard.

Esempio 2.2

Dato l^2 reale, formato da tutte le successioni tali che $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, un prodotto scalare è dato da

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_i y_i$$

Questo è un prodotto scalare se

$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha * \langle x, z\rangle + \beta * \langle y, z\rangle$$
$$\langle \alpha x + \beta y, z\rangle =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_i + \beta y_i) z_i$$

e per le proprietà distributive

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha x_i z_i + \beta y_i z_i)$$
$$= \alpha \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i + \beta \sum_{i=1}^{\infty} y_i z_i$$
$$= \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$$

Esempio 2.3

Sullo spazio

$$L^2 = \{f \,\text{misurabili}\, t.c. \int_X |f|^2 \, dx < \infty\}$$

definisco il prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \int_X f(x) g(x) \, dx$$

mentre nel caso complesso

$$\langle f, g\rangle = \int_X f \bar{g} \, dx$$

Questo è un prodotto scalare, infatti

$$\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \int_X (\alpha f + \beta g) h \, dx$$

e per additività dell'integrale

$$= \int_X \alpha f h \, dx + \int_X \beta g h \, dx$$
$$= \alpha * \int_X f h \, dx + \beta * \int_X g h \, dx$$

e portando fuori gli scalari

$$\alpha * \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle$$

Inoltre

$$\langle f, f \rangle = \int_X f^2 \, dx = 0$$

se e solo se f è la classe di equivalenza di 0, perché f dev'essere 0 a meno di un insieme di misura nulla.

Il prodotto scalare induce una norma, data come la radice del prodotto scalare di x con se stesso, ad esempio, su $L^2([0,1])$,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f|^2 \, dx}$$

2.1.2 Caso generale della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Teorema 2.1

Considero due vettori x, y , e mostro che

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| * \|y\|.$$

Dimostrazione

Prendo vettori $x, y \in \mathbb{R}^2$ e $t \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty \rangle = (x + ty) \cdot (x + ty) \geq 0$$

e sviluppando il prodotto

$$x \cdot x + x \cdot ty + tx \cdot y + ty \cdot ty \geq 0$$
$$x \cdot x + 2tx \cdot y + t^2 y \cdot y \geq 0$$

Per ogni t reale, il trinomio in t è positivo se il delta è negativo, quindi

$$4x \cdot y * x \cdot y - 4x \cdot x * y \cdot y \leq 0$$

quindi, estraendo la radice quadrata

$$\|x \cdot y\| \leq \sqrt{x \cdot x} * \sqrt{y \cdot y}.$$

2.1.3 Norme indotte da prodotti scalari

Come nel caso di dimensione finita, poniamo $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, e verifico che sia una norma su X :

1. se il vettore è nullo, $x \cdot x = 0$ e quindi $\|x\| = 0$, e viceversa.
2. $$\|tx\| = \sqrt{tx \cdot tx} = \sqrt{t^2 x \cdot x} = |t| * \|x\|$$
3. dati x, y , verifico che

$$\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y$$
$$= \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2$$

e applicando Cauchy-Schwartz:

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| * \|y\| + \|y\|^2$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

2.1.4 Spazio di Hilbert e disuguaglianza del parallelogramma

Definizione 2.2

Uno spazio è *di Hilbert* se è uno spazio completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare.

Teorema 2.2

Dato un prodotto scalare e presi due vettori in X ,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Nel caso di $\mathbb{R}^2$, questa disuguaglianza implica che la somma delle lunghezze delle diagonali di un parallelogramma al quadrato è uguale alla somma dei lati al quadrato moltiplicata per 2. x, y rappresentano i lati del parallelogramma.

In $\mathbb{R}^2$, questa disuguaglianza si dimostra geometricamente usando il teorema del coseno: Il quadrato costruito sulla diagonale è uguale alla somma dei quadrati delle lungezze dei lati meno il doppio prodotto delle lunghezze dei lati per il coseno tre i lati.

Dimostrazione

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =$$
$$= (x+y)\cdot(x+y) + (x-y)\cdot(x-y) =$$
$$= x\cdot x + 2x\cdot y + y\cdot y + x\cdot x - 2x\cdot y + y\cdot y$$
$$= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

2.1.5 Vettori ortogonali

Definizione 2.3

I vettori x, y sono ortogonali se $x \cdot y = 0$, e si scrive $x \perp y$.
Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$|x\cdot y| \leq \|x\| * \|y\|$$

quindi, dividendo per $\|x\| * \|y\|$:

$$\frac{|x\cdot y|}{\|x\| * \|y\|} \leq 1$$
$$-1 \leq \frac{x\cdot y}{\|x\| * \|y\|} \leq 1$$

e questa quantità rappresenta il coseno dell'angolo tra i due vettori, cioè

$$\cos\phi = \frac{x\cdot y}{\|x\| * \|y\|}$$

In $\mathbb{R}^2$, questo risultato si ricava sapendo che il prodotto scalare si definisce anche come

$$x\cdot y = \|x\| * \|y\| * \cos\phi$$

e da qui si ricava l'espressione di $\cos\phi$, che coincide con quella trovata prima nel caso generale.

2.1.6 Uguaglianza di Cauchy-Schwarz

Per ottenere il caso in cui vale l'uguaglianza di Cauchy-Schwarz, si impone che

$$(x+ty)\cdot(x+ty) = 0$$

invece che con il segno $\leq$ come prima, e questo avviene quando $x + ty = 0$, cioè quando x, y sono linearmente dipendenti.

Verifico se questo è vero:

$$x \cdot y = x \cdot tx = tx \cdot x$$
$$\|x\| * \|y\| = \|x\| * |t| * \|x\| = |t| * \|x\|^2 = |t| * x \cdot x$$

e le due quantità sono uguali.

Teorema (Disuguaglianza di Hoelder)

$$\int fg\, dx \leq \|f\|_p * \|g\|_q$$

c'è l'uguaglianza quando f^p, g^q sono linearmente dipendenti, cioè se esistono α, β non nulli tali che

$$\alpha f^p = \beta g^q$$

quasi ovunque.

2.1.7 Vettore perpendicolare ad un insieme

Definizione 2.4

Se $A \subset X$ si dice che $x \perp A$ se $x \perp a, \forall a \in A$. $B \perp A$ se $a \perp b \forall a \in A, b \in B$. Definisco poi

$$A^{\perp} = \{x \in X\, t.c.\, x \perp a, \forall a \in A\}$$

$A \subset (A^{\perp})^{\perp}$ e in certi casi questi due spazi coincidono.

Esercizio 2.1

Determinare gli spazi $(A \cup B)^{\perp}$ e $(A \cap B)^{\perp}$.

$$(A \cap B)^{\perp} = \{x\, t.c.\, x \cdot y = 0,\ \forall y \in A \cap B\}$$
$$(A \cup B)^{\perp} = \{x\, t.c.\, x \cdot a = 0,\ \forall a \in A \cup B\}$$
$$\{x\ t.c.\, x \cdot a = 0,\ x \cdot b = 0, \forall a \in A, b \in B\}$$

2.1.8 Distanza

Definizione 2.5

$A \subset X$ si dice *convesso* se dati $x, y \in A$ e $t \in [0, 1]$, la combinazione convessa

$$tx + (1 - t)y \in A.$$

Geometricamente, presi due punti x, y , il segmento che congiunge i due punti dev'essere contenuto in A .

Dati due insiemi convessi, $A \cap B$ è ancora un insieme convesso. Dato $B \subset X$ che a priori non è convesso, il più piccolo convesso che contiene B è l'intersezione di tutti i convessi che contengono B .

Definizione 2.6

Se (X, d) è uno spazio metrico, $x \in X$, allora la *distanza del punto* x *da un sottoinsieme* A è data da

$$\inf_{a \in A} \{d(x, a)\}.$$

Se $x \in A$, $d(x, A) = 0$.

Esercizio 2.2

Dimostrare che $x \in \bar{A}$ se e solo se $d(x, A) = 0$.

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: se $x \in \bar{A}$, o $x \in A$ o $x \in A'$. Se $x \in A$, è ovvio che $d(x, a) = 0 \forall a \in A$. Se $x \in A'$, per ogni intorno di centro x e raggio ε tale che

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

allora esiste almeno un $a \in A$ tale che $d(x, a) \leq \varepsilon$, e siccome questo vale per ogni ε , $d(x, a) = 0$ e quindi

$$d(x, A) == \inf_{a \in A} \{d(x, a)\} = 0$$

$2 \longrightarrow 1$: viceversa, se $d(x, A) = 0$, significa che esiste $a \in A$ tale che

$$d(x, a) = 0$$

ma questo significa che, per ogni ε , $a \in B(x, \varepsilon)$, e quindi

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

e quindi $x \in A$ o $x \in A'$.

Esercizio 2.3

In generale, dato un insieme qualunque, la distanza non è realizzata da un solo punto, e il punto di minima distanza potrebbe anche non esistere. Pensare ad un esempio in cui questo avviene.

Dimostrazione

In $\mathbb{R}^2$, considero un quadrato di vertici $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ e $(2, 2)$. Allora, se considero la distanza del punto $(1, 1)$ da questo insieme, la distanza minima è realizzata dai punti $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$.

In $\mathbb{R}$, considero l'insieme dei numeri della forma $1/n$ al variare di $n \in \mathbb{N}$. Allora $d(-1, A) = -1$, ma non esiste nessun punto che realizza la distanza minima.

Considero uno spazio di Hilbert e un insieme convesso chiuso non vuoto K di X . Considero un punto x che non appartiene a K . Allora esiste un unico $y \in K$ tale che $d(x, y) = d(x, K)$.

2.1.9 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz nel caso complesso

Dati $x, y \in \mathbb{C}^n$ e $t \in \mathbb{C}$, considero

$$(x + ty) \cdot (x + ty) \geq 0$$

Tenendo conto che $x \cdot y = \overline{y \cdot x}$, e che valgono le proprietà $(\alpha x) \cdot y = \alpha(x \cdot y)$ e $x \cdot (\alpha y) = \bar{\alpha} x \cdot y$, sviluppo il primo membro:

$$\|x\|^2 + tx \cdot y + y \cdot (tx) + (ty) \cdot (ty) = 0$$
$$\|x\|^2 + tx \cdot y + \bar{t}y \cdot x + t\bar{t}\|y\|^2 = 0$$

pongo

$$t = re^{i\theta}, \quad \bar{t} = re^{-i\theta}, \quad x \cdot y = \beta e^{-i\theta}, \quad y \cdot x = \beta e^{i\theta}.$$
$$\|x\|^2 + re^{i\theta}\beta e^{-i\theta} + r\beta e^{-i\theta}e^{i\theta} + r^2 e^{i\theta}e^{-i\theta}\|y\|^2 = 0$$

Gli esponenziali si semplificano:

$$\|x\|^2 + 2r\beta + r^2\|y\|^2 = 0$$

Ho un trinomio in r^2 , che essendo positivo deve avere delta negativo.

$$4\beta^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

ma

$$\beta^2 = \frac{x \cdot y * y \cdot x}{e^{i\theta}e^{-i\theta}} = x \cdot y * \overline{x \cdot y} = |x \cdot y|^2$$

quindi

$$|x \cdot y|^2 \leq \|x\|^2 * \|y\|^2$$

2.1.10 Teorema di Pitagora

Teorema 2.3 (teorema di Pitagora)

Per ogni n , considero vettori $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tali che $x_i \perp x_j$ se $i \neq j$, allora segue che

$$(\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|)^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Dimostrazione

La dimostrazione è per induzione.

Passo base: se $n = 2$ e $x_1 \perp x_2$, allora

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_1 + \|x_2\|^2$$

ma per ortogonalità i termini centrali sono nulli e rimane

$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2.$$

Supponiamo che la tesi sia vera per $n - 1$ e la dimostro per n .

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + x_n\|^2$$

e siccome x_n e $x_1 + \cdots + x_{n-1}$ sono perpendicolari, per il caso $n = 2$ si ha:

$$= \|x_1 + \cdots + x_{n-1}\|^2 + \|x_n\|^2$$

ma applicando l'ipotesi induttiva

$$= \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_{n-1}\|^2 + \|x_n\|^2.$$

Nel caso $n = 2$ vale anche l'implicazione inversa, cioè se vale il teorema di Pitagora, allora $x_1 \perp x_2$.

2.1.11 Identità polari

Le identità polari permettono di esprimere il prodotto scalare in termini della norma.

Nel caso reale:

$$\|x + y\|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = \|x\|^2 + x \cdot y + y \cdot x + \|y\|^2$$

e nel caso reale i termini centrali coincidono, quindi

$$\|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2$$

quindi

$$x \cdot y = 1/2[\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2]$$

e il primo membro c'è il prodotto scalare che si può ricavare conoscendo la norma.

Tuttavia non è detto che data una norma, la quantità al primo membro sia un prodotto scalare.

Teorema 2.4 (teorema di Von Neumann)

A partire dal prodotto scalare al primo membro posso definire la norma

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

se vale l'uguaglianza del parallelogramma:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Nel caso complesso, vale sempre la seguente identità polare:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re(x \cdot y) + \|y\|^2$$

Dimostrazione

Considero le quattro relazioni seguenti

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + x \cdot y + y \cdot x + \|y\|^2 \\
-\|x-y\|^2 &= -\|x\|^2 + x \cdot y + y \cdot x - \|y\|^2 \\
i\|x+iy\|^2 &= i[\|x\|^2 - ix \cdot y + iy \cdot x - i^2\|y\|^2] \\
&= i\|x\|^2 + x \cdot y - y \cdot x + i\|y\|^2 \\
-i\|x-iy\|^2 &= -i[\|x\|^2 + ix \cdot y - iy \cdot x - i^2\|y\|^2] \\
&= -i\|x\|^2 + x \cdot y - y \cdot x - \|y\|^2
\end{aligned}$$

e sommando le quattro uguaglianze, tenendo conto che i termini della forma $y \cdot x, \|x\|^2, \|y\|^2$ si elidono rimane:

$$4x \cdot y = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.$$

2.1.12 Distanza in spazi di Hilbert

Teorema 2.5

Nelle ipotesi che X sia di Hilbert e K sia un convesso chiuso non vuoto e $x \in X$, allora esiste uno e un solo punto $k_0 \in K$ tale che

$$\|x - k_0\| = d(x, K) = \inf_{k \in K} d(x, k).$$

Obbiezioni: Intuitivamente negli spazi finiti dato un punto, si può considerare una bolla che interseca l'insieme da cui voglio calcolare la distanza. Siccome la bolla è un compatto e la distanza è continua, allora ammette un minimo per il teorema di Weierstrass, ma questo non avviene in spazi infiniti, quindi in uno spazio di dimensione infinita non c'è nessuna garanzia che il minimo che realizza la distanza esista. Anche in spazi di dimensione finita l'esistenza del punto di minima distanza avviene con certezza solo se l'insieme è chiuso.

Esercizio 2.4 (esercizio preliminare)

Mostrare che traslando un convesso di un vettore x , ottengo ancora un insieme convesso.

Dimostrazione

Considero

$$K - x = \{k - x,\, k \in K\}$$

Considero la combinazione convessa di due vettori in $K - x$:

$$\begin{aligned} t(k_1 - x) + (1-t)(k_2 - x) &= tk_1 - tx + k_2 - x - tk_2 + tx \\ &= tk_1 + k_2 - x - tk_2 = tk_1 + (1-t)k_2 - x \end{aligned}$$

e siccome K è convesso, $tk_1 + (1-t)k_2 \in K$, e quindi ho ottenuto un vettore della forma $h - x, h \in K$ che sta quindi in $K - x$, cioè $K - x$ è chiuso per combinazioni convesse.

Dimostrazione (dimostrazione del teorema)

IPOTESI PRELIMINARI: Siccome traslando un insieme convesso e chiuso ho ancora un insieme convesso e chiuso, ci possiamo limitare al caso $x = 0$, inoltre supponiamo $x \notin K$, altrimenti x è punto di minima distanza. ESISTENZA DI K_0 : definisco $d = \inf_{k \in K} d(0, k)$ e cerco $k_0 \in K$ tale che $\|k_0\| = d(0, k_0) = d$.

Siccome d è definita come $\inf_{k \in K} d(x, k)$, ogni punto in K avrà distanza maggiore di d , quindi esiste una successione di vettori $k_n \in K$ con la seguente proprietà: dato ε positivo, posso trovare N tale che per ogni $n \geq N$, allora

$$\|k_n\|^2 \leq d^2 + \varepsilon, \text{ relazione } *$$

Mostro che la successione $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, e per farlo applico l'uguaglianza del parallelogramma alla differenza $(k_n - k_m)/2$:

$$\|(k_m - k_n)/2\|^2 + \|(k_n + k_m)/2\|^2 = 2\|k_m/2\|^2 + 2\|k_m/2\|^2$$

e semplificando

$$\|(k_m - k_n)/2\|^2 = 1/2\|k_m\|^2 + 1/2\|k_n\|^2 - \|(k_m + k_n)/2\|^2 \geq 0$$

Maggioro ogni termine di segno positivo e minoro quelli di segno negativo. A priori $\|(k_n + k_m)/2\| \geq d$ perché $(k_n + k_m)/2$ è punto medio del segmento di estremi k_m, k_n e per la convessità di K appartiene all'insieme, invece $1/2\|k_n\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$ per la relazione $*$. Quindi

$$\|(k_n - k_m)/2\|^2 \leq 1/2[2d^2 + 2\varepsilon] - d^2 \leq d^2 + \varepsilon - d^2 \leq \varepsilon$$

quindi la successione è di Cauchy, e converge per l'ipotesi di completezza (spazio di Hilbert) ad un certo valore k_0 .

Per l'ipotesi di chiusura $k_0 \in K$.

$$\|k_0\| = \|k_0 + k_n - k_n\| \leq \|k_0 - k_n\| + \|k_n\|$$

e per $n \to \infty$, il primo termine tende a 0 e il secondo a d .

Allora è vero che $\|k_0\| = d$ e ho trovato l'elemento di minima distanza dall'origine.

UNICITÀ: Supponiamo che esista $h_0 \in K$ tale che anche $\|h_0\| = d$. Per l'uguaglianza del parallelogramma

$$\|(h_0 - k_0)/2\|^2 + \|(h_0 + k_0)/2\|^2 = 1/2\|h_0\|^2 + 1/2\|k_0\|^2 = 1/2 * 2d^2 = d^2$$

Isolando il primo termine

$$\|(h_0 - k_0)/2\|^2 = d^2 - \|(h_0 + k_0)/2\|^2$$

ma $(h_0 + k_0)/2 \in K$, quindi $\|(h_0 + k_0)/2\|^2 \geq d^2$, e si ha

$$\|(h_0 - k_0)/2\|^2 \leq 0$$

quindi, per la positività della norma, questa dev'essere uguale a 0 e quindi $h_0 = k_0$.

COMMENTO: E' stata usata più volte la convessità per determinare k_0 e la regola del parallelogramma, anche l'ipotesi che lo spazio sia completo è fondamentale.

2.1.13 Caso di insieme lineare chiuso

Sia ora M un sottospazio lineare chiuso. M è convesso perché contiene le combinazioni lineari e quindi anche quelle convesse, allora dato $h \in X$ qualunque, esiste un unico elemento $f_0 \in M$ tale che

$$\|h - f_0\| = d(h, M)$$

Teorema 2.6

Se M è un sottospazio lineare chiuso, allora f_0 è tale che $\|h - f_0\| = d(h, M)$ se e solo se $h - f_0$ è ortogonale ad M , cioè, se e solo se $(h - f_0) \perp f \forall f \in M$.

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: Supponiamo che f_0 realizzi la minima distanza d , allora mostro che $h - f_0$ è perpendicolare ad ogni vettore f . Fisso f e osservo che $f_0 + f \in M$ per la struttura lineare dell'insieme, quindi

$d(h, f_0 + f) \geq d(h, f_0) = d$ e si ha:

$$\|h - f - f_0\|^2 \geq \|h - f_0\|^2, \text{ formula } *$$

Per l'identità polare sui complessi:

$$\|h - f_0 - f\|^2 = \|h - f_0\|^2 - 2Re((h - f_0) \cdot f) + \|f\|^2$$

e maggiorando il primo termine al secondo membro usando la formula $*$:

$$\|h - f_0 - f\|^2 \leq \|h - f_0 - f\|^2 - 2Re((h - f_0) \cdot f) + \|f\|^2$$

ed eliminando i termini opposti e portando $Re((h - f_0) \cdot f)$ al primo membro:

$$2Re((h - f_0) \cdot f) \leq \|f\|^2, \forall f \in M$$

Sostituisco $f = te^{-i\theta} f \in M$, dove θ è l'angolo tra $(h - f_0) \cdot f$ e f (segue quindi che, semplificando

per f , $te^{-i\theta} = 1$), e pongo $(h - f_0) \cdot f = re^{i\theta}$.

$$2Re((h - f_0) \cdot f * 1) = 2Re((te^{i\theta} re^{-i\theta}) = t^2 \|f\|^2$$
$$2Re(tr) = 2tr = t^2 * \|f\|^2$$
$$2r \leq t * \|f\|^2, \forall t \in \mathbb{R}$$

Se $t \to 0$, $r = 0$ e quindi $r * e^{i\theta} = (h - f_0) \cdot f = 0 \forall f$. Quindi il prodotto scalare è nullo con ogni vettore di f .

$2 \longrightarrow 1$: suppongo che $h - f_0$ sia ortogonale a M e mostro che

$$d(h - f_0, M) \leq d(h - f, M) \, \forall h \in M$$

Considero $f_0 - f \in M$.

$$\|h - f\|^2 = \|h - f_0 + f_0 - f\|^2$$

ma $h - f_0 \perp f_0 - f$, quindi applico il teorema di Pitagora al secondo membro:

$$\|h - f\|^2 = \|h - f_0\|^2 + \|f_0 - f\|^2$$

allora, siccome al secondo membro ho la somma di due quantità positive, $\|h - f\|^2 \geq \|h - f_0\|^2$.

Ad ogni x , si può associare il vettore $P_M(x)$ proiezione di x su M .

2.2 Proiezione ortogonale

2.2.1 Proprietà utili

Osservazione 2.1

Il prodotto scalare è uniformemente continuo, e la funzione che associa a un vettore la sua norma è uniformemente continua.

Dimostrazione

Mostro la *continuità nella prima componente*, cioè, se $x_n \to x$, allora $x_n \cdot y \to x \cdot y$.

Per linearità del prodotto scalare

$$\begin{aligned} x_n \cdot y - x \cdot y &= (x_n - x) \cdot y \\ &\leq \|x_n - x\| \|y\| \end{aligned}$$

per la disuguaglianza di cauchy-schwarz.

Quando $x_n \to x$, $\|x_n - x\| \to 0$, quindi $x_n \cdot y \to x \cdot y$.

Per lo stesso motivo, se $y_n \to y$ allora $x \cdot y_n \to x \cdot y$, cioè vale la *continuità nella seconda componente*.

Inoltre $x_n \cdot y_n \to x \cdot y$, infatti, aggiungendo e togliendo $x_n \cdot y$:

$$x_n \cdot y_n - x \cdot y = (x_n \cdot y_n - x_n \cdot y) + (x_n \cdot y - x \cdot y)$$

e per la continuità nella seconda componente $x_n \cdot y_n - x_n \cdot y \to 0$, mentre $x_n \cdot y - x \cdot y \to 0$, quindi il tutto tende a 0.

Ora mostro la *continuità della norma*:

$$x = x - y + y$$

quindi

$$\begin{gathered} \|x\| \leq \|x - y\| + \|y\| \\ \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|, \text{ formula 1} \end{gathered}$$

e scambiando i ruoli di x e y :

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|, \text{ formula 2}$$

quindi, per le formule 1 e 2

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

e quindi la norma è uniformemente continua.

2.2.2 Relazioni sul complemento ortogonale

Considero lo spazio X con un prodotto scalare, e $A \subset X$.

1. Se $A \subset B$, allora $B^{\perp} \subset A^{\perp}$ .Dim. Un elemento che sta in $B^{\perp}$ ha prodotto ortogonale nullo con ogni vettore di B , e quindi anche con quelli di A e sta in $A^{\perp}$.
2. $A^{\perp} = (\bar{A})^{\perp}$ .Dim. Siccome $A \subset \bar{A}$, allora vale l'inclusione $(\bar{A})^{\perp} \subset A^{\perp}$ per il punto precedente.Per dimostrare l'altra inclusione prendo $z \in A^{\perp}$.

$$b \in \bar{A} \longrightarrow b = \lim a_n,\ a_n \in A$$

e sappiamo che $z \cdot a_n = 0 \forall n$ perché $z \in A^{\perp}$. Per la continuità del prodotto scalare

$$z \cdot b = \lim_{n \to \infty} z \cdot a_n = 0.$$

cioè $z \in (\bar{A})^{\perp}$ e vale la doppia inclusione.

3. per ogni sottoinsieme $A \subset X$, vale l'inclusione $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$ .Dim. Dato $x \in A$, mostro che $x \cdot z = 0, \forall z \in A^{\perp}$, ma questo è vero perché, siccome $z \in A^{\perp}$, ha prodotto scalare nullo con ogni vettore di A .
4. L'ortogonale di ogni sottoinsieme A è un sottospazio lineare chiuso.Dim. Considero la successione $z_n \subset A^{\perp}$ tale che $z_n \to z$, allora segue che

$$z \cdot a = \lim z_n \cdot a = 0$$

quindi $z \in A^{\perp}$ e lo spazio $A^{\perp}$ è chiuso.Dati $z, v \in A^{\perp}$, anche la somma $z + v$ è contenuta in $A^{\perp}$, infatti, per la linearità del prodotto scalare:

$$(z + v) \cdot a = z \cdot a + v \cdot a = 0.$$

quindi $A^{\perp}$ è lineare.

2.2.3 Proiezione ortogonale

Sia X uno spazio di Hilbert e M un sottospazio lineare chiuso. Per ogni $x \in X$, esiste un punto di minima distanza di x da M , che indico con $P_M(x)$, e si ha

$$\|x - P_M(x)\| = \inf_{m \in M} d(x, m)$$

e inoltre per la linearità di M , $(x - P_M(x)) \perp M$.

2.2.4 Proprietà della proiezione P_M

Teorema 2.7

Se X è di Hilbert e M è un sottospazio chiuso, allora

1. P_M è lineare.

2. $P_M(x) \leq \|x\|$ per ogni $x \in X$,
3. $P_M^2 = P_M$ (cioè P_M è idempotente),
4. $\ker P_M = M^\perp$ mentre per l'immagine dello spazio totale si ha $P_M(X) = M$.
5. per ogni $x, y \in X$, $x \cdot P_M(y) = P_M(x) \cdot y$ (P_M è autoaggiunto)

Dimostrazione

1. *Linearità*: considero vettori x_1, x_2 e scalari $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e valuto il prodotto scalare
$$[(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 P_M(x_1) + \alpha_2 P_M(x_2))] \cdot m$$
e per le proprietà del prodotto scalare ottengo
$$\alpha_1(x_1 - P_M(x_1)) \cdot m + \alpha_2(x_2 - P_M(x_2)) \cdot m$$
e questo è nullo perché $x_i - P_M(x_i)$ è ortogonale a tutti i vettori di M .Da questo segue che
$$[(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - (\alpha_1 P_M(x_1) + \alpha_2 P_M(x_2))] \cdot m = 0,$$
ma a priori sappiamo che
$$[(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - P_M(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)] \cdot m = 0$$
quindi, per l'unicità della proiezione ortogonale, segue che $\alpha_1 P_M(x_1) + \alpha_2 P_M(x_2) = P_M(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$, e quindi segue la linearità.
2. P_M *riduce la norma*: Per ogni x vale l'uguaglianza
$$x = x - P_M(x) + P_M(x)$$
e $P_M(x) \in M$, quindi $x - P_M(x) \perp P_M(x)$, e applicando pitagora
$$\|x\|^2 = \|x - P_M(x) + P_M(x)\|^2 = \|x - P_M(x)\|^2 + \|P_M(x)\|^2$$
quindi $\|x\|^2 \geq \|P_M(x)\|^2$.
3. P_M *è idempotente*: Per $x \in M$, $P_M(x) = x$ (è il punto di minima distanza di x da M).
$$P_M^2(x) = P_M(P_M(x))$$
ma $P_M(x) \in M$ quindi ha come proiezione se stesso.
4. *Caratterizzazione del nucleo*:
$$\ker P_M = \{x \, t.c. \, P_M(x) = 0\}$$
Supponiamo che $x \in \ker P_M$, allora $P_M(x) = 0$, quindi
$$(x - P_M(x)) \cdot m = x \cdot m = 0 \forall m \in M,$$
quindi $x \in M^\perp$. Viceversa, se prendo $x \in M^\perp$, allora $x \cdot m = 0$ e quindi $(x - 0) \cdot m = 0 \forall m$, cioè $0 = P_M(x)$, quindi $x \in \ker P_M$.*Caratterizzazione dell'immagine*: Dato $m \in M$, allora $m = P_M(m)$, quindi $M \subset P_M(X)$, e vale anche viceversa.

5. *Proiezione ortogonale autoaggiunta*: per ogni x, y , $(x - P_M(x)) \cdot P_M(y) = 0$ perché $P_M(y) \in M$, quindi

$$x \cdot P_M(y) - P_M(x) \cdot P_M(y) = 0$$

$$x \cdot P_M(y) = P_M(x) \cdot P_M(y), \text{ formula 1.}$$

Analogamente

$$(y - P_M(y) \cdot P_M(x) = 0$$

quindi

$$y \cdot P_M(x) = P_M(y) \cdot P_M(x)$$

e passando ai coniugati, tenendo conto che $\overline{a \cdot b} = b \cdot a$:

$$P_M(x) \cdot y = P_M(x) \cdot P_M(y), \text{ formula 2}$$

e unendo le uguaglianze

$$P_M(x) \cdot y = x \cdot P_M(y)$$

2.2.5 Corollari utili

Corollario 2.1

Se M è sottospazio lineare chiuso, allora $M = (M^{\perp})^{\perp}$.

Dimostrazione

Abbiamo già mostrato che per qualsiasi sottospazio, non necessariamente chiuso, $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$, e dimostro l'inclusione opposta per sottospazi lineari chiusi. Prendo $x \in (M^{\perp})^{\perp}$, allora $x \cdot (y - P_M(y)) = 0 \forall y \in X$, perché $y - P_M(y) \in M^{\perp}$. Segue che $x \cdot y = x \cdot P_M(y)$. Siccome P_M è autoaggiunto, si può scrivere $x \cdot y = P_M(x) \cdot y$, cioè

$$(x - P_M(x)) \cdot y = 0$$

per ogni y , e si conclude che se $y = x - P_M(x)$, $(x - P_M(x)) \cdot (x - P_M(x)) = 0$, quindi $\|x - P_M(x)\|^2 = 0$, cioè $x = P_M(x)$ e quindi $x \in M$.

Corollario 2.2

Se $A \subseteq X$ non necessariamente lineare e chiuso, $(A^{\perp})^{\perp}$ è il più piccolo sottospazio lineare chiuso che contiene A .

Dimostrazione

Chiamo $\mathcal{C}$ l'insieme dei sottospazi lineari chiusi B che contengono A . Allora mostriamo che $\bigcap_{B \in \mathcal{C}} B = (A^{\perp})^{\perp}$. $(A^{\perp})^{\perp}$ è un sottospazio lineare chiuso che contiene A , quindi contiene l'intersezione. Viceversa, prendo un sottospazio lineare chiuso che contiene A , quindi valgono le seguenti inclusioni:

$$A \subset B, \quad \longrightarrow \quad B^{\perp} \subset A^{\perp} \quad \longrightarrow \quad (A^{\perp})^{\perp} \subseteq (B^{\perp})^{\perp}$$

e $(B^{\perp})^{\perp} = B$ per il corollario 1 perché B è un sottospazio lineare chiuso, e questo è vero per ogni B , quindi vale la doppia inclusione.

Per dimostrare il corollario successivo è necessario il seguente lemma:

Lemma 2.1

Considerando l'operazione di moltiplicazione per scalari, che associa alla coppia (x, t) il vettore tx , questa è una funzione continua nelle due variabili, in altre parole, se $x_n \to x$ e $t_n \to t$, allora $t_n x_n \to tx$.

Dimostrazione

$$
\begin{aligned}
t_n x_n - tx &= t_n x_n + t_n x - t_n x - tx \\
\|t_n x_n - tx\| &\leq \|t_n x_n - t_n x\| + \|t_n x - tx\| \\
&= |t_n| * \|x_n - x\| + |t_n - t| * \|x\|
\end{aligned}
$$

la successione t_n è limitata

$$
\begin{aligned}
\|x_n - x\| &\to 0 \\
|t_n - t| &\to 0
\end{aligned}
$$

allora il secondo membro tende a 0, quindi

$$t_n x_n \to tx$$

cioè il prodotto per uno scalare è continuo rispetto alla topologia indotta dalla norma.

Definizione 2.7

Prendo $A \subseteq B$, allora definisco linA come l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di A .

Proposizione 2.1

$\overline{\text{linA}}$ è il più piccolo sottospazio lineare chiuso che contiene A .

Dimostrazione

$Y = \text{linA}$ è uno spazio lineare. Mostro che anche $\bar{Y}$ è un sottospazio lineare, se questo è vero la tesi è vera perché $\bar{Y}$ è il più piccolo chiuso che contiene il più piccolo spazio lineare che contiene A .

Mostro che, se $a, b \in \bar{Y}$ e s, t sono scalari, allora $sa + tb \in \bar{Y}$.

Considero prima il *caso particolare* in cui $a \in Y, b \in \bar{Y}$. Allora posso scrivere $sa + tb = sa + t \lim_n b_n$ e per la continuità di moltiplicazione per uno scalare:

$$sa + tb = \lim_n sa + tb_n$$

che è una combinazione lineare di elementi di Y , e il liite sta in $\bar{Y}$ per linearità.

Nel *caso generale*, togliendo la restrizione, siano $a, b \in \bar{Y}$, allora

$$a = \lim_n a_n,\ a_n \in Y$$

allora $sa+tb = \lim_n sa_n+tb$, e questa è una combinazione lineare di un elemento in Y e uno nella chiusura, quindi per il punto precedente il limite appartiene a $\bar{\bar{Y}} = \bar{Y}$.

Dai due corollari si ricava che $\overline{\mathrm{linX}} = (X^\perp)^\perp$.

2.2.6 Caratterizzazione della densità di un sottospazio

Un insieme A è denso in X se e solo se $\bar{A} = X$.

Corollario 2.3

Sia $Y = \mathrm{linA}$, allora Y è denso se e solo se $Y^\perp = 0$.

Dimostrazione

Supponiamo che Y sia denso, cioè $\bar{Y} = X$, allora $Y^\perp = (\bar{Y})^\perp = X^\perp = 0$, cioè $Y^\perp = 0$.

Viceversa, se supponiamo che $Y^\perp = 0$, allora Y è denso. Infatti, siccome il più piccolo sottospazio lineare chiuso che contiene LinA è $\overline{\mathrm{LinA}}$, per l'ultimo corollario si ha:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{linA}} &= ((\mathrm{linA})^\perp)^\perp \\ &= (Y^\perp)^\perp = 0^\perp = X\end{aligned}$$

cioè $\bar{Y} = X$ e Y è denso in X .

Capitolo 3

Spazio duale

3.1 Ricerca del duale

3.1.1 Duale algebrico e topologico

Se X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, X^* è l'insieme delle $f : X \to \mathbb{R}$ lineari ed è chiamato *duale algebrico*. Se X ha una topologia τ , si chiama *duale topologico* X' l'insieme di tutte le forme lineari e continue, quindi a priori $X' \subset X^*$.

Esempio 3.1

Il duale di $\mathbb{R}^n$ è $\mathbb{R}^n$ stesso. Prendo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base canonica, e $f \in (R^n)^*$. Considero i valori $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$, e $x \in \mathbb{R}^n$, allora:

$$x = \sum_i x_i e_i$$

allora per linearità

$$f(x) = \sum_i x_i f(e_i) = x \cdot (f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)) = x \cdot \psi$$

Quindi preso un funzionale lineare f , ad esso posso associare il vettore ψ che compare nel prodotto scalare $x \cdot \psi$, e vale viceversa, per questo $(\mathbb{R}^n)^*$ può essere identificato con $\mathbb{R}^n$.

3.1.2 Risultati sui funzionali

Considero X di Hilbert e $L : X \to \mathbb{C}$ lineare, allora $L(0) = 0$.

Proposizione 3.1

Sono equivalenti le seguenti condizioni

1. L è continua
2. L è continua in qualche punto

3. L è continua in 0
4. esiste una costante c positiva tale che $|L(x)| \leq c * \|x\|$ per ogni $x \in X$.

Dimostrazione

$3 \longrightarrow 4$: L è continua in 0, inoltre $L(0) = 0$: per definizione di continuità, dato l'intorno $(-1, 1)$, allora esiste $\delta > 0$ tale che se $\|x\| < \delta$, allora $|L(x)| \leq 1$.
Considero $x \neq 0$ qualunque, allora il vettore $x' = \frac{x}{\|x\|}$ ha norma 1, quindi si ha

$$\|(\delta/2)x'\| = \delta/2 \leq \delta$$

e per definizione deve valere $L(\frac{\delta}{2}x') \leq 1$ quindi

$$L(\frac{\delta}{2}x') = \delta/2\frac{L(x)}{\|x\|} \leq 1$$

cioè

$$|L(x)| \leq 2/\delta * \|x\|$$

quindi $c = 2/\delta$ è la costante cercata.

$4 \longrightarrow 1$: per linearità

$$|L(x) - L(y)| = |L(x - y)| \leq c * \|x - y\|$$

e se $\|x - y\| \to 0$, $L(x) \to L(y)$, cioè L è continua.

$1 \longrightarrow 2$: ovviamente, se L è continua, allora è continua in qualche punto.
$2 \longrightarrow 3$: esercizio

3.1.3 Norma sul duale

Lemma 3.1

Posto $\|L\| = \sup |L(x)|$ per x che varia nella bolla unitaria chiusa con L lineare e continua, allora L è una norma.

Dimostrazione

1. Se $L = 0$, $\sup |L(x)| = 0$ e quindi la norma è nulla. Viceversa, se il sup è nullo, tutti gli $|L(x)|$ sono nulli e quindi L è nulla.
2. omogeneità: $\|tL\| = \sup |t * L(x)| = |t| * \sup |L(x)| = |t| * \|L\|$

3. disuguaglianza triangolare:
$$\begin{aligned}\|L + L'\| &= \sup |L(x) + L'(x)| \leq \sup(|L(x)| + |L'(x)|)\\ &\leq \sup |L(x)| + \sup |L'(x)| = \|L\| + \|L'\|\end{aligned}$$

Il duale topologico è uno spazio normato (di Banach).

Esercizio 3.1

Considero la norma introdotta sul duale, tale che, data l'applicazione lineare $t\colon X \to X'$

$$\|t\| = \sup_{x \in B_{0,1}} |t(x)|.$$

Dimostrare che le seguenti sono scritture equivalenti di questa norma:

1. $$\sup_{x\, t.c.\, \|x\|=1} |t(x)|$$
   (non considero i punti nella bolla unitaria ma solo quelli sulla frontiera)
2. $$\sup_{x \in X} \frac{|t(x)|}{\|x\|}$$

Dimostrazione

Mostro prima che le scritture 1 e 2 sono equivalenti tra loro. Osservo che $\|x\|$ è uno scalare, quindi $|\frac{|t(x)|}{\|x\|}| = |t(\frac{x}{\|x\|})|$ per l'omogeneità di t . Allora, partendo dalla scrittura 2

$$\sup_{x \in X} \frac{|t(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X} |t(\frac{x}{\|x\|})|$$

ma i vettori della forma $\frac{x}{\|x\|}$ hanno norma 1, quindi proseguendo con le uguaglianze:

$$= \sup_{x\, t.c.\, \|x\|=1} |t(x)|.$$

Si dimostra che la scrittura 1 è equivalente alla norma. Cioè t assume il suo sup sulla frontiera della bolla.

Dall'esercizio, e in particolare dal fatto che $\|t\| = \sup_{x \in X} \frac{|t(x)|}{\|x\|}$

segue che, per ogni x , vale sempre

$$|t(x)| \leq \|t\| * \|x\|.$$

allora

$$\|t\| = \inf\{c \geq 0\, t.c.\, \forall x \in X, \{|t(x)| \leq c\}\}$$

3.1.4 Teorema di Riesz

Questo teorema fornisce una caratterizzazione del duale.

Teorema 3.1

Se X è uno spazio di Hilbert,

1. fissato $x_0 \in X$, la funzione t_{x_0} tale che $t_{x_0}(x) = x \cdot x_0$ è un funzionale lineare e continuo, e
$$\|t_{x_0}\| = \|x_0\|$$

2. viceversa, se $f \in X^*$, esiste uno ed un unico vettore x_0 che rappresenta f , cioè tale che $f(x) = x \cdot x_0 \forall x \in X$, e $\|f\| = \|x_0\|$.

Dimostrazione

1. fisso $x_0 \neq 0$ e pongo $t_{x_0}(x) = x \cdot x_0$ come nell'enunciato, e osservo che, dati $x, y \in X$,
$$t_{x_0}(x+y) = (x+y) \cdot x_0 = x \cdot x_0 + y \cdot x_0 = t_{x_0}(x) + t_{y_0}(y)$$
e si dimostra facilmente anche l'omogeneità, allora t *è lineare*.Osservo poi che
$$|t_{x_0}(x)| = |x \cdot x_0| \leq \|x\| * \|x_0\|$$
per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, quindi, dividendo per $\|x_0\|$ che è non nulla:
$$\frac{|t_{x_0}(x)|}{\|x\|} \leq \|x_0\|$$
e siccome questo vale per ogni x , passando al sup si ha:
$$\sup_{x \neq 0} \frac{|t_{x_0}(x)|}{\|x\|} \leq \|x_0\|$$
e per l'esercizio precedente, il primo membro è uguale a $\|t_{x_0}\|$ .Allora, avendo norma finita ed essendo lineare, t_{x_0} *è continua*.
$$t_{x_0}(\frac{x_0}{\|x_0\|}) = t(x_0) * \frac{1}{\|x_0\|}$$
$$= \frac{x_0 \cdot x_0}{\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|^2}{\|x_0\|} = \|x_0\|.$$
allora esiste un punto x_0 che realizza l'uguaglianza nel punto x_0 , $\|t_{x_0}\| = \|x_0\|$, quindi posso scrivere $\|t_{x_0}\| = \max_x \|x\|$ e *l'uguaglianza è realizzata per* x_0 .

2. Viceversa, se f è l'operatore che vale sempre 0, non c'è niente da dimostrare, allora suppongo $f \neq 0$. Considero
$$\ker f = \{x \, t.c. \, f(x) = 0\}$$

Sappiamo che $\ker f$:#*è un sottospazio vettoriale#*è un chiuso (è la controimmagine di 0 mediante la funzione continua f)#*è diverso dall'intero X (infatti f non è nullo)Per queste tre condizioni, $\ker f$ non è denso ($\overline{\ker f} = \ker f \neq X$), allora il suo ortogonale non siriduce al solo 0, e deve esistere $x_1 \neq 0$, $x_1 \in (\ker f)^{\perp}$. $f(x_1) \neq 0$, e se pongo $x_2 = \frac{x_1}{f(x_1)}$, allora anche $x_2 \in (\ker f)^{\perp}$, e $f(x_2) = 1$ (normalizzazione del vettore x_1).Per ogni $x \in X$, considerando il vettore $x - f(x) * x_2$, si ha

$$f(x - f(x) * x_2) = f(x) - f(x) * f(x_2) = f(x) - f(x) * 1 = 0$$

allora $x - f(x) * x_2$ appartiene a $\ker f$, e siccome $x_2 \in (\ker f)^{\perp}$, il prodotto tra i due vettori dev'essere nullo:

$$(x - f(x) * x_2) \cdot x_2 = 0$$

$$\longrightarrow x \cdot x_2 = f(x) x_2 \cdot x_2 = f(x) \|x_2\|^2$$

e dividendo per $\|x_2\|^2$:

$$x \cdot \frac{x_2}{\|x_2\|^2} = f(x), \forall x$$

allora $x_0 = \frac{x_2}{\|x_2\|^2}$ rappresenta f , e $\|f\| = \|x_0\|$, cioè *esiste* x_0 *con la proprietà cercata*.Supponiamo che x_0 non sia unico, e quindi che esista x_0' tale che $x \cdot x_0 = x \cdot x_0' = f$, allora $x \cdot (x_0 - x_0') = 0, \forall x \in X$, e quindi, per $x = x_0 - x_0'$,

$$(x_0 - x_0') \cdot (x_0 - x_0') = \|x_0 - x_0'\|^2 = 0$$

e quindi $x_0 = x_0'$, cioè x_0 *è unico.*

Riassumendo, esiste un funzionale : $X^* \to X$ che è isometria lineare iniettiva e suriettiva. infatti, a f nel duale, si può associare l'unico x_0 che lo rappresenta, e tale che $\|f\| = \|x_0\|$.

3.2 Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

3.2.1 Vettori ortogonali e ortonormali

Definizione 3.1

Un sottoinsieme di vettori $X_i = \{x_1, \ldots, x_n\}$ si dice *ortogonale* se $x_i \perp x_j$ quando $i \neq j$. X_i si dice *ortonormale* se è ortogonale e se ogni elemento della famiglia ha norma 1.

Osservazione 3.1

Se il sottoinsieme X_i è ortonormale, allora X_i è linearmente indipendente.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che X_i ortogonale non sia indipendente, allora esiste una combinazione lineare di vettori non nulli tale che

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

allora, il prodotto scalare di questo vettore che appartiene a X_i con x_1 dev'essere 0 perché il primo vettore è nullo:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n) \cdot x_1 = 0$$

e siccome tutti i prodotti della forma $x_i \cdot x_j$ sono nulli per $i \neq j$, rimane

$$= \alpha_1 x_1 \cdot x_1 = \alpha_1 \|x_1\|^2 = 0$$

quindi siccome $x_1 \neq 0$, $\alpha_1 = 0$. Allo stesso modo sono nulli tutti gli altri coefficienti α_i , cioè X_i è indipendente.

Un esercizio mostra che, se M è il sottospazio lineare generato dai vettori $e_1, \dots, e_n \subset X$ ortonormali tra loro, allora M è chiuso. (in particolare ogni spazio vettoriale di dimensione finita è chiuso). Quindi è possibile definire la proiezione su M .

Proposizione 3.2

Dato M sottospazio lineare ortonormale generato da $e_1, \dots, e_n$, per ogni $x \in X$ vale l'uguaglianza

$$P_M(x) = \sum_i x \cdot e_i * e_i.$$

Dimostrazione

Chiamo $z = \sum_{i=1}^n x \cdot e_i * e_i$. Questo vettore appartiene ad M essendo una combinazione lineare, allora

$$z \cdot e_j = \sum_{i=1}^n x \cdot e_i * e_i e_j$$

e $e_i \cdot e_j = 0$ tranne quando $i = j$ in cui vale 1, quindi

$$z \cdot e_j = x \cdot e_j, \forall j = 1, \dots, n.$$
$$\longrightarrow (x - z) \cdot e_j = 0, \forall j$$

allora il prodotto scalare tra $x - z$ e qualunque combinazione lineare $\sum_i \alpha_i e_i$ è nullo. Allora $(x - z) \cdot m = 0, \forall m \in M$.

Concludo che $z = \sum_{i=1}^n x \cdot e_i * e_i$ è la proiezione di x su M .

3.2.2 Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Data una successione di vettori linearmente indipendente ma non ortonormale, con questo procedimento posso sostituire alla successione di partenza una successione ortonormale, tale che i primi n vettori della vecchia e della nuova successione generano lo stesso sottospazio.

Teorema 3.2

[ortogonalizzazione di Gram-Schmidt] Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di vettori in X linearmente indipendenti. Allora esiste una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di vettori di X ortonormale e tale che per ogni n , lo spazio ortonormale generato da $x_1,\dots,x_n$ è uguale a quello generato da $y_1,\dots,y_n$, cioè tale che valgano le proprietà:

$$y_n = a_{1n}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n,\ a_{nn} \neq 0, \text{ formula 1}$$
$$x_n = b_{n1}y_1 + \cdots + b_{nn}y_n,\ b_{nn} \neq 0, \text{ formula 2}$$

e gli y_n sono determinati a meno del segno.

Dimostrazione

La dimostrazione è per induzione.

PASSO BASE: Per $n = 1$, $x_1 \neq 0$, allora cerco y_1 tale che $y_1 = \alpha x_1$ e $\|y_1\| = 1$, allora $\alpha = \frac{1}{\|x_1\|}$, e pongo

$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

PASSO INDUTTIVO: Supponiamo di aver costruito $y_1,\dots,y_{n-1}$ con le prprietà richieste, e mostriamo che sappiamo costruire y_n .

Considero x_n e lo proietto sul sottospazio generato da $y_1,\dots,y_n$.

Siccome per l'ipotesi induttiva gli y_i sono ortonormali, la proiezione su $\mathrm{Lin(y_1,\dots,y_{n-1})}$ vale

$$P(x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_n \cdot y_i * y_i$$

allora dev'essere

$$(x_n - P(x_n)) \cdot y_i = 0$$

per $i = 1,\dots,n-1$, e pongo $x_n - P(x_n) = z_n$ con z_n ortogonale a $y_1,\dots,y_{n-1}$.

Mostro che z_n non può essere il vettore nullo, altrimenti si andrebbe contro l'ipotesi di lineare indipendenza. Infatti, se fosse nullo si avrebbe $x_n = p(x_n)$, allora x_n apparterrebbe a $\mathrm{Lin(y_1,\dots,y_{n-1})}$ che per il passo induttivo e per le formule 1 e 2 è uguale a $\mathrm{Lin(x_1,\dots,x_{n-1})}$; si avrebbe quindi, contro l'ipotesi, che $x_1,\dots,x_n$ sono linearmente dipendenti.

Avendo dimostrato che $z_n \neq 0$, posso porre $y_n = \frac{z_n}{\|z_n\|}$, infatti $\|y_n\| = 1$, e *mostro che il nuovo insieme è ancora ortogonale*, ma questo è già stato dimostrato (con z_n al posto di y_n).

Mostriamo le formule 1 e 2. Si ha

$$x_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_n \cdot y_i y_i = z_n = y_n * \|z_n\|,$$

allora

$$y_n = \frac{1}{\|z_n\|} * [x_n - \sum_{i=1}^{n-1} x_n \cdot y_i y_i]$$

e per l'ipotesi induttiva, $\sum_{i=1}^{n-1} x_n \cdot y_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$ per certi α_i , quindi

$$y_n = \frac{1}{\|z_n\|} * [x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i]$$

e l'asserto vale perché y_n è stato espresso come combinazione lineare degli altri vettori.

Capitolo 4

Disuguaglianza di Bessel

4.1 Disuguaglianza di Bessel

4.1.1 Spazio completo

Definizione 4.1

Supponiamo di avere uno spazio di Hilbert e un sottospazio ortonormale E_I . Il sottospazio E_I si dice *completo* se l'inviluppo lineare è denso in X .

Proposizione 4.1 (Criterio di densità)

Sia $A \subset X$. Se per ogni $x \in X$ e per ogni ε positivo si ha che $B_{x,\varepsilon} \cap A \neq \emptyset$, allora A è denso in X .

Dimostrazione

Se $B_{x,\varepsilon} \cap A \neq \emptyset$ per ogni $x \in X$, significa che ogni $x \in X$ appartiene ad A oppure è di accomulazione per A . Quindi ogni x sta in $\bar{A}$, cioè $\bar{A} = X$ e quindi A è denso in X .

Esempio 4.1 (spazio completo)

Considero

$$l^2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\, t.c. \sum_n x_n^2 < \infty\}$$

La successione degli e_n (vettori con tutte le componenti nulle tranne la n-esima) è ortonormale. Mostro che $(e_1, \dots, e_n, \dots)$ è completo, cioè che l'inviluppo lineare è denso.

Mostro che vale il criterio di densità enunciato prima, cioè mostro che dato un qualunque $x \in l^2$ e ε positivo, allora in ogni bolla $B_{x,\varepsilon}$ esiste un elemento che è combinazione lineare finita di $e_1, \dots, e_n$. Prendo $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\sum_n x_n^2 < \infty$. Allora esiste n_0 tale che $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n^2 < \varepsilon/2$. Se chiamo x' la successione che ha coordinate $(x_1, x_2, x_{n_0-1}, 0, 0, \dots)$ questo è un vettore di l^2 , è combinazione lineare finita degli e_i e

$$\|x - x'\| \leq \varepsilon/2 \leq \varepsilon$$

quindi $x' \in B_{x,\varepsilon}$.

4.1.2 Dimostrazione della disuguaglianza di Bessel

Teorema 4.1

Sia $E = (e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ un sottoinsieme ortonormale numerabile. Allora per ogni $x \in X$, vale la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_n |x \cdot e_n|^2 \leq \|x\|^2.$$

Dimostrazione

Sia A_n il sottoinsieme lineare generato dai primi n vettori, $e_1, \dots, e_n$, fisso x e chiamo x_n la proiezione $P_{A_n}(x)$. Allora, siccome $x_n \in A_n$, per definizione di proiezione $x - x_n \perp x_n$ perché è perpendicolare a ogni vettore di A_n .

Per Pitagora

$$\|x\|^2 = \|x - x_n + x_n\|^2 = \|x - x_n\|^2 + \|x_n\|^2$$

e sfruttando la formula per la proiezione, $P_{A_n}(x) = \sum_{i=1}^n |x \cdot e_i| * e_i$, si ha

$$= \|x - x_n\|^2 + \|\sum_{j=1}^n |x \cdot e_j| * e_j\|^2$$

$$= \|x - x_n\|^2 + \|\sum_{j=1}^n |x \cdot e_j|\|^2 * \|e_j\|^2$$

$$= \|x - x_n\|^2 + \sum_{j=1}^n |x \cdot e_j|^2$$

e siccome $\|x - x_n\|^2 > 0$, eguagliando al primo membro si ha:

$$\|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^n |x \cdot e_j|^2$$

ma questo vale per ogni n . Allora passando al sup

$$\sum_{j=1}^\infty |x \cdot e_j|^2 \leq \|x\|^2$$

4.1.3 Condizioni equivalenti all'identità di Parseval

Per dimostrare il prossimo teorema serve il criterio seguente: *Criterio sull'unione*: Se $A = \bigcup A_n$ con $A_n \uparrow A$, allora $d(x, A) = \lim_n d(x, A_n)$.

Dimostrazione

$A_n \subset A$ allora $d(x, A) \leq \inf_n d(x, A_n)$. Viceversa, esiste una successione (a_k) di elementi di A che realizza l'inf, con $a_k \in A_k$, allora $d(x, A_k) \leq d(x, a_k)$. Allora $\inf_k d(x, A_k) \leq \inf_k d(x, a_k) = d(x, A)$, cioè valgono le due disuguaglianze.

Teorema 4.2

Sia X di Hilbert, e $E = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme ortonormale. Sono equivalenti:

1. se x è ortogonale ad E , allora $x = 0$
2. E è completo
3. per ogni $x \in X$, $\|x\|^2 = \sum |x \cdot e_i|^2$ (identità di Parseval)

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: $x \perp E$ implica $x \perp \mathrm{LinE}$. Stiamo supponendo che $(\mathrm{LinE})^\perp = 0$, e questo implica che LinE è denso in X , cioè X è completo.

$3 \longrightarrow 1$: supponiamo che valga l'identità di Parseval, e considero un vettore ortogonale ad E , allora dev'essere $\|x\| = 0$ perché la serie a secondo membro dell'identità di Parseval è nulla.

$2 \longrightarrow 3$: supponendo che E sia completo dimostro l'identità di Parseval. Fisso x , e pongo $A_n = \mathrm{Lin(e_1, \ldots, e_n)}$, in modo che

$\mathrm{LinE} = \bigcup_\mathrm{n} \mathrm{A_n}$. Quindi applicando il criterio sull'unione

$$d(x, \mathrm{LinE}) = \lim_\mathrm{n} \mathrm{d(x, A_n)}$$

Ma siccome E è completo, il primo membro è nullo (infatti $x \in \bar{(}\mathrm{LinE}) = \mathrm{X}$ e la distanza di un punto da un insieme è nulla se il punto si trova nella chiusura di questo insieme).

Il secondo si riscrive come

$$\lim_n \inf \|x - x_n\| = 0, \text{ formula 1}$$

Per Pitagora

$$\|x - x_n\|^2 = \|x\|^2 - \|x_n\|^2$$

e per la formula 1, il primo membro è nullo, quindi rimane

$$\|x\|^2 = \|x_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x \cdot e_n|^2$$

e ottengo l'uguaglianza.

Commento: La completezza è stata usata per dire che $d(x, \mathrm{LinE}) = 0$.

4.1.4 Spazio topologico separabile

Definizione 4.2

Se Y è uno spazio topologico, Y si dice *separabile* se ha un sottoinsieme denso numerabile.

Esempio 4.2

Ad esempio $Y = \mathbb{R}$ è separabile e prendo come sottoinsieme numerabile $\mathbb{Q}$. I non numerabile con la metrica discreta non è separabile, perché ogni insieme è chiuso con la topologia discreta, quindi preso $J \subset I$ numerabile, si ha sempre $\bar{J} = J \neq I$.

Esercizio 4.1

l^2 è separabile. (tutte le combinazioni lineari finite di elementi razionali è un sottoinsieme numerabile denso)

Teorema 4.3

X ammette un sottoinsieme ortonormale completo e numerabile se e solo se è separabile come spazio topologico.

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: se esiste $E \subset X$ sottoinsieme ortonormale completo e numerabile, allora X è separabile per definizione.

$2 \longrightarrow 1$: suppongo che X sia separabile, allora esiste un sottoinsieme numerabile denso $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, devo trovare però un sottoinsieme denso numerabile e ortonormale. Considero E un sistema ortonormale completo (esistenza da dimostrare), e mostro che è numerabile. A priori se $i \neq j$,

$$d(e_i, e_j)^2 = |e_i - e_j \cdot e_i - e_j| = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = 2$$

quindi dati due vettori di un insieme ortonormale, la loro distanza è sempre $\sqrt{2}$. Considero la famiglia delle bolle centrate negli e_i e di raggio $\sqrt{2}/2$. Le bolle sono disgiunte. Per ogni i , esiste n tale che $x_n \in B(e_i, \sqrt{2}/2)$ per il criterio sulla densità. Abbiamo costruito una funzione $f\colon I \to \mathbb{N}$ iniettiva, infatti se $i \neq i'$, $f(i) \neq f(i')$ (questa funzione associa una bolla centrata in un punto con indice nell'insieme I a un punto dell'insieme numerabile X_n). Allora per l'iniettività della funzione $|I| \leq |\mathbb{N}|$.

Teorema 4.4 (teorema di Cantor-Bernstein)

Dati due insiemi A, B , se esiste $f : A \to B$ iniettiva e $g : B \to A$ iniettiva, allora esiste $h : A \to B$ biettiva.

$|A| \leq |B|$ se e solo se esiste $f : A \to B$ iniettiva.

4.1.5 Quarta condizione equivalente all'identità di Parseval

Teorema 4.5

Sia X uno spazio di Hilbert e $E \subset X$. E numerabile è completo e ortonormale se e solo se per ogni $x \in X$ si ha che

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} |x \cdot e_k| * e_k$$

(ogni vettore è somma della sua serie di Fourier).

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: Supponiamo che E sia completo e ortonormale. *Mostro prima che la serie di Fourier converge.* Considero la successione delle somme parziali

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} |x \cdot e_k| * e_k$$

Mostro che la successione è di Cauchy: per la completezza di E , vale l'identità di Parseval, quindi esiste n_0 tale che

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x \cdot e_k|^2 \leq \varepsilon.$$

(la coda della serie è trascurabile perché la serie converge)

Siano $m, n > n_0$, suppongo $n > m$ senza perdita di generalità, allora

$$\begin{aligned} |s_n - s_m|^2 &= \| \sum_{k=1}^{n} |x \cdot e_k| * e_k - \sum_{k=1}^{m} |x \cdot e_k| * e_k \|^2 \\ &= \| \sum_{k=n}^{m} |x \cdot e_k| * e_k \|^2 \end{aligned}$$

e siccome i vettori sono a due a due ortogonali, il quadrato della norma è:

$$= \sum_{k=n}^{m} |x \cdot e_k|^2 \leq \varepsilon^2$$

per l'identità di Parseval, quindi la successione è di Cauchy. Siccome lo spazio è completo la successione converge ad un certo y , cioè posso scrivere $y = \lim_{n\to\infty} s_n$ con s_n successione delle somme parziali.

Fisso un vettore e_k nell'insieme ortonormale e calcolo

$$(x-y) \cdot e_k = x \cdot e_k - y \cdot e_k = x \cdot e_k - (\lim_{n\to\infty} s_n) \cdot e_k$$

per continuità del prodotto scalare

$$= x \cdot e_k - \lim_n (s_n \cdot e_k) = x \cdot e_k - \lim_n [(\sum_{j=1}^{n} |x \cdot e_j| * e_j) \cdot e_k],$$

e siccome rimane solo il termine con $j = k$ si ha:

$$= x \cdot e_k - \lim_n |x \cdot e_k| = x \cdot e_k - x \cdot e_k = 0$$

quindi $(x-y) \perp e_k \forall k$. Ma $E^{\perp} = \{0\}$ perché E è completo, quindi $x - y = 0$, cioè $x = y$, e x è proprio il limite della successione delle somme parziali, e quindi la somma della serie.

$2 \longrightarrow 1$: supponiamo che ogni x sia somma della sua serie di Fourier, cioè che $x = \lim_{n\to\infty} s_n$ con s_n somme parziali della serie. Per mostrare che il sistema E è completo mostro che vale Parseval,

che è una condizione equivalente alla completezza.

$$\|x\|^2 = x \cdot x = x \cdot \lim_n s_n = \lim_n (x \cdot s_n)$$

ma

$$x \cdot s_n = x \cdot (\sum_{k=1}^{n} x \cdot e_k * e_k) = \sum_{k=1}^{n} (x \cdot e_k)^2.$$

e per $n \to \infty$,

$$\|x\|^2 = \lim_{n\to\infty} x \cdot s_n = \sum_{k=1}^{\infty} (x \cdot e_k)^2.$$

Questa condizione è equivalente alla completezza di E e vale se il sistema è numerabile (quindi in spazi separabili). Infatti in spazi non numerabili la convergenza della serie è legata all'ordine in cui vengono presentati i termini,

mentre nel caso numerabile ciò non avviene.

Osservazione 4.1

Sia $E \subset X$ un sottoinsieme ortonormale (non ci sono ipotesi sulla completezza e sulla cardinalità di E). Fisso un vettore x , allora se considero i prodotti scalari $\{x \cdot e,\, e \in E\}$, essi sono quasi tutti nulli (tranne al più una famiglia numerabile).

Dimostrazione

Questo è vero perché vale la disuguaglianza di Bessel, chiamo $E_n = \{e\, t.c.\, x \cdot e > 1/n\}$. Allora E_n deve essere finito. Supponiamo per assurdo che non sia finito, allora esistono $e_1, e_2, \dots \in E_n$,

e su questo sottoinsieme ortonormale numerabile vale Bessel, allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x \cdot e_k|^2 \leq \|x\|^2$$

e quindi la serie converge. D'altra parte i moduli $|x \cdot e_n|$ devono essere maggiori di $1/n$ per l'ipotesi assurda, e quindi si ha una contraddizione perché la serie al membro di sinistra non converge. Quindi ogni E_n è finito.

Inoltre

$$\{e \in E\, t.c.\, x \cdot e \neq 0\} == \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

e siccome ogni insieme del membro di destra è finito, l'insieme di sinistra è al più numerabile.

Esercizio 4.2 (spazio di Hilbert non separabile)

Sia I non numerabile, e chiamo

$$l^2(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R}\, t.c.\, f(i) \neq 0 \,\text{solo su un sottoinsieme numerabile di } X, \wedge \sum_i |f(i)|^2 < \infty.\}$$

Se $I = \mathbb{N}$, ho il solito sottoinsieme l^2 delle successioni convergenti a valori in $\mathbb{R}$).

Dimostrazione

Il prodotto scalare definito su questo spazio è

$$f \cdot g = \sum_{i \in I} f(i) g(i)$$

che induce la norma

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_i |f(i)|^2}$$

Per mostrare che l'insieme non è separabile, considero le funzioni della forma $f_i(j) = \delta_{ij}$ per ogni $i \in I$. Osservo che se $i \neq j$,

$$d(f_k, f_j)^2 = \sum_i |f_k - f_j|^2 = 2$$

infatti ci sono solo due coordinate non nulle e uguali a 1.

$$d(f_i, f_j) = \sqrt{2}$$

allora prendendo le bolle di centro i e raggio $\sqrt{2}/4$, queste sono disgiunte. Sappiamo che uno spazio separabile ammette un sottoinsieme V completo, ortonormale e numerabile. Per la densità di V , ogni bolla disgiunta ne contiene almeno un elemento: gli elementi di V sono al più numerabili se lo spazio è separabile. Quindi se I è non numerabile le bolle sono più che numerabili e di conseguenza lo stesso vale per gli elementi di V , quindi $l^2(I)$ non è separabile.

4.2 Base di Hilbert

4.2.1 Insiemi parzialmente ordinati

Definizione 4.3

Y è un *insieme parzialmente ordinato*. se esiste una relazione binaria $\leq$ che sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva (ne è un esempio l'insieme delle parti con l'inclusione). Un insieme si dice *totalmente ordinato* se è parzialmente ordinato e se due elementi qualsiasi nell'insieme sono confrontabili tra loro, cioè $a \leq b$ o $b \leq a$ per ogni $a, b \in Y$.

Esempio 4.3

Considero $\mathbb{N}$ e introduco la relazione d'ordine $a \leq b \iff a \mid b$. Questo è un insieme parzialmente ordinato (infatti non è vero che tutti gli elementi sono confrontabili tra loro, ad esempio $5 \nmid 3, 3 \nmid 5$). Dato un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, rispetto a questa relazione l'M.C.D. è l'inf di tale insieme e l' *m.c.m.* è il sup.

Definizione 4.4

Sia Y parzialmente ordinato, e sia $S \subset Y$. $x \in S$ è *massimale* per S se non esiste nessun elemento di S maggiore di x , quindi se la condizione $x \leq s$ implica $x = s$.

Ci sono alcuni sottoinsiemi che hanno elemento massimale ma non hanno massimo: ad esempio posso considerare un diagramma con cinque punti, tre allineati su una riga e due allineati sulla riga sopra. Può anche avvenire che un insieme non abbia elementi massimali, ad esempio $\mathbb{R}$ con la relazione d'ordine tra i numeri non ha elementi massimali.

4.2.2 Lemma di Zorn

Lemma 4.1 (lemma di Zorn)

Se ogni sottocatena di Y ha maggiorante, allora Y ha elementi massimali.

catena = sottoinsieme totalmente ordinato in un insieme parzialmente ordinato

Il lemma di Zorn afferma che dati infiniti insiemi C_i non vuoti, posso costruire un insieme prendendo un elemento in ogni C_i .

4.2.3 Basi di Hilbert

Definizione 4.5

Si chiama *base* di uno spazio di Hilbert un sottoinsieme ortonormale massimale (dire che la famiglia è massimale significa che, se ci aggiungo un vettore, esso dev'essere necessariamente 0).

Teorema 4.6

Ogni spazio di Hilbert, non ridotto al solo 0, ammette una base.

Dimostrazione

Se X è diverso dal sottospazio nullo, esisterà $x \in X$, con $x \neq 0$, allora l'insieme costituito dal solo elemento $e = \frac{x}{\|x\|}$ è ortonormale, e quindi l'insieme dei sottoinsiemi ortonormali di X non è vuoto. Se E_i è una famiglia totalmente ordinata per inclusione di sottoinsiemi ortonormali, allora esiste E maggiorante della catena. Prendo $E = \bigcup_i E_i$. Il prodotto tra due vettori x, y in E è nullo, perchè ad esempio si avrà $x \in E_{i_1}, y \in E_{i_2}$ e siccome i due insiemi sono confrontabili, se ad esempio $E_{i_1} \subset E_{i_2}$, si ha che $x, y \in E_{i_2}$ e quindi sono ortonormali. (il fatto che gli elementi siano confrontabili è vero solo perché ho una catena). Allora E è la base cercata.

4.2.4 Cinque condizioni equivalenti

Teorema 4.7

Sia X di Hilbert e considero un sottoinsieme ortonormale numerabile. Sono equivalenti cinque condizioni:

1. E è una base
2. $E^{\perp} = \{0\}$
3. E è completo
4. ogni x è somma della sua serie di Fourier
5. vale l'identità di Parseval

Dimostrazione

Abbiamo già mostrato che le condizioni dalla 2 alla 5 sono equivalenti. Mostro che la condizione 1 è equivalente a una qualsiasi delle altre.

Supponiamo che E sia una base; se esiste $x \neq 0$ tale che $x \perp E$, posso considerare il vettore di norma 1 $x' = \frac{x}{\|x\|}$. Detto $E' = E \cup x'$, questo è un sottoinsieme ortonormale che contiene E , e questo va contro l'ipotesi che E sia una base. Quindi $x \perp E \longrightarrow x = 0$, e vale la condizione 2.

Il viceversa vale perché se $E^{\perp} = 0$, allora LinE = X .

4.2.5 Relazione tra basi di Hilbert e basi algebriche

Uno spazio X di Hilbert è anche uno spazio vettoriale, e quindi ha anche una base algebrica (base di Hamel). Queste due basi coincidono se e solo se lo spazio è di dimensione finita. A priori, detta $\mathcal{B}$ una base di Hilbert e $\mathcal{C}$ una base algebrica, per le loro cardinalità si ha $|\mathcal{B}| \leq |\mathcal{C}|$ (infatti una base di Hilbert è anche una base algebrica). Nel caso infinito vale la relazione $|\mathcal{B}| = 2^{|\mathcal{C}|}$.

Per dimostrare l'uguaglianza delle cardinalità delle due basi nel caso finito è necessaria la seguente proposizione

Proposizione 4.2

Sia X di Hilbert e $Y \subset X$ di dimensione finita, allora Y è chiuso.

Dimostrazione

Sugli spazi di dimensione finita, tutte le norme sono equivalenti. Allora su Y posso prendere come norma la restrizione ad Y della norma di X . Questa dev'essere equivalente alla norma 1.

Siccome Y ha dimensione finita, avrà una base $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Ogni elemento si scrive come

$$x = \sum_i \alpha_i v_i$$

allora

$$\|y\|_1 = \sum_i |\alpha_i|$$

Esistono due costanti tali che per ogni y ,

$$\|y\|_1 \leq c * \|y\|, \quad \|y\| \leq d * \|y\|_1$$

ma con $\|\cdot\|_1$ Y è completo. Se ho una successione di Cauchy per la norma iniziale, essa lo sarà anche per la norma 1. Ma con la norma 1 Y è completo, allora la successione converge ad un certo y per la norma 1. Allora si avrà la convergenza anche per la norma indotta, e quindi Y è completo con la norma indotta, ma se è completo è chiuso (dimostrazione $*$).

$X \cong \mathbb{R}^n$ per questo valgono i discorsi validi per gli spazi reali.

Dimostrazione (dimostrazione $\ast$)

Preso $z \in Y'$, allora esiste una successione di elementi di Y che converge a z , e questa successione è di Cauchy. Ma per la completezza di Y , la successione converge in Y cioè $z \in Y$, quindi Y contiene i suoi punti di accumulazione ed è chiuso.

Tutti i sottoinsiemi completi di uno spazio metrico sono chiusi.

Dimostro la relazione tra le cardinalità delle due basi nel caso finito:

Dimostrazione

Supponiamo che dimX sia finita, e sia $\mathcal{T}$ una base di Hilbert. Per la massimalità di $\mathcal{T}$ si ha $\mathcal{T}^{\perp} = 0$, allora Lin$\mathcal{T}$ è denso in X , e ha dimensione finita, quindi è chiuso. Allora Lin$\mathcal{T}$ = X , cioè $\mathcal{T}$ è un sottoinsieme formato da vettori linearmente indipendenti che genera X , cioè $|\mathcal{T}| = |\mathcal{C}|$.

4.2.6 Dimensione di uno spazio di Hilbert

Proposizione 4.3

Sia X di Hilbert e siano F, G due sottoinsiemi ortonormali completi (due basi). Allora $|F| = |G|$.

Dimostrazione

CASO 1: supponiamo che $|F|$ sia finita, e che $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$, allora

$$X = \overline{\mathrm{Lin}\{\mathrm{f_1}, \ldots, \mathrm{f_n}\}} = \mathrm{Lin}\{\mathrm{f_1}, \ldots, \mathrm{f_n}\}$$

dove l'ultimo passaggio vale perché un sottospazio vettoriale di dimensione finita è sempre chiuso. Segue quindi che F è anche una base algebrica, e $\dim X = |F|$. Inoltre come spazio vettoriale $\mathrm{LinG} \subset \mathrm{X}$, allora $\dim \mathrm{LinG} = |\mathrm{G}| \leq \dim \mathrm{X} = |\mathrm{F}|$, allora $|G|$ è finita. Posso ripetere il procedimento partendo da G , e ottengo $|F| \leq |G|$, e dalle due disuguaglianze segue $|F| = |G|$.

CASO 2: siano $|F|, |G|$ infinite. Fissiamo $f \in F$, allora l'insieme

$$G_f = \{g \in G\, t.c.\, f \cdot g \neq 0\}$$

è numerabile (dimostrato precedentemente). Affermo che $G = \bigcup_{f \in F} G_f$, vale la doppia inclusione infatti:

1. $\bigcup_{f \in F} G_f \subset G$ perché i G_f sono fatti da elementi di G .
2. Se $g \in G$, allora deve esistere $f \in F$ tale che $g \cdot f \neq 0$, altrimenti si avrebbe $g \cdot f = 0 \forall f$, e quindi $g = 0$, ma questo non può avvenire perché

g deve avere norma 1 essendo un vettore di una base ortonormale. Quindi $G \subset \bigcup_{f \in F} G_f$.

Detta ε la cardinalità di un insieme numerabile si ha

$$|G| \leq \varepsilon * |F|$$

allora se $|G|$ è infinito anche $|F|$ è infinito, e rovesciando il ragionamento si ottiene $|F| \leq |G| * \varepsilon$, da cui l'uguaglianza.

Definizione 4.6

Si chiama *dimensione di uno spazio di Hilbert* la cardinalità di ogni base.

Gli spazi di Hilbert di dimensione numerabile sono tutti e soli gli spazi separabili in senso topologico.

Esercizio 4.3

Dimostrare che $\dim l^2(I) = |I|$.

Dimostrazione

Posso considerare come base di questo spazio l'insieme delle funzioni $f_i(j) = \delta_{ij}$ per ogni $i \in I$. Questi elementi hanno norma 1, infatti:

$$\|f_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j \in I} |f_i(j)|^2} = \sqrt{\sum_{j \in I} \delta_{ij}} = 1$$

Inoltre le f_i sono ortogonali tra loro, infatti:

$$i \neq k \longrightarrow f_i \cdot f_k = \sum_{j \in I} f_i(j) g_k(j) = \sum_{j \in I} \delta_{ij} \delta_{kj} = 0$$

Questo insieme di funzioni inoltre è massimale, perché se ci aggiungessi un altro elemento, che sia ortogonale a tutti gli altri, esso sarebbe necessariamente la funzione nulla. Quindi le funzioni $(f_i)_{i \in I}$ costituiscono una base di Hilbert e $\mathrm{diml}^2 = |\mathrm{I}|$.

Se la dimensione di X come spazio di Hilbert è la cardinalità numerabile ε , allora la dimensione algebrica di X è 2^{ε} . Ad esempio, nel caso di l^2 inteso come spazio delle successioni convergenti a valori reali (cioè $l^2(I)$ con $I = \mathbb{N}$), si ha che la sua dimensione come spazio di Hilbert è $|I| = |\mathbb{N}| = \varepsilon$ ma la dimensione algebrica di l^2

è la dimensione del continuo. Questo si spiega per il fatto che, a differenza degli spazi vettoriali finiti, non è detto che l'inviluppo lineare generato dai vettori della base sia chiuso, e prendendone la chiusura si aggiungono ad esso molti elementi.

Osservazione 4.2 (osservazione intuitiva)

Dato uno spazio di dimensione finita, ci sono n vettori $e_1, \ldots, e_n$ tali che

$$x = \sum_i x_i e_i$$

per ogni $x \in X$.

Per estendere il procedimento a un numero infinito di vettori, si scrive

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i, \text{ serie}$$

dove $x_i = x \cdot e_i$.

Al finito

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

ed estendendo al caso infinito si ottiene l'identità di Parseval.

4.3 Successioni generalizzate

E' necessario dare alcune definizioni per la dimostrazione delle cinque condizioni equivalenti anche nel caso di insiemi ortonormali non numerabili.

In spazi non numerabili serve dare una nuova definizione della somma di una serie. Considero un sottoinsieme T finito, con $T \subset I$, e chiamo $A_T = \sum_{a_i \in T} a_i$. Supponiamo che gli a_i siano positivi, allora definisco

$$\sum a_i := \sup_{T_{\text{finito}}, T \subset I} A_T.$$

4.3.1 Spazio filtrante

Definizione 4.7

Sia Y un insieme parzialmente ordinato. Diremo che I è *filtrante* se presi $i_1, i_2 \in I$, esiste $i_3 \in I$ tale che $i_3 \geq i_1$ e $i_3 \geq i_2$ (presi due elementi nell'insieme, è sempre possibile trovarne uno maggiore di entrambi).

Esempio 4.4

Insieme dei sottoinsiemi finiti Considero un insieme Z e ne prendo i suoi sottoinsiemi finiti, cioè definisco

$$F_Z = \{T \subset Z, T\text{finito}\}.$$

Presi due sottoinsiemi finiti, la loro unione è finita e li contiene tutti e due, quindi F_Z è un insieme filtrante per l'inclusione.

insieme delle bolle Dato uno spazio topologico (X, τ) fisso $x_0 \in X$ e considero N_{x_0} insieme degli intorni di x_0 . Definisco la relazione d'ordine tale che $U \geq V$ se e solo se $U \subset V$ (infatti più un intorno è piccolo più ci si avvicina al punto).

N_{x_0} è filtrante perché, dati due intorni $U(x_0)$ e $V(x_0)$ l'intersezione tra i due, $U(x_0) \cap V(x_0)$, è più grande di essi rispetto alla relazione d'ordine definita.

4.3.2 Successione generalizzata

Definizione 4.8

Sia X un insieme, si chiama *successione generalizzata* in X una funzione definita su un insieme filtrante I a valori in X .

Ogni successione in X è una successione generalizzata (infatti basta prendere come insieme filtrante $I = \mathbb{N}$).

Definizione 4.9

In uno spazio topologico, la successione generalizzata $(x_i)_{i \in I}$ converge a x se per ogni U intorno di x , esiste $i_0 \in I$ tale che per ogni $i \geq i_0$, $x_i \in U$.

Proposizione 4.4

Dato X spazio topologico e $A \subset X$, allora $\bar{A}$ è l'insieme degli $z \in X$ tali per cui esiste una successione generalizzata a valori in A convergente a z .

Dimostrazione

INCLUSIONE 1: Sia $z \in X$ tale che esiste una successione generalizzata di punti di A che converge a z . Mostro che $z \in \bar{A}$. Sia U intorno di z , allora devo mostrare che $U \cap A \neq \emptyset$ (infatti se questo avviene per ogni intorno si ha $z \in \bar{A}$). Per ipotesi esiste una successione generalizzata $(a_i)_{i \in I}$ convergente a z , quindi deve esistere i_0 tale che per ogni $i \geq i_0$, $a_i \in U(z)$, quindi questo implica $a_i \in U \cap A$ e $U \cap A \neq \emptyset$, cioè $z \in \bar{A}$.

INCLUSIONE 2: Viceversa, supponiamo che z appartenga a $\bar{A}$, questo equivale a dire che per ogni U intorno di z , $U \cap A$ è non vuoto. Allora esiste $x_i \in A \cap U$. Considero quindi l'insieme filtrante I degli intorni di z come insieme di indici, e il net che associa ad un certo i (e quindi ad un certo U intorno di z) l'elemento $x_i \in A \cap U$, che esiste per quanto detto sopra. Ovviamente la successione generalizzata degli x_i converge a z , infatti, se considero $W = U(z)$, allora certamente esiste i_0 tale che per ogni $i \geq i_0$, $x_i \in W$ (basta prendere $i_0 = W$, perché, in base alla relazione d'ordine definita sull'insieme filtrante degli intorni, prendere $i \geq i_0$ significa prendere intorni contenuti in W .)

4.3.3 Continuità

Si può mostrare che anche la continuità si descrive con le successioni generalizzate.

Teorema 4.8

Siano X, Y spazi topologici, $f : X \to Y$ e $x_0 \in X$. f è continua se e solo se per ogni successione generalizzata che tende a x_0 , si ha che la nuova successione generalizzata $(f(x_i))_{i\in I}$ tende a $f(x_0)$.

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: Suppongo che f sia continua in x_0 . Dire che il net converge a x_0 significa che per ogni U intorno di x_0 , esiste $i_0 \in I$ tale che per ogni $i \geq i_0$, $x_i \in U$. Mostro che esiste un indice $i_1 \in I$ tale che per ogni $i \geq i_1$, $f(x_i) \in W$ con W intorno di $f(x_0)$. Per la continuità di f in x_0 esiste $U_1(x_0)$ tale che $f(U) \subset W$, segue che $f(x_i) \in W$ per ogni $i \geq i_1$ (cioè, in base alla relazione d'ordine definita sull'insieme filtrante degli intorni, per ogni U contenuto in U_1).

$2 \longrightarrow 1$: Viceversa, supponiamo che per ogni net $(x_i)_{i\in I}$ convergente a x_0 , $f(x_i) \to f(x_0)$ e deduciamo la continuità di f in x_0 . Sia W intorno di $f(x_0)$ e cerco U tale che $f(U) \subset W$. Supponiamo per assurdo che per ogni U intorno di x_0 non sia vero che $f(U) \subset W$, allora per ogni U esiste $x_U \in U$ tale che $f(x_U) \notin W$. Allora $\{x_U\}_{U\in U(x_0)}$ è un net, che converge a x_0 , allora per ipotesi si ha $f(x_U) \to f(x_0)$ contro l'ipotesi assurda. (questa dimostrazione non funzionerebbe in tutti gli spazi se si usassero successioni a valori in $\mathbb{N}$ invece dei net, perché in generale la famiglia degli intorni non è indicizzabile in modo numerabile).

4.3.4 Successione generalizzata di Cauchy

Definizione 4.10

Sia X uno spazio metrico e $(X_i)_{i\in I}$ un net in X , cioè una funzione $f : I \to X$. $(X_i)_{i\in I}$ è di Cauchy se per ogni ε esiste $i_0 \in I$ tale che per ogni $i_1, i_2 \geq i_0$, $d(x_{i_1}, x_{i_2}) \leq \varepsilon$.

Teorema 4.9

(X, d) è completo (ogni successione di Cauchy definita su $\mathbb{N}$ converge) se e solo se ogni net di Cauchy in X è convergente.

(la condizione $2 \longrightarrow 1$ è banale, ma bisognerà dimostrare $1 \longrightarrow 2$)

4.3.5 Net e spazi di Hilbert

Sia X di Hilbert e $E \subset X$ ortonormale completo, fissiamo $x \in X$ e F sottoinsieme finito di E , e chiamo $x_F = \sum_{e\in F} |x \cdot e| * e$.

Lemma 4.2

$(x_F)_{F\subset E, |F|<\infty}$ indicizzato dai sottoinsiemi finiti in E è un net di Cauchy.

Dimostrazione

L'insieme dei sottoinsiemi finiti è un insieme filtrante e può essere utilizzato per indicizzare un net. L'insieme

$$E_i = \{e \in E,\ t.c.\ x \cdot e \neq 0\}$$

è numerabile. Siccome vale Bessel, si ha

$$\sum_{e \in E_i} |x \cdot e|^2 \leq \|x\|^2$$

cioè la serie converge e la sua coda è trascurabile, quindi dato ε positivo, esiste n_0 tale che

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} |x \cdot e_k|^2 \leq \varepsilon^2, \text{ relazione } *$$

In questo caso l'indice i_0 per cui la successione è di Cauchy è dato dall'insieme $F_0 = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n_0}\} \subset X$. Infatti per ogni $F, G \subset E$ finiti, con $F, G \supset F_0$, si ha

$$\|x_F - x_G\|^2 \leq \| \sum_{e \in F} |x \cdot e| * e - \sum_{e \in G} |x \cdot e| * e\|^2$$

e per Pitagora, tenendo conto che gli e sono a due a due ortogonali, si ha che:

$$\|x_F - x_G\|^2 \leq \sum_{e \in F} |x \cdot e|^2 - \sum_{e \in G} |x \cdot e|^2$$

e tenendo conto che per $e \in F \cap G$ i termini compaiono con segno opposto e si elidono, si ha:

$$= \sum_{F \triangle G} |x \cdot e|^2$$

e da questa riscrittura è evidente che non compaiono termini della forma $|x \cdot e|$ con $e \in F_0$ perché $F_0 \subset F \cap G$, quindi la quantità considerata è $\leq \varepsilon^2$ per la relazione $*$ (sto considerando solo una parte della coda che è trascurabile) e il net considerato è di Cauchy.

Per il teorema sulla completezza, segue anche che il net $(x_F)_{F \subset E, |F| < \infty}$ converge a un certo vettore $z \in X$.

4.3.6 Condizioni equivalenti per insiemi non necessariamente numerabili

Teorema 4.10

Sia X di Hilbert e E sottoinsieme ortonormale completo. Sono equivalenti:

1. E è una base (un sottoinsieme ortonormale massimale)
2. $E^{\perp} = \{0\}$
3. E è completo (l'inviluppo lineare di E è denso in X)
4. per ogni $x \in X$, $x = \lim_F x_F$ (x coincide con z di cui prima abbiamo mostrato l'esistenza)
5. per ogni x , $\|x\|^2 = \sum_{e \in X} |x \cdot e|^2$.

Dimostrazione

L'equivalenza dei punti 1,2,3 è già stata dimostrata nel caso numerabile e non dipende dalla cardinalità di E .

$2 \longrightarrow 4$: devo mostrare che $x = z$ con $z = \lim_{F \subset E} x_F$. Dato $e \in E$, considero

$$(x-z) \cdot e = x \cdot e - z \cdot e = x \cdot e - (\lim_F x_F) \cdot e$$
$$= x \cdot e - \lim_F (x_F \cdot e) = x \cdot e - \lim_F (\sum_{e \in F} |x \cdot e| * e) \cdot e = x \cdot e - x \cdot e = 0$$

(questo passaggio vale perché posso supporre che il vettore e fissato stia in F)

A questo punto per la proprietà 2 $(x-z) \perp e$ implica $x - z = 0$, $x = z$.

$2 \longrightarrow 5$:

$$\|x\|^2 = x \cdot x = x \cdot \lim_F x_F$$
$$= \lim_F (x \cdot x_F) = \lim_F (\sum_{e \in F} |x \cdot e| * e) \cdot x) = \lim_F \sum_{e \in F} |x \cdot e|^2 = \sum_{e \in E} |x \cdot e|^2$$

$5 \longrightarrow 1$: condizione già dimostrata, non dipende dalla cardinalità di E .

Questo teorema è ben posto perché, per il lemma di Zorn, sappiamo che ogni insieme ammette una base ortonormale.

4.4 Isomorfismo di spazi di Hilbert

4.4.1 Relazione tra isomorfismi e isometrie

Definizione 4.11

Siano X, Y spazi di Hilbert, e $\phi : X \to Y$ lineare biunivoca (che rispetta la struttura insiemistica e algebrica). ϕ si dice *isomorfismo di spazi di Hilbert* se per ogni coppia di vettori $(x, z) \in X$,

$$x \cdot z = \phi(x) \cdot \phi(z).$$

Un'isometria $T : X \to Y$ è una funzione tale che $d_X(x,z) = d_Y(T(x), T(z))$, cioè

$$\|x - z\|_X = \|T(x) - T(z)\|_Y = \|T(x - z)\|_Y$$

e ponendo $x-z = v$ vettore generico si ha che le isometrie soddisfano la condizione

$$\|v\|_X = \|T(v)\|_Y.$$

Lemma 4.3

Dati due spazi pre hilbertiani (non completi) e T lineare, allora
per ogni $x, z \in X$,

$$x \cdot z = T(x) \cdot T(z)$$

se e solo se T è un'isometria.
Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$:
Supponiamo che T conservi il prodotto scalare. Allora

$$\|x\|^2 = x \cdot x = T(x) \cdot T(x) = \|T(x)\|^2.$$

$2 \longrightarrow 1$: Viceversa, suppongo che T sia un'isometria e mostro che conserva il prodotto scalare. Dato uno scalare λ considero

$$(x + \lambda z) \cdot (x + \lambda z) = x \cdot x + \bar{\lambda} x \cdot z + \lambda z \cdot x + |\lambda|^2 z \cdot z$$

e tenendo conto che $\bar{\lambda} x \cdot z$ è il coniugato di $\lambda z \cdot x$ posso riscrivere:

$$= \|x\|^2 + 2Re(\bar{\lambda} x \cdot z) + |\lambda|^2 \|z\|^2, \text{ formula 1}$$

e per ipotesi

$$\begin{aligned} \|x + \lambda z\|^2 = \|(T(x) + \lambda T(z))\|^2 &= (T(x) + \lambda T(z)) \cdot (T(x) + \lambda T(z)) \\ &= \|T(x)\|^2 + \lambda T(z) \cdot T(x) + \bar{\lambda} T(x) \cdot T(z) + |\lambda|^2 \|T(z)\|^2 \\ &= \|T(x)\|^2 + 2Re(\bar{\lambda} T(x) \cdot T(z)) + |\lambda|^2 \|T(z)\|^2, \text{formula 2} \end{aligned}$$

Eguagliando le formule 1 e 2:

$$\|x\|^2 + 2Re(\bar{\lambda} x \cdot z) + |\lambda|^2 \|z\|^2 = \|T(x)\|^2 + 2Re(\bar{\lambda} T(x) \cdot T(z)) + |\lambda|^2 \|T(z)\|^2$$

ma siccome T conserva la norma, $\|T(x)\|^2 = \|x\|^2$, quindi alcuni termini si elidono e rimane

$$Re(\bar{\lambda}x \cdot z) = Re(\bar{\lambda}T(x) \cdot T(z)), \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Se gli scalari sono reali, si ottiene $x \cdot z = T(x) \cdot T(z)$ perché non serve considerare la parte reale, e l'uguaglianza è quindi verificata. Se gli scalari sono complessi, per $\lambda = 1$ ottengo

$$Re(x \cdot z) = Re(T(x) \cdot T(z))$$

invece per $\lambda = -i$, si ha

$$Re(-i * x \cdot z) = Re(-iT(x) \cdot T(z))$$

e la parte reale di un numero complesso moltiplicata per $-i$ è la parte immaginaria:

$$Im(x \cdot z) = Im(T(x) \cdot T(z))$$

quindi i due numeri complessi $x \cdot z$ e $T(x) \cdot T(z)$ sono uguali perché hanno la stessa parte reale e immaginaria, e T conserva il prodotto scalare.

L'immagine mediante un'isometria di una successione di Cauchy è ancora una successione di Cauchy.

Teorema 4.11

Sia X completo e $T : X \to Y$ un'isometria, allora Y è completo.

Dimostrazione

Considero una successione (Y_n) di Cauchy in Y , allora la successione $T^{-1}(Y_n)$ è di Cauchy in X , e deve convergere a un certo x per la completezza di X . T inquanto isometria è continua allora, applicando T ai due membri, ottengo $Y_n \to T(X)$, cioè Y_n converge in Y .

Uno spazio di Hilbert è separabile se e solo se ha una base numerabile. (l^2) è separabile, mostreremo che $L^2((-\pi, \pi))$ è separabile, e che a meno di isomorfismi esiste un unico spazio di Hilbert con cardinalità numerabile.)

4.4.2 Spazio l^2(E)

Se E è un insieme a priori di cardinalità qualunque, definiamo

$$l^2(E) = \{f \colon E \to \mathbb{R}\,\text{quasi ovunque nulle, } t.c. \sum f(e)^2 < \infty\}$$

Teorema 4.12

Sia X spazio di Hilbert con base E . Allora X è isomorfo a $l^2(E)$.

Dimostrazione

Considero $l^2(E)$ e a $x \in X$ associo l'elemento $\hat{x} \in l^2(E)$ tale che $\hat{x}(e) = x \cdot e$ ($\hat{x}$ sta in $l^2(E)$ perché i prodotti scalari non nulli sono numerabili).

Per Parseval

$$\sum_{e \in E} |x \cdot e|^2 = \|x\|^2 < \infty$$

ma il primo membro è uguale a $\|\hat{x}\|^2$, quindi si ha che $\|x\| = \|\hat{x}\|$.

Allora $\hat{\cdot}$ è un'isometria, è lineare e per mostrare che è un isomorfismo tra X e $l^2(E)$ devo mostrare che è suriettiva.

Osservo che:

1. la funzione che manda un certo $e_1 \in E$ in 1 e tutti gli altri vettori in 0 è $\hat{e}_1$, infatti $e_1 \cdot e_1 = 1$ mentre $e_1 \cdot e = 0$ se $e \neq e_1$.
2. la funzione che manda e_1 in α e tutti gli altri vettori in 0 è $\hat{(}\alpha e_1)$.
3. la funzione che manda $e_1 \in \alpha, e_2 \in \beta$ è data da $\hat{(}\alpha e_1 + \beta e_2)$, e vale lo stesso per tutte le combinazioni lineari di questo tipo.

L'insieme delle funzioni elencate è $\hat{(}$LinE) , ed è denso in l^2 (dimostrazione $*$).

L'immagine attraverso l'isometria $\hat{\cdot}$ di uno spazio completo è completa quindi $\hat{(}$LinE) è completa ma $l^2(E)$ è di Hilbert e quindi i suoi sottospazi completi devono essere anche chiusi. Allora lo spazio $\hat{(}$LinE) è denso e chiuso, quindi coincide con $l^2(E)$.

Dimostrazione (dimostrazione $\ast$)

Fisso $x \in X, \varepsilon > 0$, allora per mostrare che un insieme A è denso basta mostrare che $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Fisso $f \in l^2(E)$, e ε positivo, allora considero la bolla $B_{f,\varepsilon}$. Cerco in questa bolla una funzione nulla al di fuori di un insieme finito, che stia in $\hat{(}$LinE) .

Osservo come prima che, per Parseval,

$$\sum_{e \in E} |f \cdot e|^2$$

è una serie convergente, allora esiste n_0 tale che la coda di questa serie sia minore di ε , cioè tale che

$$\sum_{e \in E} |x \cdot e|^2 \leq \varepsilon.$$

Posso quindi prendere una funzione f' definita su $\{e_1, \ldots, e_{n_0}\}$ tale che $e_1 \mapsto f(e_1), e_2 \mapsto f(e_2), \ldots, e_{n_0} \mapsto f(e_{n_0})$, e tutti i vettori e_n con $n \geq n_0$ vengono mandati in 0.

$$\|f-g\|_2^2 = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} |f(e_k)\cdot e_k|^2 \leq \varepsilon$$

e quindi f' sta nella bolla.

4.4.3 Spazi di Hilbert isomorfi

Teorema 4.13

Due spazi di Hilbert sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: sia $T : X \to Y$ un isomorfismo di spazi di Hilbert, e mostro che X e Y hanno la stessa dimensione. Considero una base E di X , allora $T(E)$ è una base di Y : infatti

1. T conserva la norma essendo un'isometria, quindi i vettori di $T(E)$ hanno norma 1
2. T conserva anche il prodotto scalare quindi $T(E)$ è una famiglia di vettori ortonormali,
3. $T(E)$ è completo, infatti dato $\varepsilon > 0$ e $y \in Y$, allora $\mathrm{LinT(E)} \cap \mathrm{B_{y,\varepsilon}} \neq \emptyset$. Infatti, T è suriettiva, quindi $T(X) = Y$ ed esisterà $x \in X$ tale che $T(x) = y$. Siccome E è completo, $\overline{\mathrm{LinE}} = X$, quindi esiste $x' \in \mathrm{LinE}$ tale che $d(x, x') < \varepsilon$. Ma T conserva le distanze, quindi

$$d(T(x), T(x')) = d(y, T(x'))) < \varepsilon$$

e $T(x') \in B_{y,\varepsilon}$ e contemporaneamente $T(x') \in \mathrm{LinT(E)}$.

allora $T(E)$ è una base per Y .

$2 \longrightarrow 1$: siano E, F basi di X e Y rispettivamente, con $|E| = |F|$, allora $X \cong L^2(E)$ e $Y \cong L^2(F)$. $|E| = |F|$ implica che c'è una corrispondenza biunivoca $\phi : E \to F$ tra le due basi.

Ricordo che

$$l^2(E) = \{f : E \to \mathbb{R}\,\text{quasi ovunque nulle}, t.c. \sum_i f(i)^2 < \infty\}$$

$$l^2(F) = \{f : F \to \mathbb{R}\,\text{quasi ovunque nulle}, t.c. \sum_i f(i)^2 < \infty\}$$

allora posso costruire l'isomorfismo che prende una funzione f in $l^2(F)$ e la manda in $\phi \circ f \in l^2(E)$.

4.4.4 Proposizione sulla FIP

Il diametro di un insieme è il sup delle distanze tra coppie di elementi dell'insieme.

Una famiglia di insiemi $(F_i)_{i\in I}$ ha la "finite intersection property" se ogni volta che prendo una sottofamiglia finita $\{F_1, \dots, F_n\}$ la loro intersezione è non vuota.

Osservazione 4.3

La compattezza si può descrivere dicendo che ogni famiglia di chiusi con intersezione vuota ha una sottofamiglia finita ad intersezione vuota.

Infatti se X è compatto da ogni suo ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito, quindi si può scrivere $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ con A_i aperti, allora $\emptyset = X^C = A_1^C \cap \dots \cap A_n^C$, quindi ho una sottofamiglia finita di chiusi ad intersezione vuota.

Proposizione 4.5

Sia (X, d) uno spazio metrico, allora sono equivalenti:

1. (X, d) è completo;
2. Per ogni famiglia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di insiemi chiusi non vuoti tali che $F_{n+1} \subset F_n$ e $\inf_n \mathrm{diamF_n} = 0$ allora $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$;
3. Per ogni famiglia $(F_s)_{s\in S}$ di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita e $\inf_s \mathrm{diamF_s} = 0$ allora $\bigcap_{s\in S} F_s \neq 0$;
4. Ogni net di Cauchy converge.

Dimostrazione (opzionale)

$1 \longrightarrow 2$: Considero una famiglia di chiusi $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ come nell'enunciato. Visto che $F_n \neq \emptyset$ per ogni n posso selezionare $x_n \in F_n$.

Mostro che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **è di Cauchy**: osservo che dati m, n con $m > n$, allora $x_m \in F_m$ e $F_m \subseteq F_n$ implica $x_m \in F_n$, quindi la coda della successione appartiene tutta a F_n .

Dato $\varepsilon > 0$, per la condizione $\inf \mathrm{diamF_n} = 0$ segue che esiste n_0 tale che $\mathrm{diamF_{n_0}} < \varepsilon$. Allora, per ogni $m, n > n_0$, si ha $x_m, x_n \in F_{n_0}$, allora

$$d(x_n, x_m) \leq \mathrm{diamF_{n_0}} \leq \varepsilon$$

quindi la successione è di Cauchy.

Ma l'ipotesi è che X sia completo, quindi la successione converge ad un certo x , **mostro che** $x \in \bigcap_n F_n$ **e quindi che l'intersezione è non vuota**. Gli F_n sono chiusi, quindi basta far vedere che x è un punto aderente, cioè che sta nella chiusura di ogni F_k . Questo è vero perché x è limite di una successione a elementi in F_k per ogni k , infatti $x = \lim_{n\geq k} x_n$ e per quanto osservato prima $x_n \in F_k \forall n \geq k$.

Mostro che l'intersezione si riduce a un solo punto: Supponiamo che ci sia un altro punto, $y \neq x$ con $y \in \bigcap F_n$. Allora $d(x,y) > 0$, ma siccome $\inf \mathrm{diamF_n} = 0$ esisterà un F_k che contiene x ma non y . $2 \longrightarrow 3$: Considero una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita e con inf dei diametri 0. Per la FIP, ogni F_s è non vuoto (altrimenti la famiglia finita $\{F_s\}$ non soddisfa la proprietà). Siccome l'inf dei diametri è 0, per ogni $j \in \mathbb{N}$ esiste s_j tale che $\mathrm{diamF_{s_j}} < \frac{1}{\mathrm{j}}$ (formula 1).

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ pongo $G_n = \bigcap_{j \leq n} F_{s_j}$. Questa è un'intersezione finita di chiusi, quindi per la FIP è non vuota, e ovviamente è decrescente perché in G_{n+1} interseco un numero maggiore di insiemi. Inoltre essendo $F_n \subset F_j$, per la formula 1 $\mathrm{diamF_j} < \frac{1}{\mathrm{j}}$ per ogni $j \leq n$, quindi all'aumentare di n il diametro di G_n tende a 0, e alla famiglia G_n si può applicare 2, quindi esiste un unico $x_0 \in X$ tale che $\bigcap_n G_n = \{x_0\}$.

Mostro che x_0 appartiene a tutti gli F_s . Fisso s_0 , e chiamo $(F')_s = F_{s_0} \cap F_s$ con $(F')_s \neq \emptyset$ per la FIP. Inoltre la famiglia $(F')_s)_{s \in S}$ soddisfa le ipotesi della condizione 3 infatti:

1. è una famiglia di chiusi,
2. ha la fip perché:
$$F'_{s_1} \cap \cdots \cap F'_{s_k} = F_{s_0} \cap F_{s_1} \cap \cdots \cap F_{s_0} \cap (F_{s_k}$$
$$= F_{s_0} \cap F_{s_1} \cap \cdots \cap F_{s_k}),$$
quindi globalmente è un'intersezione finita di F_s ;
3. l'inf dei diametri è 0 [perché gli $(F')_s$ sono tutti insiemi contenuti nei F_s e per ipotesi $\inf \mathrm{diamF_s} = 0$.

Ripetendo il procedimento precedente applicato agli $(F')_s$ ottengo che esiste un punto x_0 che appartiene a $\bigcap_n (G')_n$ dove i $(G')_n$ sono stati costruiti come prima.

$$\bigcap (F')_n = F_{s_0} \cap F_{s_1} \cap \cdots \cap F_{s_0} \cap F_{s_n}$$
$$= F_{s_0} \cap F_{s_1} \cap \cdots \cap F_{s_n},$$

ma nell'intersezione senza F_{s_0} c'è un punto solo, x_0 , quindi x_0 deve stare anche in F_{s_0} , ma questo è vero per ogni s_0 quindi vale 3.

$3 \longrightarrow 4$: Sia $(x_s)_{s \in S}$ un net di Cauchy. Fisso s e considero $F_s = \overline{\{x_t : t \geq s\}}$. Affermo che

1. F_s è un chiuso non vuoto.
2. F_s verifica la FIP. Prendo $F_{s_1} \cap \cdots \cap F_{s_k}$. L'insieme degli indici deve essere filtrante, quindi per ogni coppia di indici deve esisterne uno maggiore di entrambi, e applicando il procedimento più volte, esiste $\bar{s} \geq s_1, s_2, \ldots, s_k$. Quindi ho un chiuso $F_{\bar{s}}$ contenuto in tutti gli altri.

3. l'inf dei diametri è 0, perché il net è di Cauchy.Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste s_0 tale che
$$\forall s_1, s_2 \geq s_0,\ d(x_{s_1}, x_{s_2}) < \varepsilon,$$
quindi $\mathrm{diamF_{s_0}} \leq \varepsilon$, perché F_{s_0} è l'insieme degli x_s con $s \geq s_0$ e quindi contiene tutti i punti x_{s_1}, x_{s_2} per cui $d(x_{s_1}, x_{s_2}) < \varepsilon$.

Quindi per la 3 esiste $x_0 \in \bigcap F_s$ e **mostro che** x_0 **è il limite del net**, cioè considero $r > 0$ e la bolla $B(x_0, r)$, e cerco un indice s_0 per cui, per $s > s_0$ gli elementi del net stanno nella bolla.

Per la proprietà sui diametri degli F_s esiste s_0 tale che $\mathrm{diamF_{s_0}} < \mathrm{r}/2$. F_{s_0} deve stare tutto nella bolla, perché x_0 sta in F_{s_0} , e il diametro questo insieme è minore di $r/2$. Quindi tutti gli elementi del net a partire da s_0 sono nella bolla.

$4 \longrightarrow 1$: ogni successione è un net e quindi in particolare ogni successione di Cauchy converge.

Il seguente è un esempio di spazio topologico che non ha un insieme di intorni fondamentali come le bolle.

Esempio 4.5

Sia $X = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R}\}$: con la topologia della metrica uniforme, graficamente gli intorni di una funzione sono fatti nel seguente modo: considero una funzione e la traslo in alto e in basso di ε , l'intorno contiene tutte le funzioni il cui grafico è compreso nella "striscia" individuata dalle due traslate.

Invece, considero ora la topologia della convergenza puntuale, in cui $f_n \to [p]f$ se per ogni $x \in [0, 1]$ $f_n(x) \to f(x)$. In questa topologia per determinare l'intorno generico di una funzione fisso un punto x e considero le funzioni che differiscono da f per meno di ε in quel punto, ottengo così l'intorno U_x .

Siccome l'intersezione di intorni è ancora un intorno, l'insieme delle funzioni che si discostano da f per meno di ε in un numero finito di punti, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ è ancora un intorno, perché intersezione di $U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \cdots \cap U_{x_n}$.

Mostro che la funzione nulla non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Per assurdo supponiamo che esista (U_n) famiglia di intorni tale che per ogni U intorno esiste n tale che $U_n \subset U$. Ogni U_n è caratterizzato da un $r > 0$ e da un numero finito di punti $P_n = \{x_1^n, \ldots, x_n^n\}$ su cui le funzioni differiscono dalla funzione nulla per meno di r , e quindi sono minori in modulo di r . L'insieme P_n non può esaurire $[0, 1]$, allora considero un $\bar{x} \notin P_n$.

Considero quindi $U = \{f : f(\bar{x}) < 2\}$. Non può esserci nessun intorno U_n contenuto in U , perché i valori delle funzioni di U_n sono specificati su $\{x_1^n \ldots, x_n^n\}$, ma non su $\bar{x}$.

In questo spazio topologico la chiusura non si può descrivere con le successioni, anche se si ha la nozione di convergenza di successioni.

Capitolo 5

Sistema trigonometrico

5.1 Sistema trigonometrico

La funzione F tale che $F(t) = e^{-it}$ è una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ periodica.

5.1.1 Sistema ortonormale per L^2(T)

Sia T la circonferenza unitaria sul campo complesso, e $C(T) = \{f : T \to \mathbb{C}\,\text{continue}\}$.

Definisco

$$L^2(T) = \{g : T \to \mathbb{C}\,\text{misurabil}t.c. \int_0^{2\pi} g(t)^2\,dt < \infty\}$$

Definisco il prodotto scalare come

$$f \cdot g = \frac{1}{2\pi} * \int_0^{2\pi} f(t)\bar{g}(t)\,dt$$

allora la norma indotta è

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^{2\pi} f(t)\bar{f}(t)\,dt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt} \end{aligned}$$

Considero il sistema $*$ delle funzioni $f(t) = e^{int}$ con $n \in \mathbb{Z}$ e **mostro che è un sistema ortonormale per** $L^2(T)$.

1. Le funzioni del sistema $*$ sono a due a due ortogonali. Infatti se $n \neq k$ si ha

$$\begin{aligned} e^{int} \cdot e^{ikt} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos((n-k)t) + i\sin((n-k)t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi(n-k)}[\sin((n-k)t) - i\cos((n-k)t)]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

2. se considero la norma di funzioni di questo tipo si ha

$$\|e^{int}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} * \int_0^{2\pi} e^{int}e^{-int}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dt = 1$$

Osservazione 5.1

Si può passare dalla forma esponenziale alla forma trigonometrica di un numero complesso attraverso la relazione:

$$e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt)$$
$$e^{-int} = \cos(nt) - i\sin(nt)$$

quindi sommando e sottraendo le due relazioni si ha:

$$\cos(nt) = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$$
$$\sin(nt) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

cioè $\sin(nt), \cos(nt)$ appartengono all'inviluppo lineare del sistema.

Definizione 5.1

La quantità

$$a_0 + \sum_{k=1}^{N}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)]$$

viene chiamata *polinomio trigonometrico*, e i coefficienti a_k, b_k a priori stanno in $\mathbb{C}$.

In forma esponenziale il polinomio trigonometrico di grado N si scrive come:

$$\sum_k c_k e^{ikx},\ k \in (-N, N)$$

Esercizio 5.1 (relazioni di ortogonalità)

Dimostrare le relazioni di ortogonalità tra seni e coseni, in particolare dimostrare che:

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) * \sin(mx) = 0 \forall k, m \in \mathbb{Z}$$
$$\int \cos(kx) * \cos(mx) = 0 \iff k \neq m$$
$$\int \sin(kx) * \sin(mx) = 0 \iff k \neq m.$$

Suggerimento: Ricordare che valgono le formule trigonometriche, che si ricavano esplicitando la relazione $e^{ia} * e^{ib} = e^{i(a+b)}$:

$$e^{ia}*e^{ib} = (\cos a+i \sin a)(\cos b+i \sin b) = \cos a \cos b-\sin a \sin b+i(\sin a \cos b+\cos a \sin b)$$
$$e^{i(a+b)} = \cos(a + b) + i \sin(a + b)$$

ed eguagliando parte reale e immaginaria si ha:

$$\sin(a + b) = \sin a * \cos b + \cos a * \sin b$$
$$\cos(a + b) = \cos a * \cos b - \sin a * \sin b,$$
$$\sin(a - b) = \sin a * \cos b - \cos a * \sin b$$
$$\cos(a - b) = \cos a * \cos b + \sin a * \sin b,$$

Dimostrazione

Dimostro la prima relazione di ortogonalità:

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx) * \sin(mx)\, dx =$$

Dalle formule precedenti si ricava:

$$\cos a \sin b = 1/2(\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

quindi

$$= 1/2 \int_0^{2\pi} \sin((k + m)x) + \sin((k - m)x)\, dx =$$
$$= 1/2[-1/(k + m) * \cos((k + m)x) - 1/(k - m) * \cos((k - m)x)]_0^{2\pi}$$
$$= 1/2[-1/(k + m) * (1 - 1) - 1/(k - m * (1 - 1)] = 0$$

Si fa un ragionamento analogo per le altre relazioni.

5.2 Completezza del sistema trigonometrico

Avendo dimostrato che il sistema trigonometrico è ortonormale per $L^2(T)$, per dimostrare che è una base basta dimostrare che è anche completo. La dimostrazione si fa in vari passi.

5.2.1 Passo 1 Densità dei polinomi trigonometrici in C(T)

Teorema 5.1

Per ogni $f \in C(T), \forall \varepsilon$ positivo, esiste p polinomio trigonometrico tale che

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

(equivalentemente, i polinomi trigonometrici sono densi in $C(T)$ per la norma del sup).

Dimostrazione

Supponiamo di avere a disposizione una successione di polinomi trigonometrici $q_k(t)$ che soddisfi tre proprietà:

1. $q_k(t) \geq 0 \forall k, \forall t$
2. $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} q_k(t)\, dt = 1$$
3. dato $0 < \delta < \pi$, se chiamo $\eta_{k,\delta} = \sup_{t\in(-\pi,\delta)\cup(\delta,\pi))} q_k(t)$,
$$\lim_{k\to\infty} \eta_{k,\delta} = 0.$$

   Data $f \in C(T)$, poniamo

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) * q_k(s)\, ds.$$

Mostriamo che p_k è a sua volta un polinomio trigonometrico.

Pongo $t - s = u$, in modo che:

$$p_k(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi} f(u)q_k(t-u)\, du$$

e invertendo gli estremi di integrazione:

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(u)q_k(t-u)\, du$$

f, q_k sono periodiche e il loro prodotto è periodico, allora posso cambiare l'intervallo di integrazione:

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)q_k(t-u)\, du$$

Per ipotesi q_k è un polinomio trigonometrico e si può scrivere:

$$q_k(t) = \sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt}$$

quindi

$$q_k(t-u) = \sum_{r=-n}^{n} a_r e^{ir(t-u)}$$

$$q_k(t-u) = \sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt} e^{-iru}$$

e sostituendo nell'espressione di $p_k(t)$:

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt} e^{-iru}\, du$$

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-n}^{n} a_r [\int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iru} du] * e^{irt}$$

e ponendo

$$c_r = a_r \int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iru} du$$

si ha

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{r=-n}^{n} c_r e^{irt},$$

e ho quindi mostrato che p_k è un polinomio trigonometrico.

Valuto la differenza $p_k(t) - f(t)$:

$$p_k(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) q_k(s)\, ds - f(t)$$

Uso la proprietà 2 dei q_k per poter portare $f(t)$ dentro all'integrale moltiplicandola per un fattore che vale 1:

$$p_k(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) q_k(s)\, ds - f(t) * \frac{1}{2\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} q_k(s)\, ds$$

$$p_k(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t)) q_k(s)\, ds$$

Spezzo l'integrale in tre addendi:

$$= \frac{1}{2\pi} * [\int_{-\delta}^{\delta} (f(t-s) - f(t)) q_k(s)\, ds + \int_{\pi}^{-\delta} (f(t-s) - f(t)) q_k(s)\, ds + \int_{\delta}^{\pi} (f(t-s) - f(t)) q_k(s)\, ds]$$

Valuto separatamente i tre addendi e mostro che ognuno è minore di ε :

1. Primo addendo:
$$|\int_{-\delta}^{\delta}(f(t-s)-f(t))q_k(s)\,ds|$$
$$\leq \int_{-\delta}^{\delta}|f(t-s)-f(t)|q_k(s)\,ds$$
La funzione è continua e siccome T è compatto, è uniformemente continua. Allora ponendo $a=t-s$, e $b=t$ si ha $|b-a|=|t-s-t|=|s|\leq\delta$, allora per l'uniforme continuità $|f(t-s)-f(s)|\leq\varepsilon$.
$$\leq \int_{-\delta}^{\delta}\varepsilon q_k(s)\,ds$$
e siccome per la proprietà 1 dei q_k l'integranda è positiva posso considerare un intervallo di integrazione più grande:
$$\leq \int_{-\pi}^{\pi}\varepsilon q_k(s)\,ds$$
$$\leq \varepsilon * \int_{-\pi}^{\pi}q_k(s)\,ds \leq \varepsilon$$
applicando ancora la proprietà 2.

2. Secondo addendo:
$$\int_{\delta}^{\pi}|f(t-s)-f(t)| * q_k(s)\,ds$$
$$\leq \int_{\delta}^{\pi}[|f(t-s)|-|f(t)|] * q_k(s)\,ds$$
$$\leq 2 * \|f\|_\infty * \int_{\delta}^{\pi}q_k(s)\,ds \leq \varepsilon$$
infatti se $k\to\infty$ il tutto tende a 0 per la proprietà 3 dei q_k .

3. terzo addendo: si tratta come il secondo

Sommando i tre integrali ottengo $|p_k-f|\leq 3\varepsilon$ e in particolare $\|p_k-f\|_\infty\leq\varepsilon$.

Mostro che la disuguaglianza vale anche per la norma 2:

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)^2\,dt$$
$$\leq \|f\|_\infty^2\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dt = \|f\|_\infty^2$$
$$\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty.$$

quindi la disuguaglianza vale anche in norma 2, perché

$$\|f-p_k\|_2 \leq \|f-p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

e p_k è il polinomio trigonometrico di cui ho affermato l'esistenza nell'enunciato.

Resta da verificare che effettivamente esiste una successione di polinomi q_k con le tre proprietà elencate sopra: definisco $q_k(t) = c_k * (\frac{1+\cos t}{2})^k$, con c_k costante positiva.

1. La prima proprietà (positività) è verificata;
2. determino c_k in modo che sia soddisfatta anche la seconda, cioè impongo:
$$\frac{c_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1+\cos t}{2})^k \, dt = 1.$$
3. Per verificare la terza proprietà è necessario dare una stima dei c_k . Siccome q_k è pari, si ha
$$\int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1+\cos t}{2})^k \, dt = 2 * \int_{0}^{\pi} (\frac{1+\cos t}{2})^k \, dt.$$
$$\geq \int_{0}^{\pi} (\frac{1+\cos t}{2})^k * \sin t \, dt$$
e ponendo $u = \cos t$, l'integrale di partenza è:
$$\geq \int_{-1}^{1} (\frac{1+u}{2})^k du$$
e ponendo $\frac{1+u}{2} = v$, si ha
$$\geq 2 \int_{0}^{1} v^k dv = \frac{2}{k+1}$$
quindi
$$\frac{c_k}{\pi} * \int_{0}^{\pi} (\frac{1+\cos t}{2})^k \, dt = 1 \geq c_k/\pi * \frac{2}{n+1}$$
cioè
$$c_k \leq (n+1)\pi/2$$
Devo quindi valutare:
$$\eta_{k,\delta} = \sup_{(-\pi,-\delta)\cup(\delta,\pi)} q_k(t) = q_k(\delta)$$
perché i q_k sono decrescenti, e sostituendo l'espressione dei q_k :
$$= c_k * (\frac{1+\cos\delta}{2})^k$$
e usando la stima per i c_k :
$$\leq \pi/2(k+1) * (\frac{1+\cos\delta}{2})^k \to 0$$
infatti $1 + \cos\delta < 2$ quindi $\frac{1+\cos\delta}{2} < 1$.

5.2.2 Passo 2 densità di C^T in L^2(T)

Mostro che le funzioni continue su T sono dense in norma 2 su $L^2(T)$.

Definizione 5.2

Data la σ -algebra $\mathcal{M}$, la misura $\mu\colon M \to [0,\infty)$ è regolare se per ogni $E \in M$ valgono le due condizioni seguenti:

1. $\mu(E) = \sup \mu(K)$ con K compatto e contenuto in E (regolarità dal basso)
2. $\mu(E) = \inf \mu(U)$, con $U \supset E$ aperto. (regolarità dall'alto)

Teorema 5.2

Nell'ipotesi che μ è regolare, che $\mu(T)$ sia finita e che gli aperti sono misurabili, si ha che $C(T)$ è denso in $L^2(T)$.

Dimostrazione

Dimostriamo in realtà che $C(X)$ è denso in $L^2(X)$ se μ è regolare. **Mostro prima che $C(T)$ è denso in L^1** . Data una funzione misurabile e positiva, si definisce $\int f\,d\mu$ come sup degli integrali delle funzioni semplici minori di f . Le funzioni semplici sono somme di funzioni indicatrici, quindi basta mostrare il risultato per le indicatrici.

Sia $A \subset X$ misurabile e mostro che I_A è approssimabile con funzioni continue in L^1 , in questo modo mostro che le funzioni continue su T sono dense in L^1 .

Per la regolarità della misura, dato ε positivo, esistono K compatto e V aperto tali che $K \subset A \subset V$ tali che $\mu(V \setminus K) \le \varepsilon$.

Definiamo la funzione

$$\phi_\varepsilon(x) = \frac{d_X(x, V^c)}{d_X(x, V^c) + d_X(x, K)}$$

questa quantità è ben definita, il denominatore non si annulla, perché se fosse nullo si avrebbe contemporaneamente $x \in V^c$ (chiuso) e $x \in K$ e questo non può avvenire.

ϕ_ε è continua e ha valori in $[0,1]$ e si annulla su V^c mentre vale 1 su K . Considero la differenza

$$|I_A - \phi_\varepsilon| \le \begin{cases} 0 & \iff x \in K \cup (X \setminus V) \\ 1 & \iff x \in V \setminus K \end{cases}$$

$$|I_A - \phi_\varepsilon| \le 1, \text{dappertutto}$$

$$\|I_A - \phi_\varepsilon\|_1 = \int_X |I_A - \phi_\varepsilon|\,dx$$

$$= \int_{V \setminus K} |I_A - \phi_\varepsilon|\,dx + \int_{X \setminus (V \setminus K)} |I_A - \phi_\varepsilon|\,dx$$

e applicando le leggi di complementazione a $X \setminus (V \setminus K) = (V \setminus K)^c = V^c \cup K$:

$$= \int_{V \setminus K} I_A - \phi_\varepsilon \, dx + \int_{V^c} I_A - \phi_\varepsilon \, dx$$

e siccome il secondo integrale è nullo

$$\begin{aligned} &= \int_{V \setminus K} |I_A - \phi_\varepsilon| \, dx \\ &\leq \mu(V \setminus K) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Mostro che le funzioni semplici sono dense in L^2 : questo è vero per il seguente risultato:

sia $f \geq 0$ misurabile, allora esiste una successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni semplici tali che $s_n \leq f$ e $s_n \to f$ puntualmente. Se $f \in L^2$, allora anche le s_n sono in L^2 , inoltre $f - s_n \leq f \in L^2$ quindi l'integrale di $|f - s_n|^2$ è ben definito e per il teorema di convergenza dominata si ha

$$\lim_{n \to \infty} \int |f - s_n|^2 = \int \lim_{n \to \infty} |f - s_n|^2 = \int 0 = 0.$$

cioè $f - s_n \in L^2$.

In questa dimostrazione è stato sfruttato il seguente risultato:

Proposizione 5.1

In uno spazio metrico X , se A è denso in X e B è denso in A , allora B è denso in X .

Dimostrazione

Fisso $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, devo mostrare che $B_{x,\varepsilon} \cap B \neq \emptyset$. Siccome A è denso in X , esiste t in $B_{x,\varepsilon/2} \cap A$. Ma B è denso in A , allora deve esistere $b \in B$ tale che $b \in B \cap B_{t,\varepsilon/2}$, quindi applicando la disuguaglianza triangolare

$$d(b, x) \leq d(b, t) + d(t, x) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \leq \varepsilon.$$

5.2.3 Passo 3 conclusione

Teorema 5.3

L'insieme delle funzioni $(e^{int})_{n \in \mathbb{Z}}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2(\mathbb{C})$.

Dimostrazione

Dobbiamo mostrare che $(e^{int})_{n \in \mathbb{N}}$ è denso in L^2 , cioè che per ogni $f \in L^2$ esiste p polinomio trigonometrico tale che $\|f - p\|_2 \leq \varepsilon$. Per il passo 1, sappiamo che data $g \in C(T)$ e $\varepsilon > 0$, esiste p polinomio trigonometrico tale che $\|g - p\|_\infty < \varepsilon$ e di conseguenza, anche $\|g - p\|_2 \leq \varepsilon$ perché $\|g - p\|_2 < \|g - p\|_\infty$.

Per il passo 2, data $f \in L^2$, allora esiste $g \in C(T)$ tale che $\|f-g\|_2 < \varepsilon$, allora

$$\|f-p\|_2 \leq \|f-g\|_2 + \|g-p\|_2 \leq 2\varepsilon.$$

5.3 Trasformata di Fourier

Su $C(T)$ normalizzo il prodotto scalare ponendo

$$f \cdot g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\bar{g}(t)\,dt.$$

Data $f \in C(T)$, l'n-esimo coefficiente di Fourier di f è

$$\hat{f}_n = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} f(t) * e^{-int}\,dt = f \cdot e^{int}.$$

In norma L^2 ogni $f \in L^2$ converge alla propria serie di Fourier, cioè a $\sum_{n=1}^{\infty} |x \cdot e_n| * e_n$, quindi, in norma L^2 ,

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k e^{ikt}$$

Inoltre per Parseval si ha

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n|^2$$

quindi la serie al secondo membro converge, e vale il seguente lemma.

Lemma 5.1 (di Riemann-Lebesgue)

Per ogni $f \in L^2([0, 2\pi])$,

$$\lim_{n\to\pm\infty} \hat{f}_n = 0,$$

cioè, in forma complessa

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = 0$$

e in forma reale

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

Osservazione 5.2

La trasformata di Fourier è la funzione $\hat{}$ che permette il passaggio da f a $\hat{f}$. $\hat{f}$ sta in $l^2(\mathbb{Z})$ per Parseval. $\hat{(f)}$ è la trasformata di Fourier di f . $\hat{}$ è un'isometria, quindi è iniettiva, è lineare ed è suriettiva (la dimostrazione è già stata fatta nel caso generale) e quindi la trasformata di Fourier è un isomorfismo fra $L^2(\mathbb{C})$ e $l^2(\mathbb{Z})$.

5.4 Convergenza puntuale delle serie di Fourier

5.4.1 Normalizzazione del sistema trigonometrico

Consideriamo funzioni in $L^2([-\pi,\pi])$ a valori reali, il prodotto scalare tra due funzioni è stato definito come

$$f \cdot g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\, dt.$$

Normalizzo le funzioni del sistema trigonometrico in modo che abbiano norma 1 con questo prodotto scalare. Consideriamo ad esempio le funzioni della forma $(c * \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Osservo che

$$(\|1\|_2)^2 = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt) = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1.$$

Per $n = 1$ ottengo $f_1 = c * \cos x$, e impongo che abbia norma 1: intgrando per parti calcolo

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt = [\cos t * \sin t]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\, dt$$

e siccome il termine di bordo è nullo si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\, dt$$

e siccome $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, per la linearità degli integrali si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} 1\, dt = 2\pi$$

quindi siccome i due integrali al membro di sinistra sono uguali, ognuno di essi vale π .

Si ha quindi

$$(\|c\cos t\|_2)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c^2\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2\pi} * c^2\pi = c^2 * 1/2$$

quindi per ottenere funzioni di norma 1 pongo $c = \sqrt{2}$, in modo che un sistema ortonormale sia dato dalle funzioni della forma $(\sqrt{2}\cos(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\sqrt{2}\sin(nt))_{n\in\mathbb{N}}$.

5.4.2 Coefficienti delle serie di Fourier

Studieremo funzioni della forma:

$$\sum_{k=1}^{n}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)].$$

Dato uno spazio di Hilbert H , un elemento $x \in H$ e un sistema ortonormale E , si ha che

$$x = \sum_{e\in H}|x\cdot e| * e.$$

dove gli $|x\cdot e|$ sono i coefficienti della serie di Fourier di x .

In questo caso, presa una funzione in $L^2((-\pi,\pi))$ e il sistema ortonormale considerato precedentemente, si ha che la serie di Fourier di f è data da:

$$f = |f\cdot 1| * 1 + \sum_{k=1}^{\infty}[|f\cdot\sqrt{2}\cos(kx)| * \sqrt{2}\cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty}|f\cdot\sqrt{2}\sin(kx)| * \sqrt{2}\sin(kx)],\ \text{relazione 1}$$

Osservo che

$$|f\cdot\sqrt{2}\cos(kx)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sqrt{2}\cos(ku)\,du$$
$$|f\cdot\sqrt{2}\sin(kx)| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sqrt{2}\sin(ku)\,du$$

quindi sostituendo nella relazione 1 ottengo:

$$f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du + \sum_{k=1}^{\infty}\{[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sqrt{2}\cos(ku)\,du] * \sqrt{2}\cos(kx)$$
$$+[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sqrt{2}\sin(ku)\,du] * \sqrt{2}\sin(kx)]\}$$

e semplificando i coefficienti

$$f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,du + \sum_{k=1}^{\infty}\{[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(ku)\,du] * \cos(kx) + [\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(ku)\,du] * \sin(kx)]\}$$

quindi definisco

$$a_k = \frac{1}{\pi} * [\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\cos(ku)\,du]$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} * [\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(ku)\,du]$$

in modo tale che

$$f = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k * \cos(kx) + b_k * \sin(kx))$$

5.4.3 Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Mi chiedo quali siano le ipotesi da imporre su f per avere che s_n converge puntualmente ad f con $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione delle somme parziali della serie di Fourier, cioè

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k * \cos(kx) + b_k * \sin(kx))$$

Definizione 5.3

Una funzione si dice *continua a tratti* se f è discontinua al più in un insieme finito di punti, e se in tali punti esistono il limite destro e sinistro di f .

Definizione 5.4

Una funzione f si dice *regolare a tratti* se è continua a tratti, e se è derivabile tranne al più in un numero finito di punti, e in tali punti esistono il limite destro e sinistro del rapporto incrementale. Definisco la derivata destra in un punto x come

$$d^+f(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x^+)}{h}$$

Esempio 5.1

Data la funzione modulo, essa è continua nell'origine ma non è derivabile lì, tuttavia esistono le derivate destra e sinistra nell'origine, quindi questa è una funzione regolare a tratti.

Scrivo la serie di Fourier della funzione modulo: la funzione modulo è pari, quindi tutti i b_n sono nulli e si ha

$$f(x) = 1/2[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u|\,du] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi} |u|\cos(ku)\,du] * \cos(kx).$$

$$f(x) = [\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u\,du] + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}[2\int_0^{\pi} u\cos(ku)\,du].$$

Integro per parti:

$$\int_0^{\pi} u\cos(ku)\,du = [u/k * \sin(ku)]_0^{\pi} - 1/k\int_0^{\pi}\sin(ku)\,du$$

$$= 1/k^2[\cos(ku)]_0^{\pi} = \frac{1}{k^2}((-1)^k - 1)$$

Quindi

$$f = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}2((-1)^k - 1)$$

$$f = \pi/2 + 2/\pi * \sum_{k=1}^{\infty}((-1)^k - 1)$$

Teorema 5.4

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di periodo 2π , $f \in L^2((-\pi,\pi))$, regolare a tratti, allora $s_n(x) \to f(x)$ per ogni x punto di continuità di f e $s_n(x) \to (f(x^+) + f(x^-))/2$ nei punti di discontinuità (converge alla semisomma del limite destro e sinistro di f in x).

Per dimostrare il teorema è necessario questo lemma preliminare:

Lemma 5.2

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $y \neq 0$ vale l'uguaglianza:

$$1/2 + \cos y + \cos(2y) + \cdots + \cos(ny) = \frac{\sin((n+1/2)y)}{2\sin(y/2)}.$$

Dimostrazione (dimostrazione del lemma)

La dimostrazione è per induzione: Per $n = 0$ l'uguaglianza diventa $1/2 = 1/2$ ed è verificata.

Suppongo vera l'uguaglianza per $n - 1$, cioè suppongo che

$$1/2 + \cos y + \cos(2y) + \cdots + \cos((n-1)y)) = \frac{\sin((n-1/2)y)}{2\sin(y/2)},$$

e la dimostro per n .

Per il passo induttivo posso scrivere:

$$1/2 + \cos y + \cdots + \cos(n-1)y + \cos(ny) = \frac{\sin((n-1/2)y)}{2\sin(y/2)} + \cos(ny)$$

e facendo il denominatore comune:

$$= \frac{\sin((n-1/2)y) + \cos(ny) * 2\sin(y/2)}{2\sin(y/2)}$$

e per le formule del seno della somma di angoli:

$$= \frac{\sin(ny) * \cos(y/2) - \cos(ny) * \sin(y/2) + 2\cos(ny) * \sin(y/2)}{2\sin(y/2)}$$

$$= \frac{\sin(ny) * \cos(y/2) + \cos(ny) * \sin(y/2)}{2\sin(y/2)}$$

$$= \frac{\sin((n+1/2)y)}{2\sin(y/2)}$$

quindi la disuguaglianza è dimostrata.

Dimostrazione (dimostrazione del teorema)

Sostituendo a_k, b_k nell'espressione di s_n :

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \sum_{k=1}^{n}\{\frac{1}{\pi}[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt] * \cos(kx) + \frac{1}{\pi} * [\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt] * \sin(kx)\}$$

Scambiando integrale e sommatoria ottengo

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) * \{1/2 + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt) * \cos(kx) + \sin(kt) * \sin(kx)\}\,dt$$

il termine tra parentesi è il coseno della differenza:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) * [1/2 + \sum_{k=1}^{n}\cos((t-x)k)]\,dt]$$

Cambio di variabile: $u = t - x$, $dt = du$

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) * [1/2 + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku)]\,du$$

ma per la periodicità dell'integranda posso integrare su $(-\pi, \pi)$:

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u) * [1/2 + \sum_{k=1}^{n}\cos(ku)]\,du$$

applicando il lemma posso sostituire a $\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)$ la sua espressione:

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\,dt$$

Osservo che:

$$\frac{1}{\pi} * \int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi} * \int_0^\pi (1/2 + \cos t + \cdots + \cos(nt))\,dt$$

ma i termini con il coseno danno contributo nullo e l'integrale vale 1/2 .

Complessivamente valgono le seguenti formule:

$$1/2 = \frac{1}{\pi} * \int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\,dt, \text{ formula 1}$$
$$1/2 = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^0 \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\,dt, \text{ formula 2}$$

A questo punto verifico che s_n converge puntualmente alla semisomma valutando la differenza:

$$|s_n - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}| = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^\pi f(x+t) * \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\,dt$$
$$-\frac{f(x^+)}{2} - \frac{f(x^-)}{2}$$

spezzo l'integrale, e al posto di 1/2 uso le formule 1 e 2:

$$|s_n - \frac{f(x^+)}{2} - \frac{f(x^-)}{2}| =$$
$$\frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^0 f(x+t) * \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\,dt$$
$$+\frac{1}{\pi} * \int_0^\pi f(x+t) * \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\,dt$$
$$-f(x^-) * \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\,dt$$
$$-f(x^+) * \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((n+1/2)t)}{2\sin(t/2)}\,dt$$

Associo gli integrali con gli estremi in comune, e ottengo:

$$|s_n(x) - (f(x^+) + f(x^-))/2| = \frac{1}{\pi} * \int_0^\pi \frac{f(x+t) - f(x^+)}{2\sin(t/2)} * \sin((n+1/2)t)\,dt + \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+t) - f(x^-)}{2\sin(t/2)} \sin($$

Chiamo

$$G(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{2\sin(t/2)} & \iff 0 < t < \pi \\ 0 & \iff t = 0 \\ \frac{f(x+t) - f(x^-)}{2\sin(t/2)} & \iff -\pi < t < 0 \end{cases}$$

G può avere dei punti di discontinuità di prima specie nei traslati dei punti della forma $\xi - x$ con ξ punto di discontinuità di f .

Studio G nell'origine. Per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned} G(t) &= \frac{f(x+t) - f(x^+)}{2\sin(t/2)} \\ &= \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} * \frac{t}{2\sin(t/2)} \end{aligned}$$

In quest'ultima espressione, il limite per $t \to 0$ del primo addendo esiste per l'ipotesi sulla derivata e ha un valore finito, e il limite del secondo addendo vale 1 perché $\sin(t/2) \sim t/2$.

G sta in L^2 perché è continua a tratti.

In questo modo posso scrivere:

$$|s_n - f(x^+)/2 - f(x^-)/2| = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) * \sin((n + 1/2)t)\, dt$$

e applicando la formula della somma di seni posso spezzare l'integrale:

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) * \cos(t/2) * \sin(nt)\, dt + \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} G(t) * \sin(t/2) \cos(nt)\, dt$$

e siccome G in L^2 , anche $G(t) * \cos(t/2)$ e $G(t) * \sin(t/2)$ sono continue a tratti e stanno in L^2 .

Il primo integrale è l'n-esimo coefficiente di indice pari della serie di Fourier di $G(t) * \cos(t/2)$, e per il teorema di Riemann-Lebesgue tende a 0 e lo stesso vale per il secondo che è il coefficiente n-esimo di indice dispari della serie di Fourier di $G(t) * \sin(t/2)$.

5.5 Convergenza uniforme

Oltre alle ipotesi precedenti, richiediamo che f sia continua, e f' sia continua a tratti. Allora vale il seguente teorema:

Teorema 5.5

La successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle somme parziali della serie di Fourier converge totalmente a f in L^2 (e la convergenza totale implica quella uniforme).

Dimostrazione

Calcoliamo i coefficienti di Fourier α_k, β_k della derivata f' in funzione di quelli di f , che chiamo a_k, b_k (f' è continua a tratti quindi la sua serie di Fourier è ben definita):

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\,dt = \frac{1}{\pi}[f(\pi) - f(-\pi)] = 0$$

dove questo passaggio vale perché f è periodica, e si può integrare per la continuità di f .

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos(kt)\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\{[\cos(kt)f(t)]_{-\pi}^{\pi} + k\int_{-\pi}^{\pi} f(t) * \sin(kt)\,dt\}$$

ma il termine di bordo è nullo, quindi

$$= k/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t) * \sin(kt)\,dt = k * b_k$$

quindi $\alpha_k = kb_k$.

Analogamente

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(kt)\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\{[f(t) * \sin(kt)]_{-\pi}^{\pi} - k\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt\}$$

e il primo termine vale 0, quindi $\beta_k = -ka_k$.

Per Bessel, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 * (a_k^2 + b_k^2)$$

è una serie convergente.

Si ha

$$s_n(x) = a_0/2 + \sum_{k=1}^{n}[a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)]$$

quindi

$$|s_n| \le |a_0/2| + \sum_{k=1}^{n}(|a_k\cos(kx)| + |b_k\sin(kx)|)$$

e siccome seno e coseno sono minori di 1:

$$|s_n| \leq |a_0/2| + \sum_{k=1}^{n}[|a_k| + |b_k|], \text{ formula 1.}$$

Osservo che $a_k = 1/k * (ka_k)$ e $b_k = 1/k(kb_k)$, e sfrutto la disuguaglianza

$$|ab| \leq (a^2 + b^2)/2.$$

Allora

$$|a_k| \leq (k^2 a_k^2 + \frac{1}{k^2})/2$$
$$|b_k| \leq (k^2 b_k^2 + \frac{1}{k^2})/2$$

quindi maggiorando i termini nella sommatoria della formula 1 si ha:

$$\begin{aligned} |s_n| &\leq |a_0/2| + \sum_{k=1}^{n}[(k^2 a_k^2 + \frac{1}{k^2})/2 + (k^2 b_k^2 + \frac{1}{k^2})/2] \\ &\leq |a_0/2| + \sum_{k=1}^{n}[k^2(a_k^2 + b_k^2)/2 + 1/k^2] \\ &\leq |a_0/2| + \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2}[\alpha_k^2 + \beta_k^2] + \sum_{k=1}^{n} 1/k^2 \end{aligned}$$

e il tutto converge perché il primo addendo è la serie di Fourier delle derivate, e il secondo è una serie convergente.

Osservazione 5.3

Il lemma di Riemann-Lebesgue vale anche per funzioni di $L^1((-\pi, \pi))$ (quando la misura dello spazio su cui le funzioni sono definite è finita, come in questo caso, si ha $L^2 \subset L^1$).

Fisso $\varepsilon > 0$ e $f \in L^1$, allora esiste g continua che approssima f in norma L^1 , cioè tale che $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$. Inoltre esiste un polinomio trigonometrico p tale che $\|g - p\|_\infty \leq \varepsilon$

e quindi

$$\|g - p\|_1 \leq \|g - p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Quindi applicando la disuguaglianza triangolare $\|f - p\|_1 \leq 2\varepsilon$.

Il coefficiente di Fourier di $f - p$ è:

$$a_r = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi}\{f(t) - \sum_k [c_k \cos(kt) + v_k \sin(kt)]\} * \cos(rt)\, dt$$

$$a_r = \frac{1}{\pi} * \{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(rt)\, dt\} - \frac{1}{\pi} * \{\int_{-\pi}^{\pi} \sum_k [c_k \cos(kt) + v_k \sin(kt)] * \cos(rt)\, dt\}$$

Se $r \neq k$, il secondo addendo è nullo e si ha

$$a_r(f-p) = a_r(f).$$

purché $r > n$.

$$|a_r(f)| = |a_r(f-p)| = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f-p| \cos(rt)\, dt \leq \frac{1}{\pi} * 2\pi \|f-p\|_1 \leq 4\varepsilon$$

quindi per $r > n$, $a_r(f) < \varepsilon$, cioè vale il lemma di Riemann-Lebesgue per funzioni in L^1 .

Capitolo 6

Altri teoremi

6.1 Lo spazio L^infty

Definisco

$$\|f\|_\infty = \inf\{m \geq 0\, t.c.\, |f(x)| < m \text{ quasi ovunque}\}$$

Se non esiste nessun m nell'insieme, pongo

$$\|f\|_\infty = +\infty$$

altrimenti la norma è ben definita.

Definisco quindi lo spazio

$$L^\infty = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\text{misurabili}\, t.c.\, \|f\|_\infty < \infty\}.$$

La funzione $\|\cdot\|_\infty$ è una seminorma, ed è una norma se invece di considerare L^∞ considero lo spazio quoziente rispetto alla relazione $f \sim g$ se e solo se $f = g$ quasi ovunque.

Se considero le funzioni limitate $f : X \to \mathbb{R}$ misurabili, con $\|f\|_\infty = \sup |f|$, ottengo uno spazio vettoriale.

Osservazione 6.1

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in L^∞ . Chiamo

$$E_n = \{x\, t.c.\, |f_n(x)| > \|f_n\|_\infty\}$$
$$A_{nm} = \{x\, t.c.\, |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$$

e $\mu(A_{nm}) = 0$.

Pongo

$$A = \bigcup_n (E_n) \cup \bigcup_n (A_{nm})$$

questa è un'unione numerabile di insiemi di misura 0 quindi $\mu(A) = 0$. Lavorando sul complementare di A si può dimostrare la completezza di L^∞ .

6.2 Caratterizzazione del duale degli spazi L^p

6.2.1 Enunciato

Teorema 6.1

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura, con misura positiva e σ -finito. Allora il duale di L^p è L^q , con p, q coniugati.

Nel caso di $p = 2$, abbiamo già dimostrato che il duale di L^2 è lo spazio L^2 stesso (infatti L^2 è di Hilbert e vale il teorema di Riesz). Questo in realtà è un caso particolare di quanto avviene in generale per gli spazi L^p , perché 2 ha come coniugato se stesso.

6.2.2 Prerequisiti per la dimostrazione

Definizione 6.1

Dato uno spazio di misura $(X, \mathcal{M}, \mu)$, esso è σ -finito se $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ con $X_i \in \mathcal{M}$, e tali che $\mu(X_i) < \infty$.

Ad esempio $\mathbb{R}^n$ con la misura di Lebesgue è σ -finito essendo unione di bolle.

Si può sempre supporre che gli X_i tali che $X = \bigcup_i X_i$ siano disgiunti, definendo

$$\begin{gathered} X_1' = X_1 \\ X_2' = X_2 \setminus X_1 \\ X_3' = X_3 \setminus (X_1' \cup X_2') \\ \dots \end{gathered}$$

Definizione 6.2

Date due misure μ, ν , dico che ν è *assolutamente continua rispetto a* μ se $\mu(E) = 0$ implica $\nu(E) = 0$ dove E è misurabile.

Esempio 6.1

Misure ν assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue λ sono quelle della forma

$$\nu(E) = \int_E f \, d\lambda$$

oppure le misure che si ottengono moltiplicando la misura di Lebesgue per una costante.

In generale vale il seguente

Teorema 6.2 (teorema di Radom-Nikolin)

Se ν è assolutamente continua rispetto a μ , allora esiste $f \in L^1(\mu)$ tale che per ogni $E \in \mathcal{M}$

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu.$$

Per la dimostrazione del teorema sul duale sono necessari anche i seguenti risultati:

1. Se $f : X \to \mathbb{C}$ è misurabile, allora esiste una funzione α misurabile di modulo 1 e tale che $f = \alpha * |f|$ (basta prendere $\alpha = \frac{f}{|f|}$).
2. se μ è finita, $f \in L^1$ e S è un chiuso di $\mathbb{C}$ e le medie $\frac{1}{\mu(E)} * \int_E f \, d\mu$ appartengono a S per ogni E tale che $\mu(E) > 0$, allora $f(x) \in S$ q.o..
3. se f è misurabile e positiva, allora esiste una successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni semplici che sono crescenti e convergono puntualmente alla funzione f . Inoltre se f è limitata, allora la convergenza delle s_n è uniforme.

6.3 Dimostrazione del teorema nel caso mu(X) finito

6.3.1 Definizione del funzionale T

Dimostriamo il teorema nel caso $\mu(X)$ finito.

Sia S l'insieme delle funzioni $f : X \to \mathbb{C}$ misurabili e semplici (cioè combinazione lineare di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili).

Essendo $\mu(X) < \infty$ tra gli spazi L^p valgono le inclusioni $L^p \supset L^q$ se $p < q$.

Affermo che vale la seguente catena di inclusioni: $S \subset L^\infty \subset \cdots \subset L^1$. Infatti in particolare le funzioni semplici e misurabili sono limitate, e quindi stanno in L^∞ .

Inoltre, presa una funzione in L^∞ , allora ho una successione di funzioni semplici $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che converge uniformemente a questa funzione, cioè S è denso in L^∞ . Inoltre tutte le funzioni misurabili, semplici il cui supporto ha misura finita, sono dense negli L^p .

Fisso $p \geq 1$ **, e ne determino il duale**: se $g \in L^q$ con p, q coniugati, allora posso considerare la funzione T che ad ogni $f \in L^p$ associa $\int fg \, d\mu$.

Osservo che:

- T **è lineare**: infatti per la linearità dell'integrale

$$T(f_1 + f_2) = \int (f_1 + f_2) g \, d\mu = \int f_1 g \, d\mu + \int f_2 g \, d\mu = T(f_1) + T(f_2).$$

- T **è continuo**: infatti, ricordando la norma introdotta sul duale:

$$\|T\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|T(f)|}{\|f\|_p}$$

e si ha

$$\|T\| = \frac{|\int fg\,d\mu|}{\|f\|_p}$$

e applicando Hoelder:

$$\leq \frac{\|f\|_p * \|g\|_q}{\|f\|_p} = \|g\|_q.$$

quindi, avendo norma finita ed essendo lineare, T è continua in 0, questo implica che T è continua ovunque sempre per la linearità di T .

6.3.2 Caso di funzioni indicatrici

SIA $\Phi \in (L^P)^*$, ALLORA CERCO $G \in L^Q$ CHE RAPPRESENTA Φ (ϕ sta nel duale quindi è un funzionale lineare continuo : $L^p \to \mathbb{R}$).

Prendo il generico insieme E misurabile, considero la sua funzione caratteristica che sta in L^p , e considero $\phi(\chi_E)$, e pongo $\lambda(E) = \phi(\chi_E)$.

Mostro che λ è una misura:

Passo 1 λ **è finitamente additiva**, infatti presi A, B disgiunti, allora

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B.$$

Allora

$$\lambda(A \cup B) = \phi(\chi_{A \cup B}) = \phi(\chi_A) + \phi(\chi_B) = \lambda(A) + \lambda(B).$$

Passo 2 λ **è** σ **-additiva**, cioè se $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$ per E_i misurabili, allora

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)$$

Pongo $A_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j$ e $B_k = \bigcup_{j=k+1}^{\infty} E_j$ allora siccome i due insiemi sono disgiunti:

$$\chi_E = \chi_{A_k} + \chi_{B_k}$$

cioè

$$\chi_E - \chi_{A_k} = \chi_{B_k}$$

Osservo che per $k \to \infty$:

$$\int_X (\chi_E - \chi_{A_k})^p \to 0$$

infatti

$$\int_X (\chi_E - \chi_{A_k})^p = \int_X \chi_{B_k}^p = \int_X \chi_{B_k} = \mu(B_k) \to 0 \iff k \to \infty.$$

Allora in L^p ,

$$\chi_{A_k} \to \chi_E$$

e siccome per ipotesi ϕ è un funzionale lineare e continuo

$$\lambda(E) = \phi(\chi_E) = \lim_{k\to\infty} \phi(\chi_{A_k}) = \lim_{k\to\infty} \lambda(A_k).$$

cioè tenendo conto delle espressioni degli A_k segue la σ -additività di λ .

passo 3 **λ è assolutamente continua rispetto a** μ . Infatti, se un sottoinsieme E ha μ -misura 0, allora

$$\int \chi_E = 0, \longrightarrow \int \chi_E^p = 0$$

quindi $\chi_E = 0 \in L^p$ e siccome ϕ è lineare, $\phi(\chi_E) = 0$ cioè $\lambda(E) = 0$ quindi λ è assolutamente continua rispetto a μ .:Segue che per il teorema di Radom-Nikolin esiste $g \in L^1(\mu)$ tale che per ogni insieme E misurabile,

$$\lambda(E) := \phi(\chi_E) = \int_E g\, d\mu = \int_X \chi_E * g\, d\mu$$

Abbiamo mostrato che per ogni $E \in \mathcal{M}$, $\phi(\chi_E) = \int_X \chi_E g\, d\mu$ con $g \in L^1$.

6.3.3 Caso di funzioni generiche

Mostriamo ora che per ogni $f \in L^p$

$$\phi(f) = \int_X fg\, d\mu,\ g \in L^q, \text{ formula 1}$$

in questo modo si può infatti dedurre che al funzionale $\phi \in (L^p)^*$ **si può associare** $g \in L^q$ **.**

Abbiamo già dimostrato la formula 1 per le funzioni caratteristiche, e per linearità posso affermare che data s semplice

$$\phi(s) = \int_X sg\, d\mu$$

e la formula 1 vale anche su L^∞ (infatti se $L^p = L^\infty$, $L^q = L^1$).

Mostro la formula per gli spazi L^p :

SOTTOCASO 1: $P = 1$. In questo caso per Radom-Nikolim si ha $\phi(f) = \int_X fg\, d\mu$ con $g \in L^1$, mentre vogliamo mostrare che $g \in L^\infty$. Allora **applico il teorema delle medie per mostrare che** $g \in L^\infty$ **, e che** ϕ **coincide con** T .

Dato un funzionale lineare e continuo T , allora $|T(x)| \leq \|T\| * \|x\|$. Quindi

$$|\phi| = |\int_X \chi_E g\, d\mu| \leq \|\phi\| * \|\chi_E\|_p = \|\phi\| * \mu(E)$$

cioè

$$\frac{1}{\mu(E)}|\int_E g\, d\mu| \leq \|\phi\|$$

allora per ogni E con misura positiva, la media appartiene a una circonferenza, allora per il teorema delle medie

$$|g(x)| \leq \|\phi\| q.o.$$

Allora

$$\|g\|_\infty \leq \|\phi\|$$

quindi $g \in L^\infty$. Inoltre i funzionali T e ϕ coincidono su L^∞ per il punto precedente, e siccome L^∞ è denso in L^1 , coincidono anche su L^1 , inoltre per Hoelder $\|T\| = \|\phi\| \leq \|g\|_\infty$, e siccome valgono le due disuguaglianze, $\|\phi\| = \|g\|_\infty$, cioè a ogni funzione in $(L^1)^*$ si può associare $g \in L^\infty$ che la rappresenti.

SOTTOCASO 2: $P > 1$. Per quanto dettto prima, possiamo scrivere $\phi(f) = \int_X fg\, d\mu$ per ogni $f \in L^\infty$, con $g \in L^1$.

Sia $E_n = \{x\, t.c.\, |g(x)| \leq n\}$, allora gli E_n sono misurabili e crescenti. Introduco la funzione α misurabile di modulo 1 e tale che $g = \alpha|g|$. Pongo $f = \chi_{E_n} * \alpha g^{q-1} \in L^\infty$, allora posso usare la rappresentazione di ϕ su funzioni di L^∞ e scrivere:

$$\begin{aligned}\phi(f) &= \int_X fg\, d\mu = \int_X \chi_{E_n}|g|^{q-1}\alpha g\, d\mu \\ &= \int_{E_n} |g|^q\, d\mu \leq \|\phi\| * \|f\|_p, \text{ formula 2}\end{aligned}$$

Osservo poi che

$$\int_X |f|^p\, d\mu = \int_{E_n} |f|^p\, d\mu = \int_{E_n} (|g|^{q-1})^p\, d\mu$$

ma $pq - p = q$, quindi

$$= \int_{E_n} |g|^q\, d\mu$$

cioè **ho mostrato che su** E_n $\int |f|^p$ **e** $\int |g|^q$ **coincidono**. Quindi sostituendo $\int_{E_n} |f|^p$ con $\int_{E_n} |g|^q$ nel secondo membro della formula 2 ottengo:

$$\int_{E_n} |g|^q\, d\mu \leq \|\phi\| * (\int_{E_n} |g|^q\, d\mu)^{1/p}$$

e dividendo per $(\int_{E_n} |g|^q)^{1/p}$ ottengo

$$(\int_{E_n} |g|^q \, d\mu)^{1/q} \leq \|\phi\|$$

cioè

$$\int_X \chi_{E_n} |g|^q \, d\mu \leq \|\phi\|$$

e siccome gli E_n sono crescenti, $\chi_{E_n} g^q \uparrow g^q$ allora applico il teorema di convergenza monotona e ottengo

$$\|g\|_q \leq \|\phi\|$$

cioè $g \in L^q$.

6.4 Teorema di Banach-Steinhaus

6.4.1 Densità di un insieme in uno spazio metrico

Proposizione 6.1

In uno spazio metrico X , $A \subset X$ è denso se e solo se per ogni $U \neq \emptyset$ aperto, $U \cap A \neq \emptyset$.

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: supponiamo che A sia denso in X . Se $U \cap A$ fosse vuoto, si avrebbe $A \in U^c$, e quindi $\bar{A} \in U^c$, ma A è denso quindi $\bar{A} = X$. Si ha quindi $X \subset U^c$ e questo è assurdo perché U è non vuoto.

$2 \longrightarrow 1$: supponiamo che per ogni U aperto non vuoto, $U \cap A \neq \emptyset$. Supponiamo per assurdo che A non sia denso in X , allora l'insieme $U = X \setminus \bar{A}$ è non vuoto, inoltre è un aperto essendo complementare di un chiuso. Allora per l'ipotesi si deve avere $U \cap A \neq \emptyset$, cioè $(X \setminus \bar{A}) \cap A = (\bar{A})^c \cap A \neq \emptyset$, ma questo non può avvenire e si ha una contraddizione. Allora necessariamente U è vuoto cioè $X = \bar{A}$ e A è denso in X .

6.4.2 Teorema di Baire

Definizione 6.3

Dato uno spazio metrico (X, d) , un sottoinsieme di X che si scrive come intersezione numerabile di aperti è detto G_δ , mentre un insieme che si scrive come unione numerabile di chiusi è chiamato F_σ .

Teorema 6.3 (teorema di Baire)

Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti densi. Allora $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ è densa in X .

Dimostrazione

Vogliamo dimostrare che $\bigcap_n V_n$ è densa. Sia D aperto non vuoto, e **mostro che** $D \cap \bigcap_n V_n \neq \emptyset$. Considero $C_1 = V_1 \cap D$, allora C_1 è non vuoto per la densità di V_1 allora conterrà un punto x_1 , inoltre C_1 è aperto essendo intersezione di aperti allora esiste $r_1 > 0$ tale che $B(x_1, r_1) \subset C_1$, e posso anche supporre $\bar{B}(x_1, r_1) \subset \bar{A}$ (se questo non avviene basta ridurre r_1). Infine posso supporre $r_1 < 1$.

Considero poi $C_2 = \bar{B}(x_1, r_1) \cap V_2$, allora come prima C_2 è un aperto non vuoto quindi esistono $x_2 \in C_2$ e $r_2 > 0$ tali che $\bar{B}(x_2, r_2) \subset C_2$, e posso supporre $r_2 < 1/2$.

Procedo induttivamente: considero $C_{n+1} = \bar{B}(x_n, r_n) \cap V_{n+1}$ e siccome V_{n+1} è denso l'intersezione è non vuota e conterrà un punto x_{n+1} , inoltre l'intersezione è aperta allora esiste una bolla $B(x_{n+1}, r_{n+1})$ contenuta nell'intersezione, con $r_{n+1} < \frac{1}{n+1}$.

Mostro che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **è di Cauchy**: Le bolle $B_n = B(x_n, r_n)$ sono una contenuta nell'altra all'aumentare di n . Fissato i , se prendo $m, n > i$, si ha che $x_n \in B_i$, $x_m \in B_i$, allora

$$d(x_n, x_m) \leq 2r_i < \frac{2}{i}$$

allora la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Siccome X è completo, $x_n \to x$ per un certo $x \in X$. Gli x_n appartengono definitivamente alle bolle B_i e quindi a D che contiene tutte le bolle; segue anche che $x \in \bigcap_i B_i \subset \bigcap_n V_n$, allora

$$\bigcap_n V_n \cap D \supset \{x\} \neq \emptyset$$

e vale la tesi.

Il teorema di Baire è anche una conseguenza del teorema di Cantor: le chiusure delle bolle infatti sono chiusi uno contenuto nell'altro, il cui diametro tende a 0, come nelle ipotesi del teorema di Cantor.

Il teorema di Baire vale anche in spazi localmente compatti o separati.

6.4.3 Funzioni inferiormente e superiormente continue

Consideriamo funzioni $f : X \to \mathbb{R}$, con f continua. f è continua in x_0 se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $V = U(x_0)$ tale che per ogni $x \in V$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, o equivalentemente

$$f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon, \wedge f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon.$$

In particolare, se per ogni $\varepsilon > 0$ vale la condizione $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$ si ha la *semicontinuità superiore* di f ; se vale la condizione $f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$ si ha la *semicontinuità inferiore* di f .

Allora una funzione è continua se è semicontinua contemporaneamente inferiormente e superiormente.

f è semicontinua inferiormente in x_0 se per ogni $\lambda < f(x_0)$ esiste $V = U(x_0)$ tale che per ogni $x \in V$, $f(x) > \lambda$.

Lemma 6.1

f è semicontinua inferiormente se e solo se per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $f^{-1}((\lambda, +\infty))$ è aperto.

(la semicontinuità superiore si caratterizza con l'apertura delle controimmagini delle semirette $(-\infty, \lambda)$, mentre la continuità con l'apertura delle controimmagini degli intervalli aperti)

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: Supponiamo f semicontinua inferiormente; sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in f^{-1}((\lambda, +\infty))$. Allora $f(x_0) > \lambda$, e quindi esiste $V = U(x_0)$ tale che per ogni $x \in V$, $f(x) > \lambda$, e questo significa che $V \subset f^{-1}((\lambda, +\infty))$, cioè $f^{-1}((\lambda, +\infty))$ è aperto perché contiene un intorno di ogni suo punto.

$2 \longrightarrow 1$: supponiamo che per ogni λ $f^{-1}((\lambda, +\infty))$ è aperto. Fisso $x_0 \in X$ e mostro che f è semicontinua in x_0 . Scelgo $\lambda < f(x_0)$, allora $x_0 \in f^{-1}((\lambda, +\infty))$, allora per l'apertura della controimmagine esiste $V = U(x_0)$ tale che $V \subset f^{-1}((\lambda, +\infty))$, e quindi $f(x) > \lambda$ per ogni $x \in V = U(x_0)$ ma questa è proprio la definizione di semicontinuità inferiore.

6.4.4 Sup di funzioni semicontinue inferiormente

Il sup di funzioni semicontinue inferiormente è ancora semicontinuo inferiormente, e analogamente l'inf di funzioni continue superiormente è ancora continuo superiormente

(questo non vale per la continuità). Più precisamente vale il seguente lemma:

Lemma 6.2

Sia I un insieme di indici e supponiamo di avere una famiglia $(f_i)_{i \in I}$ di funzioni semicontinue inferiormente, e chiamo $f = \sup f_i$ (questo vuol dire che per ogni x , $f(x) = \sup_i f_i(x)$). Allora f è ancora semicontinua inferiormente.

Dimostrazione

Prendo un punto x_0 e $\lambda < f(x_0) = \sup_i f_i(x_0)$, allora esiste i t.c. $\lambda \leq f_i(x_0) \leq f(x_0)$.

Ma f_i è semicontinua inferiormente in x_0 , allora esiste $V = U(x_0)$ tale che per ogni $x \in V$, $\lambda < f_i(x) \leq f(x)$, cioè f è semicontinua inferiormente.

Teorema 6.4

Sia (X, d) uno spazio metrico completo, e $(f_i)_{i\in I}$ una famiglia di funzioni semicontinue inferiormente, con $f_i : X \to \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $x \in X$, $\sup_i f_i(x)$ sia limitato, cioè per ogni x esiste una costante m_x tale che

$$\sup_i f_i(x) \leq m_x.$$

Allora esiste U aperto ed esiste $m > 0$ tale che per ogni $x \in U$ e per ogni $i \in I$, $f_i(x) \leq m$.

(si passa dalla limitatezza puntuale alla limitatezza uniforme)

Dimostrazione

Poniamo $f = \sup_i f_i$, allora f è semicontinua inferiormente per il lemma precedente. Chiamo $V_n = f^{-1}((n, +\infty))$, che è aperto per la semicontinuità inferiore di f . Considero

$$V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{x\, t.c.\, f(x) > n,\, \forall n\}$$

ma, per l'ipotesi di limitatezza puntuale di f , quest'insieme è vuoto (infatti per ogni x esiste m_x tale che $f(x) < m_x$, e quindi, per $n > m_x$ non può valere la condizione $f(x) > n$).

Allora $V = \bigcap_n V_n = \emptyset$ non è densa, e quindi, siccome i V_n sono aperti, dal teorema di Baire segue che esiste un $\bar{n}$ tale che $V_{\bar{n}}$ non è denso in X , e quindi esiste un aperto non vuoto U tale che $U \cap V_{\bar{n}} = \emptyset$.
Questo implica che, per ogni $x \in U$, $f(x) \leq \bar{n}$ (infatti $x \notin V_{\bar{n}}$). Ma per definizione $f(x) = \sup_i f_i(x)$, quindi per ogni $x \in U$, $f_i(x) < m = \bar{n}$ e vale la tesi.

6.4.5 Principio di limitatezza uniforme (teorema di Banach-Steinhaus)

Il teorema precedente si può applicare anche al caso di spazi di Banach.

Teorema 6.5

Sia X uno spazio di Banach, e $(f_i : X \to Y)_{i\in I}$ una famiglia di applicazioni lineari con Y spazio normato. Allora vale l'alternativa:

1. esiste una costante $m > 0$ tale che $\sup_i \|f_i\| \leq m$;
2. esiste G intersezione numerabile di aperti, denso in X tale che per ogni $x \in G$, $\sup_i \|f_i(x)\| = +\infty$.

Dimostrazione

Definisco $g_i(x) = \|f_i(x)\|_Y$, allora le g_i sono semicontinue. Pongo $\phi = \sup_{i\in I} \|f_i(x)\|_Y$, allora ϕ è semicontinua inferiormente.

Definisco l'aperto

$$V_n = \phi^{-1}((n, +\infty)) = \{x \in X\, t.c. \phi(x) > n\}.$$

Allora possono verificarsi due casi:

1. PER OGNI N , V_N È DENSO. Quindi per il teorema di Baire posso asserire che V_n è il G_δ che soddisfa l'alternativa 2.
2. ESISTE $\bar{N}$ TALE CHE $V_{\bar{N}}$ NON È DENSO. Allora, come prima, esisterà U aperto non vuototale che $U \cap V_{\bar{n}} = \emptyset$. U è aperto e non vuoto, quindi segue che esistono $x_0 \in U$ e $r > 0$ tali che $B(x_0, r) \subset U$. Inoltre $B(x_0, r) \cap U_{\bar{n}} = \emptyset$, allora per ogni $x \in B(x_0, r)$, si ha $x \notin V_{\bar{n}}$ quindi $\phi(x) < \bar{n}$, ma $\phi = \sup_i \|f_i\|$, e quindi per ogni i ,

$$\|f_i(x)\| \le \bar{n}, \text{ formula 1.}$$

Mostro che la condizione $\|f_i(x)\| < m = \bar{n}$ **non vale solo in** $B(x_0, r)$ **ma anche nel traslato di questa bolla nell'origine**.Prendo $x \in B(0, r)$ allora

$$f_i(x) = f_i(x_0 + x - x_0) = f_i(x_0 + x) - f_i(x_0)$$

dove l'ultimo passaggio vale per linearità delle f_i , e per subadditività della norma, si ha:

$$\|f_i(x)\| \le \|f_i(x_0 + x)\| + \|f_i(x_0)\| \le 2\bar{n}, \forall x \in B(0, r), \text{ formula 2}$$

infatti $x_0 + x, x_0 \in B(x_0, r)$ e vale la formula 1.**Definisco un'omotetia**: Per $z \neq 0 \in X$, il punto $y = \frac{rz}{2\|z\|} \in B(0, r)$, infatti la sua norma è minore di $r/2$. Allora applicando la formula 2 a y :

$$\|f_i(y)\| = \|f_i(\frac{zr}{2\|z\|})\| \le 2\bar{n}$$

e per linearità di f_i :

$$\|f_i(z)\| \frac{r}{2\|z\|} \le 2\bar{n}$$

$$\frac{\|f_i(z)\|}{\|z\|} \le \frac{4\bar{n}}{r}$$

e questa disuguaglianza vale per ogni i e per ogni z , allora passando al sup:

$$\sup \frac{\|f_i(z)\|}{\|z\|} \le \frac{4\bar{n}}{r}$$

cioè, per la definizione di norma di un'applicazione lineare:

$$\|f_i\| \le m = \frac{4\bar{n}}{r}$$

6.4.6 Applicazione del teorema di Baire

Dato un insieme X F_σ , che si scrive come unione numerabile di chiusi, allora il suo complementare è un G_δ , infatti, se considero insiemi $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chiusi,

$$X = \bigcup_n F_n, \longrightarrow X^c = (\bigcup_n F_n)^c = \bigcap_n F_n^c$$

cioè X^c può essere scritto come intersezione numerabile di aperti.

Esempio 6.2

$\mathbb{Q}$ è un F_σ perché può essere scritto come unione numerabile dei suoi punti, quindi $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ è G_δ .

Esiste una metrica sugli irrazionali, per cui la topologia indotta è quella euclidea e per cui lo spazio diventa completo.

Proposizione 6.2

$\mathbb{Q}$ non è un G_δ .

Dimostrazione

Sia $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un'enumerazione dei razionali, e supponiamo per assurdo che $\mathbb{Q} = \bigcap_n V_n$ dove i V_n sono aperti densi. Definisco gli insiemi $W_n = V_n \smallsetminus \bigcup_{k=1}^n x_k$, allora W_n è ancora aperto (complementare di un chiuso) e denso. Si ha però che $\bigcap_n W_n = \emptyset$, e per il teorema di Baire questo implica che esisterà un indice $\bar{n}$ tale che $W_{\bar{n}}$ non sia denso, assurdo!

Con un ragionamento analogo si dimostra il seguente teorema:

Teorema 6.6

Sia (Z, D) uno spazio metrico completo senza punti isolati, e sia $E \subset Z$ numerabile e denso, allora E non può essere un G_δ .

Corollario 6.1

Un sottoinsieme G_δ denso di uno spazio metrico completo senza punti isolati deve essere non numerabile.

Esempio 6.3

Considero la successione $Z = 0 \cup (1/n)_{n\in\mathbb{N}}$. Questo è un sotoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$, ma in questo caso vale il teorema di Baire: la differenza rispetto al caso $E = \mathbb{Q}$ è che Z è compatto e quindi completo.

6.5 Applicazioni del principio di limitatezza uniforme

6.5.1 Applicazione 1 Banach-Steinhaus

Osservazione 6.2

Considero la successione $f_n : [0,1] \to [0,1]$, tale che $f_n = x^n$, allora

$$f(x) = \lim_n f_n(x) = \begin{cases} 0 & \iff x < 1 \\ 1 & \iff x = 1 \end{cases}$$

quindi il limite puntuale di funzioni continue non è necessariamente continuo.

Teorema 6.7 (teorema di Banach-Steinhaus)

Sia X uno spazio di Banach e Y normato, sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni lineari e continue, con $A_n : X \to Y$, e supponiamo che per ogni x , la successione $A_n(x)$ sia convergente. Detta $A : X \to Y$ tale che $x \mapsto \lim_n A_n(x)$, segue che A è lineare e continua e $\sup_n \|A_n\|$ è limitato.

Dimostrazione

A **è lineare**, infatti

$$A(x+y) = \lim_n A_n(x+y) = \lim_n [A_n(x) + A_n(y)]$$

e siccome il limite esiste applico il teorema del limite della somma:

$$= \lim_n A_n(x) + \lim_n A_n(y) = A(x) + A(y)$$

Affermo che esiste m positiva tale che per ogni m , $\|A_n\| \leq m$: infatti applicando il principio di limitatezza uniforme, si verifica necessariamente questa possibilità perché la seconda alternativa è esclusa per l'ipotesi che $A_n(x)$ converge (infatti se questo avviene il sup delle norme non può essere $+\infty$).

Mostro che A **è continua**: devo verificare che $\|A\|$ è limitata:

$$\begin{aligned} \|A\| = \sup_{x\in B_{0,1}} \|A(x)\| &= \sup_{x\in B_{0,1}} [\|A(x) + A_n(x) - A_n(x)\|] \\ &\leq \sup_{x\in B_{0,1}} [\|A(x) - A_n(x)\| + \|A_n(x)\|] \\ &\leq \sup_{x\in B_{0,1}} [\|A(x) - A_n(x)\| + \|A_n\| * \|x\|] \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio vale per come è definita la norma di un'applicazione lineare. Ma siccome sto consoderando $x \in B_{0,1}$, $\|x\| < 1$ quindi

$$\leq \sup_{x\in B_{0,1}} [\|A_x - A_n(x)\| + \|A_n\|]$$

ma $\|A_n\| \leq M$ per quanto detto prima, e $\|A_n - A\|$ è limitata perché $A_n \to A$, quindi $\|A\|$ è continua.

6.5.2 Conseguenze

Teorema 6.8

Considero una successione reale e due indici p, q coniugati, cioè tali che $1/p+1/q = 1$, e supponiamo che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

converge per ogni $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ e appartenente a L^q . Allora $x \in L^p$.

Dimostrazione

Sia $A_n : L^q \to \mathbb{R}$ lineare tale che $A_n(y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$. Si può mostrare che A_n è lineare e continua, e valutare $\|A_n\|$. Per ogni y ,

$$A_n(y) \to \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k = A(y).$$

A è lineare e $(A_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge e quindi si può applicare Banach-Steinhaus, da cui segue che A è continua. Allora $A \in (L^q)^* = L^p$, e dato un elemento $A(y)$ nel duale, esiste uno e un solo elemento $x \in L^p$ che lo rappresenta.

6.5.3 Applicazione 2 serie di Fourier

Considero $C(T)$ insieme delle funzioni $f : T \to \mathbb{C}$ continue, con la norma del sup. Allora $C(T)$ è uno spazio di Banach. Definendo i coefficienti

$$C_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

la serie di Fourier di f è data da

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ikx}$$

Si ha anche che

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikx}$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) * \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}\, dt$$

La funzione $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$ è detta *nucleo di Dirichlet.*

$$\delta_n(t) = 1 + e^{it} + e^{-it} + e^{2it} + e^{-2it} + \cdots + e^{int} + e^{-int}$$
$$= 1 + (\cos t + i \sin t + \cos t - i \sin t) + \cdots + \cos(nt) + i \sin(nt) + \cos(nt) - i \sin(nt)$$
$$= 1 + 2\cos t + \cdots + 2\cos(nt)$$
$$= 2 * (1/2 + \cos t + \cdots + \cos(nt))$$

e per un lemma dimostrato precedentemente:

$$= 2 * \frac{\sin((n + 1/2)t)}{2\sin(t/2)} = \frac{\sin((n + 1/2)t)}{\sin(t/2)}.$$

D_n è continua e pari.

In definitiva

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) * D_n(x - t)\, dt$$

in particolare

$$S_n(f, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) * D_n(-t)\, dt$$

e siccome D_n è pari:

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) * D_n(t)\, dt = A_n$$

dove A_n è la funzione che associa a una funzione f la somma parziale ridotta della sua serie di Fourier traslata nell'origine, ed è lineare. Inoltre A_n è continua.

Mostro che $|A_n(x)|$ non converge puntualmente.

$$|A_n(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| * |D_n(t)|\, dt$$
$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f\|_\infty |D_n(t)| dt$$

quindi

$$\frac{|A_n(f)|}{\|f\|_\infty} = \|A_n\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n|(t)\, dt = \|D_n\|_1$$

Mostro che per $n \to \infty$, $\|D_n\|_1 \to \infty$.

Si può dimostrare che $S^* = \sup_n |S_n(f,0)| = +\infty$ su un G_δ denso, allora la serie di Fourier non può convergere. $C(T)$ è uno spazio di Banach e non ha punti isolati, quindi un G_δ denso deve avere una cardinalità superiore al numerabile.

$$\begin{aligned}\|D_n(t)\|_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)t)}{|\sin(t/2)|}\,dt\end{aligned}$$

e siccome $D_n(t)$ è una funzione pari:

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}\,dt$$

Il seno è sempre maggiore dell'arco, quindi

$$\geq \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin((n+1/2)t)|}{t}\,dt$$

e ponendo $s = (n+1/2)t$:

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi} |\sin s|/s\,ds \\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin s}{s}\,ds \\ &\geq \frac{2}{\pi}\sum_k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin s|}{(k+1)\pi}\,ds\end{aligned}$$

e minorando il denominatore:

$$\begin{aligned} &\geq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin s|\,ds \\ &= \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

e quindi la serie diverge per $n \to \infty$.

Quindi $\|D_n\| \to \infty$.

Mostro che vale l'uguaglianza $\|A_n\| = \|D_n\|$. Da questo segue che la famiglia degli $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non è equilimitata, e quindi deve esistere un G_δ denso tale che per ogni funzione f nel G_δ , la serie di Fourier di f nell'origine non converge.

Per mostrare l'uguaglianza, è necessario studiare il segno di

$$D_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)},\ t \in [-\pi,\pi].$$

Siccome D_n è pari, studio solo il segno per $t \in [0, \pi]$ e in particolare studio il segno del numeratore:

$$\sin(n + 1/2t) = 0$$
$$(n + 1/2)t = \pi$$
$$t = \frac{2\pi}{2n + 1}$$

quindi

1. Per $n = 1$, il nucleo si annulla solo in $2\pi/3$ (infatti il valore successivo $4\pi/3$ è fuori dall'intervallo).
2. Per $n = 2$, gli zeri sono $t_1 = 2\pi/5, t_2 = 4\pi/5$, e i punti successivi non rientrano nell'intervallo.
3. Per $n = 3$, gli zeri sono $t_1 = 2\pi/7, t_2 = 4\pi/7, t_3 = 6\pi/7$.

Considero la funzione

$$G_n(t) = \begin{cases} 1 & \iff D_n(t) \geq 0 \\ -1 & \iff D_n(t) < 0 \end{cases}$$

(Ad esempio, nel caso $n = 2$, siccome D_n è inizialmente positivo per $t > 0$, segue che G è positiva tra 0 e $2\pi/5$, è negativa tra $2\pi/5$ e $4\pi/5$ e positiva dopo $4\pi/5$.)

Esiste una successione di funzioni continue di norma minore o uguale a 1, tali che

Inoltre

$$\lim_j A_n(f_j) = \lim_j \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_j(t) D_n(t)\, dt$$

e per il teorema di convergenza dominata, siccome $f_j(t) < 1$:

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_n(t) D_n(t)\, dt$$
$$= \|D_n\|_1$$

Possiamo concludere che esiste E G_δ denso tale che per ogni $f \in E$, non è vero che $D_n(f, 0)$ converge.

In realtà, la scelta di $x = 0$ serviva solo per semplificare i conti. Si ha però che per ogni x , esiste un insieme E_x G_δ denso tale che per ogni f in questo insieme, $S_n(f, x) \not\to f(x)$.

Considero una successione $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ densa in $[-\pi, \pi]$, allora per ogni i esiste $E_{x_i} \subset C(T)$ tale che per ogni $f \in E_{x_i}$ la serie non converge in x_i . Considero l'intersezione

$$E = \bigcap_i E_{x_i}$$

ogni E_{x_i} è un G_δ denso, quindi anche E , che è un'intersezione numerabile di aperti densi, è G_δ denso per il teorema di Baire.

$$S^*(f,x) = \sup_n |S_n(f,x)|$$

Come funzione di x , $S_n(f,x)$ è continua. Allora

$$G = \{x \, t.c. \, S^*(f,x) = +\infty\}$$

è un G_δ , perché S^* è semicontinua inferiormente in x , ed è anche denso perché intersezione di aperti densi.

Conclusione: Esistono $E \subset C(T)$ G_δ denso e $G \subset \mathbb{R}$ G_δ denso tali che per ogni $f \in E$ e per ogni $x \in G$, allora la serie di Fourier $S_n(f,x) \not\to f(x)$.

6.6 Teorema dell'applicazione aperta

6.6.1 Parte interna di un insieme

Se Z è uno spazio topologico e $A \subset Z$, allora SA è l'unione di tutti gli aperti di Z contenuti in A : in particolare vale la seguente formula

$$SA = (\overline{A^c})^c.$$

Dimostrazione

Inclusione 1: $\overline{A^c}^c \subset SA$. $A^c \subset \overline{A^c}$, e passando al complementare

$$A \supset \overline{A^c}^c$$

ma siccome $(\overline{A^c})^c$ è aperto, segue che $(\overline{A^c})^c \subset SA$.

Inclusione 2: $SA \subset (\overline{A^c})^c$. Considero U aperto contenuto in A , mostro che $U \subset \overline{A^c}^c$.

$$U \subset A \longrightarrow U^c \supset A^c$$
$$\overline{U^c} = U^c \supset \overline{A^c}$$

e passando nuovamente al complementare

$$U \subset \overline{A^c}^c$$

Corollario 6.2

$SA = \emptyset$ implica A^c denso.

Dimostrazione

$SA = \emptyset$ implica $(\overline{A^c})^c = \emptyset$ e quindi $\overline{A^c} = X$.

Corollario 6.3

Sono equivalenti queste due formulazioni:

1. se U_n è una successione di aperti densi, allora $\bigcap_n U_n \neq \emptyset$
2. se F_n è una successione di chiusi tali che $\bigcup_n F_n = X$, allora deve esistere n tale che $SF_n \neq \emptyset$.

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: Considero una successione di chiusi $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $\bigcup_n F_n = X$. Allora passando al complementare

$$\bigcap_n F_n^c = \emptyset$$

Siccome per ipotesi vale la condizione 1, cioè un'intersezione di aperti densi è sempre diversa dal vuoto, esisterà un $\bar{n}$ tale che $F_{\bar{n}}^c$ non sia denso, e quindi, per il corollario precedente, si ha $SF_{\bar{n}} \neq \emptyset$.

$2 \longrightarrow 1$: consideriamo una famiglia di aperti densi $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e definiamo gli insiemi $(F_n = U_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ che sono chiusi. Siccome gli $F_n^c = U_n$ sono densi, per il corollario precedente $SF_n = \emptyset \forall n$. Siccome deve valere la condizione 2 e non esiste n tale che $SF_n \neq \emptyset$, deve verificarsi che

$$\bigcup_n F_n \neq X$$

e passando al complementare

$$\bigcap_n F_n^c = \bigcap_n U_n \neq \emptyset.$$

6.6.2 Altri risultati preliminari

Se X è normato, fisso $a \in X$ allora l'applicazione $T_a(x) = a + x$ è un omeomorfismo. Infatti sappiamo che è iniettiva e suriettiva, e **dimostriamo che è continua** (se questo avviene, l'inversa sarà necessariamente continua): se $x_n \to x$, $T_a(x_n) = a + x_n \to a + x = T_a(x)$.

Inoltre, se c è uno scalare diverso da 0, allora l'applicazione $N_c(x) = cx$ è un omeomorfismo. Infatti è iniettiva e suriettiva, è continua (segue dal'omogeneoità della norma) e l'inversa è un omeomorfismo.

Proposizione 6.3

Dati $A, B \subset X$, allora vale che

$$\bar{A} - \bar{B} \subset \overline{A - B}$$

dove $A - B = \{a - b,\, a \in A, b \in B\}$.

Dimostrazione

Prendo $x \in \bar{A}, y \in \bar{B}$, allora dato $x \in \bar{A}$ esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bar{A}$ tale che $a_n \to x$, inoltre dato $y \in \bar{B}$ esiste una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \bar{B}$ tale che $b_n \to y$. Allora:

$$x - y = \lim_n a_n - \lim_n b_n = \lim_n (a_n - b_n)$$

dove $a_n - b_n$ è una successione di elementi in $A - B$, quindi $\bar{A} - \bar{B} \in \overline{A - B}$.

In generale non vale l'uguaglianza.

Non è vero che $\bar{A} + \bar{B} \subset \overline{A + B}$.

Esercizio 6.1

Dimostrare che se sommo un compatto K e un chiuso F , allora la somma $F + K$ è chiusa.

6.6.3 Teorema dell'applicazione aperta

Definizione 6.4

Una funzione si dice *aperta* se l'immagine di un aperto è aperta.

Teorema 6.9 (teorema dell'applicazione aperta)

Considero X, Y di Banach, e $T : X \to Y$ continua. Allora è aperta.

Dimostrazione

Definisco $U_r = U(0_X, r) \subset X$ e $V_t = V(0_Y, t)$. Divido la dimostrazione in tre passi.

PASSO 1: *affermo che è aperta se e solo se per ogni r positivo, esiste t positivo tale che $V_t \subset T(U_r)$ (condizione $*$).*

$1 \longrightarrow 2$: se è aperta, allora $T(U_r)$ è un aperto, e siccome $T(0) = 0$ per linearità, allora $0_Y \in T(U_r)$ e deve esistere $t > 0$ tale che $V_t \subset T(U_r)$, cioè vale 2.

$2 \longrightarrow 1$: Viceversa, supponendo che valga 2, mostro che se G è aperto in X , allora $T(G)$ è aperto in Y . Considero $y \in T(G)$, e cerco un intorno di questo punto contenuto in $T(G)$. Si avrà

$$y = T(x),\, x \in G$$

ma G è un aperto, allora esiste $r > 0$ tale che $x + U_r \subset G$, e quindi

$$T(x + U_r) \subset T(G)$$

quindi

$$y + T(U_r) \subset T(G)$$

allora per la condizione 2 $y + V_t \in T(G)$ e quindi G è un intorno aperto di y .

PASSO 2: *mostro che per ogni* $r > 0$ *fissato esiste* $t > 0$ *tale che* $V_t \subset T(\bar{U}_r)$.
Fisso r e considero $r/2$, affermo che $U_{r/2} - U_{r/2} \subset U_r$, infatti prese $x, y \in U_{r/2}$

$$\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq r/2 + r/2 = r$$

Inoltre

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU_{r/2}$$

Allora

$$T(X) = Y = \bigcup_n T(nU_{r/2}) = \bigcup_n nT(U_{r/2})$$

quindi a maggior ragione

$$= \bigcup_n \overline{nT(U_{r/2})} = \bigcup_n n\overline{T(U_{r/2})}$$

dove l'ultimo passaggio vale perché la moltiplicazione per n è un omeomorfismo, e anche per il fatto che se f è continua $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Siccome questa è un'unione di chiusi, per la conseguenza del teorema di Baire, deve esistere r tale che $ST(U_{r/2}) \neq \emptyset$.
Allora

$$\overline{T(U_r)} \supset \overline{T(U_{r/2}) - T(U_{r/2})} \supset \overline{T(U_{r/2})} - \overline{T(U_{r/2})} \supset W - W$$

ma $W - W$ contiene lo 0 ed è aperto, perché

$$W - W = \bigcup_{z \in W} (W - z)$$

e i $W - z$ sono aperti essendo i traslati di un aperto, quindi $W - W$ è un intorno aperto dell'origine, e deve esistere t tale che $V_t \subset W - W$, e quindi per la catena di inclusioni precedente
$U_t \subset \overline{T(U_r)}$.

PASSO 3: *Ora mostro la condizione* $*$ *che per il primo passo è equivalente alla tesi.* Fisso $r > 0$, e applichiamo il passo 2 a $t/2$, cioè esiste $t_0 > 0$ tale che $V_{t_0} \subset \overline{T(U_{r/2})}$. Mostriamo che il passo 2 implica che $V_{t_0} \subset T(U_r)$.

Fisso $y \in V_{t_0}$ e cerco $x \in U_r$ tale che $T(x) = y$.

Pongo $\varepsilon_0 = r/2$, e sia $(\varepsilon_i)_{i=1}^{\infty}$ una successione di numeri reali positivi tali che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < r/2.$$

Per il passo 2, per ogni ε_i esiste t_i tale che $U_{t_i} \subset \overline{T(U_{\varepsilon_i})}$ e tali che

$$\lim_{i \to \infty} t_i = 0.$$

Considero $y \in V_{t_0} \subset \overline{T(U_{\varepsilon_0})}$ (cioè in $\overline{T(U_{r/2})}$ infatti $\varepsilon_0 = r/2$). Esiste $x_0 \in U(\varepsilon_0)$ tale che

$$\|y - T(x_0)\| < t_1$$

infatti y è arbitrariamente vicino a $T_{U_{\varepsilon_0}}$.

cioè $y - T(x_0) \in V_{t_1}$, e siccome $V_{t_1} \subset \overline{T(V_{\varepsilon_1})}$, allora $y - T(x_0) \in \overline{T(V_{\varepsilon_1})}$.

Ripetendo il ragionamento precedente, siccome $x_0 - T(x_0)$ è arbitrariamente vicino a $T(U_{\varepsilon_1})$ esiste $x_1 \in U_{\varepsilon_1}$ tale che

$$\|y - T(x_0) - T(x_1)\| < t_2$$

Per induzione, ho costruito una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ tale che $x_n \in U_{\varepsilon_n}$, e

$$\|y - T(x_0) - T(x_1) - \cdots - T(x_n)\| \leq t_{n+1}$$

ma per linearità di l'ultima condizione si riscrive come:

$$\|y - T(x_0 + x_1 + \cdots + x_n)\| \leq t_{n+1}$$

Poniamo $z_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n \forall n \in \mathbb{N}$, e **mostro che** $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **è di Cauchy** (siccome X è di Banach da questo seguirà che z_n converge).

$$\|z_n - z_m\| = \|x_{m+1} + \cdots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \cdots + \|x_n\|,$$

ma per costruzione ogni x_i appartiene alla bolla di raggio ε_i , quindi

$$\leq \varepsilon_{m+1} + \cdots + \varepsilon_n$$

e quest'ultima somma tende a 0 perché per costruzione la serie degli ε_i è convergente.

Allora $z_n \to x \in X$, e **mostro che** $T(x) = y$. Osservo che per continuità di , e sostituendo l'espressione degli z_n :

$$
\begin{aligned}
&= \lim_n [T(x_0) + \cdots + T(x_n)] \\
&= \lim_n T(x_0 + x_1 + \cdots + x_n) = y
\end{aligned}
$$

infatti $\|y - T(z_n)\| = t_{n+1} \to 0$.

Poi mostro che $x \in U_r$.

$$
\begin{aligned}
\|x\| = \|\lim_n z_n\| = \lim_n \|z_n\| &\leq \lim_n \sum_{i=0}^{n} \|x_i\| \\
&= \lim_n \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n < r
\end{aligned}
$$

infatti $\varepsilon_0 = r/2$ e la somma degli altri termini è $< r/2$.

Osservazione 6.3

La completezza di Y viene usata nel passo 1, dicendo che Y è unione di aperti e applicando il teorema di Baire.

6.6.4 Alcuni corollari

Corollario 6.4

Nelle stesse ipotesi (X, Y di Banach, $T : X \to Y$ lineare continua e suriettiva), se è anche iniettiva, allora T^{-1} è lineare e continua, quindi è un omeomorfismo lineare.

Dimostrazione

Per il teorema dell'applicazione è aperta, inoltre è iniettiva quindi esiste T^{-1} lineare. Per verificarne la continuità, sia A aperto in X , allora

$$(T^{-1}(A))^{-1} = T(A)$$

che è aperto in Y , quindi T^{-1} è continua.

Corollario 6.5

Nelle ipotesi precedenti, esistono $c, d > 0$ tali che per ogni $x \in X$

$$c * \|x\| \leq \|T\| \leq d * \|x\|$$

(la disuguaglianza di destra traduce la continuità di , e quella di sinistra traduce la continuità di T^{-1} .)

$$\|T^{-1}\| = \sup_{y\, t.c.\, \|y\|\leq 1} \frac{T^{-1}(y)}{\|y\|}.$$

Siccome ogni y è immagine di un unico x per l'iniettività di definisco $\|y\|^*$ come la norma dell'unico x di cui y è immagine.

6.6.5 Teorema del grafico chiuso

Dati due spazi topologici X, Y e $f : X \to Y$, il grafico di f è

$$\{(x, y) \in X \times Y\, t.c.\, y = f(x)\}$$

Lemma 6.3

Se Y è di Hausdorf e f è continua, allora il suo grafico è chiuso.

Dimostrazione

Basta mostrare che il complementare del grafico è aperto. Considero (x, y) non appartenente al grafico, cioè tale che $y \neq f(x)$.

Allora, essendo Y di Hausdorf, esistono V, W aperti tali che $y \in V, f(x) \in W$ e $V \cap W = \emptyset$. Siccome f è continua, esiste U tale che $f(U) \subset W$. $U \times V$ è un intorno di (x, y) , ed è disgiunto dal grafico. Infatti, supponiamo per assurdo che esiste $(s, t) \in U \times V \cap G_f$, allora $t = f(s)$, ma d'altra parte $s \in U$, quindi $f(s) = t \in W$, e si ha un assurdo perché $V \cap W = \emptyset$ quindi non si può avere contemporaneamente $t \in V$ e $t \in W$.

Non vale il viceversa, ad esempio se considero un'iperbole che in 0 vale 0, si ha che la funzione non è continua anche se il grafico è un chiuso di $\mathbb{R}^2$.

Teorema 6.10 (teorema del grafico chiuso)

Siano X, Y di Banach, $T : X \to Y$ lineare, con grafico chiuso. Allora è continua.

$X \times Y$ è uno spazio vettoriale con le operazioni fatte componenti per componenti. Si introduce la norma $\|\cdot\|_{X\times Y} = \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_Y$, che verifica le seguenti proprietà:

1. dati (x, y) e (x', y') :

   $$\|(x, y) + (x', y')\| = \|x + x'\|_X + \|y + y'\|_Y$$

   e per subadditività delle norme:

   $$\leq \|x\|_X + \|x'\|_X + \|y\|_Y + \|y'\|_Y$$

   $$\leq \|x\|_X + \|y\|_Y + \|x'\|_X + \|y'\|_Y$$

   $$\leq \|(x, y)\|_X + \|(x', y')\|_Y.$$

2. $$\|c(x, y)\| = |c|\|x\|_X + |c|\|y\|_Y$$

Suppongo di avere una successione di Cauchy, tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_0 tale che per ogni $m, n > n_0$

$$\|(x_n - x_m, y_n - y_m)\| \le \varepsilon$$

Questa condizione implica

$$\|x_m - x_n\|_X + \|y_n - y_m\|_Y \le \varepsilon$$

cioè le successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono di Cauchy, e per la completezza di $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ si ha $x_n \to x$ e $y_n \to y$: quindi $(x_n, y_n) \to (x, y)$ infatti

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y \to 0$$

perché i due addendi tendono a 0.

Data $T : X \to Y$ lineare, il suo grafico è un sottospazio vettoriale di $X \times Y$. Mostro ad esempio la chiusura rispetto alla somma:

$$(x, T(x)) + (x', T(x')) = (x + x', T(x) + T(x')) = (x + x', T(x + x'))$$

e quindi la somma di due punti del grafico appartiene al grafico.

Dimostrazione (dimostrazione del teorema del grafico chiuso)

Chiamo P_X, P_Y le proiezioni su X e Y : esse sono lineari e continue. G_f è un sottospazio vettoriale chiuso, quindi è di Banach, e anche X è Banach. $P_X(G_f)$: $G_f \to X$ è lineare, continua, e suriettiva. Inoltre è iniettiva, quindi per il teorema dell'applicazione aperta l'inversa P_x^{-1} è continua. è composizione di funzioni coninue, infatti $T(x) = P_Y \circ P_X^{-1}(x)$, infatti $x \mapsto^{P_X^{-1}} (x, T(x)) \mapsto^{P_Y} T(x)$.

Quindi è continua.

6.6.6 Essenzialità della completezza di X

Sia , insieme delle funzioni : $[0, 1] \to \mathbb{R}$ continue e tali che f' esiste ed è continua. Definisco la norma

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$$

Sia poi $Y = C^0([0, 1])$ con la norma del sup. Sia $d : X \to Y$ tale che $f \mapsto f'$.

Si può mostrare che:

1. d è lineare.
2. G_f è chiuso, infatti considero una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che convergono uniformemente ad una certa f , allora per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata si ha $d(f_n) \to g$ con $g = df$ con la norma del sup.

3. d non è continua, infatti considero ad esempio $f_n(x) = x^n$. Si ha che

$$\|f\| = 1\, d(f_n) = n * x^{n-1},\ \|d(f)\| = +\infty$$

Quindi

$$\|d(f_n)\| = \sup_{f \in C^1([0,1]),\, \|f\| \leq 1} |d(f)|$$

ma $\|df\| = +\infty$ se scelgo $f = x^n$ quindi d è discontinua.

In conclusione G_f è chiuso e d non è continuo, per non contraddire il teorema del grafico chiuso si deve avere che X non è Banach, quindi nella dimostrazione del teorema del grafico chiuso la completezza di X è necessaria.

Esercizio 6.2

Mostrare che lo spazio $C([0, 1])$ con la norma 2 non è completo.

Dimostrazione

Considero l'identità da $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ a $(C([0, 1], \|\cdot\|_2)$. L'identità è continua infatti

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)\, dt} \leq \|f\|^\infty \sqrt{\int_0^1 1\, dt} = \|f\|_\infty$$

Inoltre $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ è di Banach, e se I^{-1} fosse continua, esisterebbe una costante positiva c tale che

$$\|f\|_\infty \leq c * \|f\|_2 \forall f \in C([0, 1])$$

ma questo non è vero, infatti si possono considerare successioni con un sup grande ma con integrale piccolo ("esempi delle funzioni a triangolo di base $1/n$ e altezza n "). Segue che $(C([0, 1]), \|\cdot\|_2)$ non è di Banach.

Con un ragionameno analogo si mostra che $(C([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ non è uno spazio di Banach.

I completamenti di questi spazi sono L^2 e L^1 .

Capitolo 7

Esercizi

7.1 Spazi metrici

Esercizio 7.1

Dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma euclidea.

Dimostrazione

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_i |x_i - y_i|^2}$$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_i |x_i - z_i + z_i - y_i|^2}$$

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_i |(x_i - z_i) + (z_i - y_i)|^2}$$

e sviluppando il quadrato

$$= \sqrt{\sum_i |(x_i - z_i)^2 + (z_i - y_i)^2 + 2(x_i - z_i) * (z_i - y_i)|}$$

$$\leq \sqrt{\sum_i |x_i - z_i|^2 + \sum_i |z_i - y_i|^2 + 2\sum_i |(x_i - z_i) * (z_i - y_i)|}$$

allora si ha

$$\sum_i |x_i - z_i|^2 = d(x,z)^2$$

$$\sum_i |z_i - y_i|^2 = d(z,y)^2$$

e per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\sum_i |(x_i - z_i) * (z_i - y_i)| = (x-z)\cdot(z-y) \leq \sqrt{\sum_i |x_i - z_i|^2} * \sqrt{\sum_i |z_i - y_i|^2} = d(x,z) * d(z,y)$$

quindi

$$d(x,y) \leq \sqrt{d(x,z)^2 + d(z,y)^2 + 2d(x,z) * d(z,y)} = \sqrt{[d(x,z) + d(z,y)]^2} = d(x,z) + d(z,y)$$

7.2 Disuguaglianze fondamentali

Esercizio 7.2

Dato $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ e ponendo

$$\|x\| = d(x, O) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma euclidea.

Dimostrazione

Dimostro che

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

ed esplicitando le espressioni delle norme, devo dimostrare che:

$$\|x + y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} = \|x\| + \|y\|$$

Elevando al quadrato il membro di sinistra:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2 * \sum_{i=1}^{n} x_i * y_i,$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 + 2 * |\sum_{i=1}^{n} x_i * y_i|$$

Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha:

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} * \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Allora proseguendo con le disuguaglianze e sostituendo l'espressione di $|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i|$:

$$\leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2 * \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} * \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$
$$= (\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2})^2$$

cioè, risalendo al primo membro:

$$\sum_i |x_i + y_i|^2 \leq (\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2})^2$$

e prendendo la radice:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

cvd

Esercizio 7.3

Determinare quando vale l'uguaglianza di Hoelder: dati due vettori $x, y \in \mathbb{R}^n$, cioè quando si ha che

$$|\sum_i x_i y_i| = \|x\|_p * \|y\|_q = (\sum_i |x_i|^p)^{1/p} * (\sum_i |y_i|^q)^{1/q}$$

con $1/p + 1/q = 1$.

Dimostrazione

Ripercorrendo la dimostrazione della disuguaglianza di Hoelder, si ha che questa si dimostra a partire dalla disuguaglianza di Young:

$$ab \leq a^q/q + b^q/q$$

Se pongo $a = |x_1|$ e $b = |y_1|$ si ha

$$|x_1| * |y_1| \leq |x_1|^p/p + |y_1|^q/q$$

e sommando su tutti gli indici:

$$\sum_i |x_i||y_i| \leq \sum_i (|x_i|^p/p + |y_i|^q/q) = 1/p * \sum_i |x_i|^p + 1/q * \sum_i |y_i|^q$$

allora nell'ipotesi che $\sum_i |x_i|^p = 1$ e $\sum_i |y_i|^p = 1$, la disuguaglianza di Hoelder vale.

Si ha quindi che l'uguaglianza di Hoelder vale se e solo se anche la disuguaglianza di Young vale con il segno di uguale.

Nella dimostrazione della disuguaglianza di Young, si ha una serie di uguaglianze, e la prima disuguaglianza con il segno $\leq$ compare quando si utilizza la convessità della funzione esponenziale:

$$e^{tx+(1-t)y} \leq t * e^x + (1-t) * e^y$$

Richiediamo allora che in quest'ultima relazione valga l'uguale: questo avviene solo se i punti di intersezione tra la retta secante e la funzione coincidono, e quindi solo se la retta è tangente alla funzione e si ha $x = y$.

Ma nella dimostrazione della disuguaglianza di Young, si ha $x = \log a^p$, $y = \log b^q$, e quindi

$$x = y \longrightarrow \log a^p = \log b^q, \longrightarrow a^p = b^q$$

Verifica: mostro che il risultato trovato è corretto. Se $a^p = b^q$,

$$a^p/p + b^q/q = a^p/p + a^p/q = a^p * (1/p + 1/q) = a^p$$

Inoltre $b = \sqrt[q]{a^p} = a^{p/q}$ quindi

$$ab = a * a^{p/q} = a^{1+p/q}$$

e si ha

$$a^p = a^{1+p/q} \iff p/q + 1 = p$$
$$p/q + 1 - p = 0$$
$$p + q - pq = 0$$

e questo è vero perché $pq = p + q$, quindi effettivamente la disuguaglianza di Young vale con il segno di uguale se $a^p = b^q$.

Nella disuguaglianza di Hoelder vale l'uguale se la disuguaglianza di Young vale per ogni termine della sommatoria. Allora per ogni indice i, si deve avere $x_i^p = y_i^q$.

7.3 Distanza e proiezioni

Esercizio 7.4 (distanza come funzione continua)

Dato $A \subset X$ non vuoto, definisco

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Mostrare che la funzione che a x associa $d(x, A)$ è uniformemente continua e definita su tutto X .

Dimostrazione

Considero $y \in X$ e valuto la quantità $d(x, A) - d(y, A)$.

Osservo che $d(x, A) \leq d(x, a) \forall a \in A$, e per la disuguaglianza triangolare

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

e unendo queste informazioni:

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, a)$$
$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

Passando all'inf, la disuguaglianza continua a valere perché il membro di sinistra non dipende da a .

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$$
$$\longrightarrow d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

Quindi la funzione è continua, perché basta porre $\delta = \varepsilon$ per fare in modo che, se $d(x, y) \leq \delta$, allora $d(x, A) - d(y, A) = f(x) - f(y) \leq \varepsilon$.

Esercizio 7.5

Siano X uno spazio di Hilbert e $V_1, V_2 \subset X$ sottospazi lineari chiusi ortogonali. Mostrare che

1. $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_i \in V_i\}$ è un sottospazio chiuso.
2. determinare la relazione tra $P_{V_1+V_2}$ (che esiste perché per il punto precedente $V_1 + V_2$ è chiuso) e P_{V_1} e P_{V_2} .

Dimostrazione

Mostro che $V_1 + V_2$ è un sottospazio di X . Dati $a, b \in V_1 + V_2$ posso scrivere $a = x_a + y_a$ con $x_a \in V_1, y_a \in V_2$, e $b = x_b + y_b$ con $x_b \in V_1, y_b \in V_2$. Allora

$$a + b = x_a + y_a + x_b + y_b = (x_a + x_b) + (y_a + y_b)$$

e osservo che per la linearità di V_1 e V_2 , $x_a + x_b \in V_1$ e $y_a + y_b \in V_2$, quindi $a + b \in V_1 + V_2$ perché è stato scritto come somma di elementi nei V_i .

Dimostro che $V_1 + V_2$ **è chiuso**. Equivalentemente devo dimostrare che data una successione a valori in V_1+V_2 convergente ad un certo z , si ha che $z \in V_1+V_2$.

Considero una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dove $a_n = x_{1n} + x_{2n}$ dove $x_{1n} \in V_1$ e $x_{2n} \in V_2$. Allora voglio mostrare che

$$z = z_1 + z_2 = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (x_{1n} + x_{2n})$$

Applicando il teorema del limite della somma si avrebbe $z = z_1 + z_2$ con $z_1 = \lim_{n\to\infty} x_{1n} \in V_1$ e $z_2 = \lim_{n\to\infty} x_{2n} \in V_2$, ma questo teorema si può applicare solo se i limiti esistono. In spazi generici questo non è vero, mostriamo che è vero per spazi chiusi.

Applico $P_1 = P_{V_1}$ ai due membri della relazione $a_n = x_{1n} + x_{2n}$:

$$P_1(a_n) = P_1(x_{1n}) + P_1(x_{2n}) = x_{1n} + 0$$

infatti $x_{2n} \in \ker P_1$ perché x_{2n} è ortogonale a tutti i vettori di V_1 per ipotesi, e $P_1(x_{1n}) = x_{1n}$ perché $x_{1n} \in V_1$.

Per la continuità di P_1 , $a_n \to z$ implica $P_1(a_n) \to P_1(z)$, e siccome $P_1(a_n) = x_{1n}$, $x_{1n} \to P_1(z)$. Analogamente $x_{2n} \to P_2(z)$.

Allora $(x_{1n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ammettono limite, quindi posso applicare il teorema del limite della somma:

$$z = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} x_{1n} + \lim_{n\to\infty} x_{2n} = P_1(z) + P_2(z)$$

e siccome $P_1(z) \in V_1$ e $P_2(z) \in V_2$ si ha che $V_1 + V_2$ è chiuso.

Ipotizzo che $P_{V_1+V_2} = P_{V_1} + P_{V_2}$.

Sia $x \in X$. $P_{V_1}(x) \in V_1$ e $P_{V_2}(x) \in V_2$, quindi $P_{V_1}(x)+P_{V_2}(x) \in V_1+V_2$. Mostro che

$$x - P_{V_1}(x) - P_{V_2}(x)$$

è ortogonale a $V_1 + V_2$, in modo che $P_{V_1+V_2} = P_{V_1} + P_{V_2}$.

Per le proprietà generali delle proiezioni su V_1 e si ha $x - P_{V_1} \perp V_1$. $P_{V_2}(x) \perp V_1$ per ipotesi quindi $x - P_{V_1} - P_{V_2} \perp V_1$. Allo stesso modo $x - P_{V_1} - P_{V_2} \perp V_2$, e quindi è ortogonale a $V_1 + V_2$.

Esercizio 7.6

Dimostrare che P è una proiezione se e solo se $P^2 = P$ e P è autoaggiunta, cioè per ogni x, y , $x \cdot P(y) = P(x) \cdot y$.

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$ è ovvia.

$2 \longrightarrow 1$: voglio mostrare che

$$(x - P(x)) \cdot P(y) = 0.$$

per ogni $y \in X$.

Osservo che

$$(x - P(x)) \cdot P(y) = x \cdot P(y) - P(x) \cdot P(y) =$$

e per il fatto che P è autoaggiunta:

$$= x \cdot P(y) - PP(x) \cdot y =$$

ma P è idempotente, quindi

$$= x \cdot P(y) - P(x) \cdot y =$$

e usando ancora il fatto che P è autoaggiunta, il tutto fa 0, quindi P è una proiezione.

Non è detto che in generale due proiezioni commutino.

Esercizio 7.7

Mostrare che se $PQ = QP$, allora PQ è una proiezione.

Dimostrazione

Per l'esercizio precedente, dimostrare che PQ è una proiezione equivale a dimostrare che

1. PQ è *idempotente*, e questo è vero, infatti, tenendo conto del fatto che P, Q commutano:
$$PQ \circ PQ = QPPQ$$
ma siccome P è idempotente:
$$= QPQ = PQQ = PQ.$$
dove nell'ultimo passaggio ho usato il fatto che anche Q è idempotente.
2. PQ è *autoaggiunta*, infatti
$$x \cdot PQ(y) = P(x) \cdot Q(y) = QP(x) \cdot y = PQ(x) \cdot y$$

Per mostrare il viceversa è necessario il seguente lemma:

Lemma 7.1

Detta $V_P = P(X)$ e $V_Q = Q(X)$, segue che $z \in V_P \cap V_Q$ se e solo se $z = PQ(z)$.

Dimostrazione

Se $z = PQ(z)$, allora ovviamente $z \in V_P \cap V_Q$. Viceversa, dato $y \in V_P \cap V_Q$, P e Q fissano y quindi si può scrivere $y = P(y) = Q(y)$, allora $PQ(y) = P(Q(y)) = P(y) = y$.

Allora possiamo mostrare che:

Proposizione 7.1

Se PQ è una proiezione, allora P e Q commutano.

Dimostrazione

Per ipotesi,

$$(x - PQ(x)) \cdot z = 0 \forall z \in V_P \cap V_Q$$

quindi

$$x \cdot z = PQ(x) \cdot z, \text{ formula 1}$$

Inoltre, sempre per ogni $z \in V_P \cap V_Q$, si ha

$$QP(x) \cdot z = P(x) \cdot Q(z) = P(x) \cdot z = x \cdot P(z) = x \cdot z, \text{ formula 2}$$

quindi per le formule 1 e 2:

$$QP(x) \cdot z = PQ(x) \cdot z$$

ma allora, inserendo la formula 2 nella formula 1 si ha:

$$0 = (x - PQ(x)) \cdot z = (x - QP(x)) \cdot z = x \cdot z - QP(x) \cdot z$$

cioè $QP(x) \cdot z = x \cdot z$ per ogni $z \in V_P \cap V_Q$ quindi $QP(x)$ è la proiezione su $V_P \cap V_Q$, quindi $PQ = QP$ e le due proiezioni commutano.

7.4 Spazi di Hilbert

Esercizio 7.8

Mostrare che $C^1_{[0.1]}$, insieme delle funzioni : $[0, 1] \to \mathbb{R}$ continue, non è completo, con la norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 \, dx}.$$

Dimostrazione

E' già stato verificato che quella data è una norma. Definisco il prodotto scalare come

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

infatti facendo il prodotto scalare di un elemento con se stesso ottengo $f \cdot f = \|f\|_2^2 = \int_0^1 f^2\, dx$

Osservo che il prodotto scalare è nullo se e solo se $f^2 = 0$, infatti se una funzione è positiva e continua il suo integrale è nullo solo se $f = 0$ ovunque.

Per mostrare che lo spazio non è di Hilbert, considero la seguente successione:

$$f_n = \begin{cases} 1 & \iff x \in [0, 1/2] \\ \text{tratto lineare} & \iff x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 0 & \iff x \in [1/2 + 1/n, 1] \end{cases}$$

Le f_n sono continue e il tratto lineare collega i punti $(1/2, 1)$ e $(1/2 + 1/n, 0)$.

Mostro che la successione è di Cauchy. Per $m > n$, stimo

$$\|f_n - f_m\|_2^2 = \int_0^1 (f_n - f_m)^2\, dx$$

$f_n - f_m$ è nulla per $x \in [0, 1/2]$ e per $x \in [1/2 + 1/n, 1]$ (le funzioni sono uguali in questi intervalli), mentre sull'intervallo $[1/2, 1/2 + 1/n]$ la differenza è maggiorata da 1. Spezzo l'integrale in tre parti:

$$\begin{aligned} \|f_n - f_m\|_2^2 &\leq \int_0^{1/2} 0\, dx + \int_{1/2}^{1/2+1/n} 1\, dx + \int_{1/2+1/n}^1 0\, dx \\ &= 0 + (1/2 + 1/n - 1/2) * 1 + 0 = 1/n \end{aligned}$$

cioè $\|f_n - f_m\|_2 \leq \sqrt{1/n} \leq \varepsilon$.

Quindi la successione è di Cauchy.

Mostro che non esiste una funzione continua a cui la successione di partenza converge.

Supponiamo per assurdo che la successione converga in norma 2 a una funzione continua. Allora dev'essere

$$\|g - f_n\|_2^2 = \int_0^1 (g - f_n)^2\, dx \to 0$$

Spezzo l'integrale:

$$\int_0^{1/2} (g - f_n)^2\, dx + \int_{1/2}^1 (g - f_n)^2\, dx$$

e la somma di questi due termini positivi tende a 0 solo se entrambi gli addendi tendono a 0.

Considerando $\int_0^{1/2}(g-f_n)^2\,dx$, siccome $g-f_n$ è positiva e continua, l'integrale è nullo solo se $g-f_n=0$, e quindi $g=f_n=1$ su $[0,1/2]$.

Per studiare l'altro addendo, scelgo $\varepsilon>0$, e considero $1/n\leq\varepsilon$. Allora per ogni $x\geq 1/2+\varepsilon$, segue che

$$\int_{1/2+\varepsilon}^{1}(g-f_n)^2\,dx$$

tende a 0 solo se $g=f_n$ sull'intervallo, cioè se $g=0$ per ogni $x\geq 1/2+\varepsilon$, e questo vale per ogni ε . Allora, per il punto precedente $g(1/2)=1$, ma per continuità

$$g(1/2)=\lim_{\varepsilon\to 0}g(1/2+\varepsilon)=0$$

quindi questi valori sono discordanti e si ha una contraddizione, allora g non può essere una funzione continua.

Esercizio 7.9

In uno spazio di Hilbert, prendo due vettori x,y sulla bolla unitaria, e considero il segmento che li congiunge. Mostriamo che tutti i punti interni al segmento hanno norma minore di 1, cioè, per ogni $t\in(0,1)$,

$$\|tx+(1-t)y\|<1.$$

Dimostrazione

A priori, per la subadditività della norma, la norma dei punti interni al segmento è ≤ 1 . In particolare, la norma dei punti interni al segmento è esattamente uguale a 1 nel caso della norma in cui le bolle sono quadrate (norma infinito).

Supponiamo prima che $\|x\|=\|y\|=1=x\cdot y$, allora mostriamo che $x=y$, infatti

$$\|x-y\|^2=(x-y)\cdot(x-y)=x\cdot x+y\cdot y-2x\cdot y=\|x\|^2+\|y\|^2-2x\cdot y=1+1-2*1=0$$

quindi $\|x-y\|=0$ implica $x=y$.

Mostriamo poi che se $\|tx+(1-t)y\|=1$, si avrebbe $x=y$, e quindi il segmento degenera.

$$\begin{aligned}\|tx+(1-t)y\|^2&=(tx+(1-t)y)\cdot(tx+(1-t)y)\\&=t^2\|x\|^2+(1-t)^2\|y\|^2+2t(1-t)x\cdot y\end{aligned}$$

$$= t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t)x \cdot y = 1$$
$$= t^2 + 1 + t^2 - 2t + 2t(1-t)x \cdot y$$
$$2t(1-t)x \cdot y = 2t - 2t^2$$
$$x \cdot y = \frac{2t - t^2}{2t(1-t)} = 1$$

(avendo escluso gli estremi del segmento, il denominatore dell'espressione sopra è sempre ben definito)

Quindi per il punto precedente, sapendo che x, y sono unitari, il fatto che $x \cdot y = 1$ implica $x = y$, quindi il segmento degenera e in uno spazio di Hilbert i punti del segmento devono avere necessariamente norma minore di 1.

L'ipotesi che lo spazio è di Hilbert è stata sfruttata, per esempio, quando scrivo la norma quadra di un vettore come prodotto scalare del vettore con se stesso.

7.5 Teorema di Rietz

Esercizio 7.10

Mostriamo che il teorema di Rietz non vale se X non è completo.

Dimostrazione

Per il teorema di Rietz, dato un funzionale lineare e continuo $T : X \to \mathbb{R}$, esiste un vettore x_0 che rappresenta T , cioè tale che $T(x) = x \cdot x_0$ e $\|T\| = \|x_0\|$.

Nello spazio $C_{(0,1)}$, il prodotto scalare è definito come

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\, dx$$

e questo spazio, come mostrato precedentemente, non è completo.

Considero $T(f) = \int_0^{1/2} f\, dx$.

1. *Mostro che* T *è lineare.*

   $$T(f+g) = \int_0^{1/2} (f(x)+g(x))\, dx = \int_0^{1/2} f(x)\, dx + \int_0^{1/2} g(x)\, dx = T(f)+T(g)$$

   per linearità dell'integrale.

2. *Mostro che* $T(f)$ *è continua.* Basta mostrare che esiste una costante tale che $|T(f)| \leq c * \|f\|_2$.

   $$|T(f)| = |\int_0^{1/2} f\, dx| \leq \int_0^{1/2} |f|\, dx \leq \int_0^1 |f|\, dx$$

applico Hoelder ponendo $|f| = |f| * 1$:

$$\leq (\int_0^1 |f|^2 \, dx)^{1/2} * (\int_0^1 1 \, dx)^{1/2}$$

$$\leq (\int_0^1 f^2 \, dx)^{1/2} = \|f\|_2$$

quindi la costante cercata è 1, e T è lineare e continuo.

3. *Mostro che non esiste* x_0 *cercato*. Supponiamo per assurdo che esista g tale che

$$T(f) = f \cdot g$$

e in termini di integrali si dovrebbe avere

$$\int_0^{1/2} f \, dx = \int_0^1 fg \, dx, \, \forall f$$

Osservo che la disuguaglianza vale per la funzione g' , che però non è continua:

$$g' = \begin{cases} 1 & \iff x < 1/2 \\ 0 & \iff x > 1/2 \end{cases}.$$

Mostro che g dev'essere nulla dopo $1/2$. Supponiamo che a destra di $1/2$ ci sia un punto t in cui g non sia 0 ma abbia valore positivo. Siccome g è continua, esiste un intorno di t in cui la funzione si mantiene positiva.La disuguaglianza deve valere per ogni f . Considero quindi una funzione f che vale 0 fino a t , poi forma un triangolo nell'intervallo $(x - 1/n, x + 1/n)$ di altezza 1 e poi torna a 0. Allora la formula che deve valere diventa:

$$0 = \int_{x-1/n}^{x+1/n} fg \, dx$$

e su questo intervallo f, g sono non nulle, quindi l'integrale non può essere nullo come deve.La supposizione che ci sia un punto a destra di t in cui la funzione non è nulla è assurdo, allora f dev'essere nulla a destra di $1/2$ e in $1/2$ per continuità.Riscrivendo il membro di destra dell'uguaglianza con l'informazione che g è nulla dopo $1/2$ ottengo:

$$\int_0^{1/2} f \, dx = \int_0^{1/2} fg \, dx$$

$$\int_0^{1/2} (f - fg) \, dx = 0$$

$$\int_0^{1/2} f * (1 - g) \, dx = 0$$

e questo deve valere per ogni f , in particolare per $f = 1 - g$.

$$\int_0^{1/2} (1 - g)^2 \, dx = 0$$

e siccome questo è l'integrale di una funzione continua positiva, si deve avere $g = 1$, e per continuità g deve valere 1 in $1/2$ e c'è una contraddizione.

7.6 Polinomi di Legendre

7.6.1 Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt

Esercizio 7.11

Consideriamo $C_{[-1,1]}$, con il prodotto scalare

$$f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx.$$

Trovare una base ortonormale a partire dalla successione di vettori linearmente indipendenti

$$1,\, x,\, x^2,\, x^3, \ldots.$$

Dimostrazione

Il primo vettore della base data è $x_0 = 1$, e devo normalizzarlo perché non ha norma 1, infatti

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1\, dx} = \sqrt{2}$$

Quindi pongo

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Considero poi $x_1 = x$, e verifico se è ortogonale al vettore della base ortonormale già trovato:

$$y_0 \cdot x_1 = \int_{-1}^{1} (1/\sqrt{2})x\, dx = 0$$

perché ho una funzione dispari integrata su un dominio simmetrico.

Quindi $y_0 \perp x_1$, e basta normalizzarlo per ottenere il secondo vettore della base ortonormale:

$$\|x_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\, dx} = \sqrt{[x^3/3]_{-1}^{1}} = \sqrt{2/3}$$
$$y_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} = \sqrt{3/2}x.$$

Ora verifico se $x_2 = x^2$ è ortogonale ai vettori trovati:

$$y_0 \cdot x_2 = 1/\sqrt{2} \cdot x^2 = \int_{-1}^{1} x^2 * 1/\sqrt{2}\, dx = 2/3 * 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/3 \neq 0$$

$$y_1 \cdot x_2 = 1/\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}x/2\,dx = 0$$

Ora pongo

$$\begin{aligned}
z_2 = x - P_{\{y_0,y_1\}}(x_2) &= x^2 - (x_2 \cdot y_0) * y_0 - (x_2 \cdot y_1) * y_1 \\
&= x^2 - \sqrt{2}/3 * 1/\sqrt{2} - 0 = x^2 - 1/3 \\
\|x^2 - 1/3\|^2 &= \int_{-1}^{1} (x^2 - 1/3)^2\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^4 + 1/9 - 2/3x^2\,dx \\
= [x^5/5 + 1/9x - 2/9x^3]_{-1}^{1} &= 2/5 + 2/9 - 4/9 = 2/5 - 2/9 = \frac{18-10}{45} = \frac{8}{45} \\
y_2 = \frac{z_2}{\|z_2\|} &= \frac{x^2 - 1/3}{\sqrt{8/45}} = \frac{3\sqrt{5}(x^2 - 1/3)}{2\sqrt{2}} = \sqrt{5}\frac{(3x^2 - 1))}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Vettori ottenuti finora:

$$\begin{aligned}
y_0 &= 1/\sqrt{2} \\
y_1 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x \\
y_2 &= \sqrt{5}\frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Questi tre vettori sono linearmente indipendenti e hanno gradi diversi, quindi lo spazio generato da essi è uguale a quello generato da $\{1, x, x^2\}$, come previsto. Nei vettori di indice pari compaiono solo potenze pari. Ci si aspetta che in y_3 compariranno le potenze x^3, x .

$$\begin{aligned}
y_0 \cdot y_3 &= 1/\sqrt{2} * \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0 \\
y_1 \cdot y_3 &= \int_{-1}^{1} \sqrt{3}/\sqrt{2}x^4\,dx = 2/5\sqrt{3}/\sqrt{2} = \sqrt{6}/5 \\
y_2 \cdot y_3 &= 0 \\
z_3 &= x^3 - 2/5\sqrt{3}/\sqrt{2} * \sqrt{3}/\sqrt{2}x \\
z_3 &= x^3 - 2/5x \\
\|z_3\| &= \sqrt{\int_{-1}^{1} (x^3 - 2/5x)^2\,dx} \\
&= \sqrt{\int_{-1}^{1} x^6 + 4/5x^2 - 4/5x^4\,dx} \\
&= \sqrt{[x^7/7 + 4/5x^3/3 - 4/5x^5/5]_{-1}^{1}} = \sqrt{2/7 + 8/15 - 8/25}
\end{aligned}$$

$$y_3 = \frac{x^3 - 2/5x}{\sqrt{2/7 + 8/15 - 8/25}}$$

I vettori ottenuti sono i polinomi di Legendre, che si ottengono anche con una formula ricorsiva.

Questi polinomi se sono di grado pari hanno solo potenze pari, e lo stesso vale per il grado dispari.

7.6.2 Criterio di Leibniz

1. *Deduco la formula generale per calcolare la derivata n-esima del prodotto di due funzioni.*Considero due funzioni f, g , allora

$$(fg)' = f' * g + f * g'$$

$$\begin{aligned}(fg)^{(2)} &= f' * g' + f^{(2)} * g + f' * g' + f * g^{(2)} = \\ &= f * g^{(2)} + 2f'g' + f^{(2)} * g\\ (fg)^{(3)} &= 2f' * g^{(2)} + 2f^{(2)} * g' + f' * g^{(2)} + f * g^{(3)} + f^{(2)} * g' + f^{(3)} * g\\ &= f * g^{(3)} + 3f' * g^{(2)} + 3f^{(2)}g' + f^{(3)}g\end{aligned}$$

Su ogni monomio la somma dell'ordine di derivazione è uguale all'ordine di derivazione di fg , quindi in generale vale la formula di Leibniz:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} * g^{(n-k)}$$

2. *Osservo che la funzione $h(x) = (1-x^2)^n$ verifica una determinata equazione differenziale*, infatti

$$h'(x) = -2xn * (1 - x^2)^{n-1}$$

e moltiplicando per $(1 - x^2)$, si ha che h verifica l'equazione differenziale:

$$(1 - x^2) * h'(x) + 2xnh(x) = 0, \text{ equazione}*$$

3. *Derivo $n+1$ volte quest'espressione, applicando Leibniz.* Indico con $f^{(n+1)}$ la derivata $n+1$ -esima di f rispetto ad x :##Per il primo addendo si ha:

$$= [(1 - x^2) * h'(x)]^{(n+1)} =$$

e applicando Leibniz:

$$= 1 * (1 - x^2) * h^{(n+2)} + (n + 1) * (-2x) * h^{(n+1)} + \frac{(n + 1)!}{2 * (n - 1)!}(-2)h^{(n)}$$

(tutti i termini successivi sono nulli perché le derivate di $1 - x^2$ di ordine superiore a 2 sono nulle)

$$= (1 - x^2) * h^{(n+2)} - 2(n + 1)x * h^{(n+1)} - n * (n + 1)h^{(n)}$$

##Ora derivo il secondo termine, $xh(x)$:

$$[xh(x)]^{(n+1)} =$$

$$= x * h^{(n+1)} + (n+1) * h^{(n)}$$

Complessivamente, annullando la derivata $n+1$ -esima della relazione $*$ si ha:

$$(1-x^2)*h^{(n+2)}-2(n+1)x*h^{(n+1)}-n*(n+1)h^{(n)}+2xn*h^{(n+1)}+(n+1)2n*h^{(n)} = 0$$

$$(1-x^2) * h^{(n+2)} - 2x * h^{(n+1)} + n(n+1) * h^{(n)} = 0$$

Se pongo $y = h^{(n)}$, y verifica l'equazione differenziale del secondo ordine:

$$(1-x^2) * y'' - 2x * y' + n * (n+1) * y = 0, \quad \text{equazione di Legendre}$$

Questa è un'equazione lineare omogenea, quindi l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale reale di dimensione 2 (basta trovare due soluzioni linearmente indipendenti, e le altre si scrivono come combinazione lineare di queste).L'equazione si può riscrivere come:

$$[(1-x^2)y']' + n(n+1) * y = 0$$

4. *Mostro, attraverso l'equazione di Legendre, che le* $H_m = h^{(m)} = ((1-x^2)^n)^{(m)}$ *sono ortogonali tra di loro sull'intervallo* $[-1,1]$ .Devo mostrare che
$$\int_{-1}^{1} H_m H_n \, dt = 0$$
$$= \int_{-1}^{1} ((1-x^2)^n)^{(m)} \, ((1-x^2)^n)^{(n)} \, dx = 0$$
per ogni $n \neq m$ .Ponendo $g(y) = [(1-x^2)y']' + n(n+1) * y$, osservo che $H_m g(H_n) - H_n g(H_m) = 0$ infatti $g(H_n) = g(H_m) = 0$ perché le H_i soddisfano l'equazione di Legendre.Quindi
$$H_m g(H_n) - H_n g(H_m) =$$
$$H_m\{[(1-x^2)H_n']' + n(n+1)H_n\} - H_n\{[(1-x^2)H_m']' + m(m+1)H_m\} = 0$$
Raccolgo i termini che contengono il prodotto $H_n H_m$:
$$(n(n+1) - m(m+1))H_m H_n + \{H_m[(1-x^2)H_n']' - H_n[(1-x^2)H_m']'\} = 0$$
$$(n(n+1) - m(m+1))H_m H_n = \{H_n[(1-x^2)H_m']' - H_m[(1-x^2)H_n']'\}$$
e integrando entrambi i membri:
$$(n(n+1)-m(m+1)) \int_{-1}^{1} H_m H_n \, dx = \int_{-1}^{1} \{H_n[(1-x^2)H_m']' - H_m[(1-x^2)H_n']'\} \, dx$$
quindi si ha che $\int_{-1}^{1} H_m H_n = 0$ (cioè che le H_i sono ortogonali) se e solo se:
$$\int_{-1}^{1} \{H_n[(1-x^2)H_m']' - H_m[(1-x^2)H_n']'\} \, dx = 0, \text{ formula 1}$$

Dimostro quindi la formula 1, separo i due addendi:

$$\int_{-1}^{1} H_n[(1-x^2)H_m']'\,dx - \int_{-1}^{1} H_m[(1-x^2)H_n']'dx = 0,$$

$$= [(1-x^2)H_m'H_n]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)H_m'H_n'\,dx - [(1-x^2)H_n'H_m]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}(1-x^2)H_n'H_m'\,dx$$

ma i termini tra parentesi quadra sono nulli perché $1-x^2$ si annulla in ± 1 , quindi rimane:

$$= -\int_{-1}^{1}(1-x^2)H_m'H_n'\,dx + \int_{-1}^{1}(1-x^2)H_n'H_m'\,dx = 0$$

perché i due termini opposti si cancellano, quindi vale la formula 1, quindi segue l'ortogonalità delle H_n .

5. *Relazione con i polinomi di Legendre*: affermo che le H_n sono, a meno di una costante moltiplicativa, i polinomi di Legendre. Infatti le $H_m = ((1-x^2)^n)^{(m)}$ sono polinomi di grado $2n-m$, e sono ortogonali.Siccome l'equazione di Legendre è un'equazione differenziale del secondo ordine le soluzioni dipendono da due parametri, c_0, c_1 . Se n è un intero, una delle due soluzioni è un polinomio di Legendre, mentre l'altra è analitica. ???

7.7 Serie di Fourier

Esercizio 7.12

Calcolare i cefficienti di Fourier della funzione $f(x)$ tale che sull'intervallo $(-\pi, \pi$ vale x , e la riporto su ogni intervallo $(-\pi+k\pi, \pi+k\pi)$ in modo che sia periodica.

x è una funzione dispari quindi i coefficienti a_k sono nulli per ogni k .

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\,dx$$

Integro per parti:

$$\frac{1}{\pi}\{[-x * 1/k\cos(kx)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\,dx\}$$

$$\frac{1}{\pi}\{[-x * 1/k\cos(kx)]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k^2}[\sin(kx)]_{-\pi}^{\pi}\}$$

e il secondo addendo è nullo, rimane da valutare:

$$\frac{1}{\pi}\{[-x * 1/k\cos(kx)]_{-\pi}^{\pi}\} = 1/k * [-\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)]$$

Per k pari:

$$b_k = 1/k * [-\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)] = -2/k$$

mentre per k dispari:

$$b_k = 1/k * [-\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)] = 2/k$$

In generale

$$b_n = (-1)^{n+1} * \frac{2}{n}$$
$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(nx)$$

Per Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2$$
$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}[x^3/3]_{-\pi}^{\pi} = 1/6\pi^2 = C * \pi/2$$
$$\pi^2/6 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Normalizzo i b_n tenendo conto che

$$f \cdot g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fg\,dx$$

7.8 Spazi L^p

Esercizio 7.13

Ricordo che

$$L^2 = \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}.$$
$$\Lambda^1 = \{x = (x_n) : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}.$$

1. *c'è un'inclusione tra i due oggetti?*Mostro che $l^1 \subset l^2$ .Prendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in l^1 , allora
$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$$
ma la condizione affinché una serie converga è che il suo termine generale tenda a 0, allora $|x_n| \to 0$, quindi $|x_n| > |x_n|^2$ e si ha quindi
$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

cioè la successione sta in l^2 .

2. *mostrare che* l^1 *è denso in* l^2 .Per gli spazi di Hilbert vale un risultato sulla densità: l^1 è denso in l^2 se $(l^1)^\perp = 0$ con il prodotto scalare di l^2 , cioè tale che date due successioni x, y , si ha
$$x \cdot y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$
Considero la famiglia $e_1 = (1, 0, \dots), e_2 = (0, 1, \dots)$ e così via, che stanno in l^1 . Cerco un vettore che li annulla tutti (e che annulla così anche tutti i vettori di l^1). Data una successione $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, si ha
$$y \cdot e_1 = y_1,$$
e affinché sia nullo dev'essere $y_1 = 0$. Analogamente
$$y \cdot e_2 = y_2$$
ed è nullo solo se $y_2 = 0$, e così via, cioè l'unico vettore tale che $y \cdot e_i = 0 \forall i$ è il vettore nullo, quindi $(l^1)^\perp = \{0\}$.

3. *C'è un'inclusione tra* L^1, L^2 *in quanto spazi di funzioni su* $[0, 1]$ *?*
$$L^2([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ misurabili} : \int_0^1 |f|^2 < \infty\}.$$
$$L^1([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ misurabili} : \int_0^1 |f| < \infty\}.$$
Mostro che $L^2 \subset L^1$. Supponiamo $f \in L^2$ e applicando Hoelder:
$$\int_0^1 |f| \leq \sqrt{\int_0^1 |f|^2} * \sqrt{\int_0^1 1^2}$$
$$= \sqrt{\int_0^1 |f|^2} * 1 < \infty$$
infatti per ipotesi la quantità sotto radice è finita, quindi anche il membro di partenza è finito e $f \in L^1$ .In particolare, l'inclusione $L^2 \subset L^1$ (e in generale $L^q \subset L^p$ se $q \leq p$) se l'insieme su cui integro ha misura finita.Gli spazi l^1, l^2 intesi come spazi di successioni, sono casi particolari di L^1 ed L^2 dove l'insieme di definizione è $\mathbb{N}$ e la misura considerata è quella del conteggio, allora $\mu(\mathbb{N}) = \infty$ per questo non vale l'inclusione $L^2 \subset L^1$.

4. *Considero* $L^1([0, \infty))$ *e* $L^2([0, \infty))$. *Dimostrare che non c'è inclusione tra i due spazi.*Basta fare degli esempi: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} I_{[0,1]}(x)$ sta in L^1 ma non in L^2 perché il suo quadrato non è integrabile in 0. Invece $f(x) = \frac{1}{x} I_{[1,\infty)}(x)$ sta in L^2 ma non in L^1 perché non è integrabile all'infinito.L'inclusione $L^1 \subset L^2$ vale se "taglio la funzione al finito" e quindi se non considero il suo comportamento in un intervallo finito.Se nel primo controesempio non considero il comportamento della funzione sull'intervallo $[0, \delta]$ la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ diventa a quadrato sommabile cioè sta anche in L^2 .Non si può fare un ragionamento analogo per il secondo controesempio, quindi non può valere l'altra inclusione.

Esercizio 7.14

Data la successione di funzioni $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, tali che

$$f_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2},$$

rispondere alle seguenti domande.

1. **Calcolare** $\lim_n \|f_n\|_\infty$ **.**

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|$$

$$= \sup_{x\in[0,1]} \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}$$

Questa è una funzione continua definita su un compatto e ammette massimo e minimo. Cerco i punti in cui la derivata si annulla:

$$f_n'(x) \geq 0$$

$$n(1+n^2x^2) * \frac{1}{2\sqrt{x}} - nn^2 2x\sqrt{x} \geq 0$$

$$(1+n^2x^2) - 4n^2xx \geq 0$$

$$1+n^2x^2 - 4n^2x^2 \geq 0$$

$$3n^2x^2 \leq 1$$

$$x \leq \frac{1}{\sqrt{3}n}$$

Quindi le f_n crescono prima del punto $x = \frac{1}{\sqrt{3}n}$ e assumono il massimo in tale punto.Concludo che

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{\sqrt{3}n}) = \frac{n\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}n}}}{1+1/3}$$

$$= \frac{\sqrt{n}3^{-1/4}}{4/3}$$

e per $n \to \infty$, $\|f_n\|_\infty \to \infty$.

2. **Dimostrare che** $f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ **per ogni** $n \in \mathbb{N}$ **.**Voglio mostrare che

$$\frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2} \leq^? \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Moltiplicando per $\sqrt{x}$ ottengo

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} \leq^? 1$$

e moltiplicando per $1 + n^2x^2$:

$$nx \leq^? 1 + n^2x^2$$

Pongo $t = nx$, e ottengo

$$t \leq^? 1 + t^2$$

$$t^2 - t + 1 \geq^? 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 \leq 0$$

quindi l'ultima disuguaglianza è sempre verificata, e lo stesso vale per quella di partenza.

3. **Calcolare** $\lim_n \|f_n\|_1$ **.**

$$\lim_n \|f_n\|_1 = \lim_n \int_0^1 |f_n(x)|\, dx$$

Calcolo il limite puntuale di $f_n(x)$: se $x = 0$, $f_n(0) = 0$. Altrimenti

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2x^2} =$$

$$1 + n^2x^2 \sim n^2x^2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{x}}{n^2x^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{nx^2} = 0$$

Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è consentito dal teorema di convergenza dominata, perché $f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ con $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1(0,1)$, allora

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \lim_n f_n(x)\, dx = \int_0^1 0\, dx = 0.$$

Osservazione: il limite della norma infinito è $+\infty$, mentre il limite della norma 1 è 0.

Esercizio 7.15

Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{\sqrt{n}}{1 + \sqrt{nx}}, \quad x \in (0,1)$$

rispondere alle seguenti domande.

1. **Dimostrare che la successione** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **è convergente in** $L^1((0,1))$ **e calcolarne il limite**.Calcolo il limite puntuale della successione:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{nx}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}*(\frac{1}{\sqrt{n}}+\sqrt{x})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0 \iff n\to\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}*\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Quindi il limite puntuale di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è $\frac{1}{\sqrt{x}}$ .Verifico se vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale e per farlo cerco una maggiorante integrabile delle f_n .Verifico se il limite puntuale è anche una maggiorante della successione:

$$\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{nx}} \leq^? \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{n}\sqrt{x} \leq^? 1+\sqrt{nx}$$

$$0 \leq^? 1, \quad \text{disuguaglianza verificata}$$

allora $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è una maggiorante integrabile, e vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_1 =$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx$$

$$= \int_0^1 \lim_{n\to\infty}(f_n(x) - \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx = \int_0^1 0\,dx = 0$$

allora $\|f_n - f\|_1 \to 0$, quindi $\frac{1}{\sqrt{x}}$ è anche il limite L^1 della successione di partenza.

2. **Mostrare che** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **non è limitata in** L^2 .Osservo che la maggiorante delle f_n , $f = \frac{1}{\sqrt{x}}$ non sta in L^2 , perché $\int_0^1 f^2\,dx = \int_0^1 1/x\,dx = +\infty$ .Mostriamo che

$$\sup_n \int_0^1 f_n^2(x)\,dx = +\infty$$

cioè che la successione delle norme L^2 non è limitata.Siccome $f_n \to 1/\sqrt{x}$, si ha $f_n^2(x) \to 1/x$, e $\int_0^1 1/x\,dx$ diverge.Applico il lemma di Fatou alla successione $f_n^2(x)$:

$$\int_0^1 \liminf_n f_n^2(x) \leq \liminf_n \int_0^1 f_n^2(x)\,dx$$

e siccome $\liminf_n f_n^2(x) = 1/x$ si ha:

$$\int_0^1 1/x\,dx = +\infty \leq \liminf_n \int_0^1 f_n^2(x)\,dx$$

allora a maggior ragione $\sup \int_0^1 f_n^2(x)\,dx = +\infty$.

Esercizio 7.16

Sia (X, μ) uno spazio di misura con misura positiva. Supponiamo che $f \in L^p$ con $p > 1$ e $g \in L^\infty$.

1. **Mostrare che il prodotto fg sta in L^p , e che**

$$\|fg\|_p \leq \|f\|_p * \|g\|_\infty.$$

$$\int_X |fg|^p \, d\mu$$
$$= \int_X |f|^p * |g|^p \, dx$$

L^∞ è lo spazio delle funzioni essenzialmente limitate, quindi $|g(x)|^p \leq \|g\|_\infty^p$ che può essere portata fuori dall'integrale:

$$\leq \|g\|_\infty^p * \int_X |f|^p \, d\mu$$

e $f \in L^p$ implica che $\int_X |f|^p \, dx < \infty$, quindi $\|fg\|_p < \infty$.

2. **Supponendo ora che $f \in L^p \cap L^\infty$, mostrare che $f \in L^q \forall q \geq p$.** Devo mostrare che $\|f\|_q < \infty$. Se $q > p$, posso scrivere $q = p + r$, allora

$$\int_X |f|^q \, d\mu = \int_X |f|^r * |f|^p \, d\mu$$

Per ipotesi $f \in L^p \cap L^\infty$, quindi $|f|^r \leq \|f\|_\infty^r$, quindi

$$\leq (\|f\|_\infty)^r \int_X |f|^p \, d\mu$$

e se estraggo la radice q-esima:

$$\|f\|_q \leq (\|f\|_\infty)^{r/q} (\int_X |f|^p \, d\mu)^{1/q} < \infty$$

infatti entrambi i fattori al secondo membro sono limitati.

3. **Nell'ipotesi precedente, mostrare che $\limsup_{q \to +\infty} \|f\|_q \leq \|f\|_\infty$.** Sfruttando la disuguaglianza precedente:

$$\|f\|_q \leq (\|f\|_\infty)^{r/q} (\int_X |f|^p \, d\mu)^{1/q}$$

posso scrivere

$$\limsup_q \|f\|_q \leq \limsup_q (\|f\|_\infty)^{r/q} * (\int_X |f|^p \, d\mu)^{1/q}$$

$$\leq \limsup_q (\|f\|_\infty)^{(q-p)/q} * (\int_X |f|^p \, d\mu)^{1/q}$$

$$\leq \limsup_q (\|f\|_\infty)^{1-p/q} * (\int_X |f|^p \, d\mu)^{1/q}$$

$$\leq \|f\|_\infty * \limsup_q (\|f\|_\infty)^{-p/q} * (\int_X |f|^p \, d\mu)^{1/q}$$

e per $q \to \infty$, siccome sto elevando quantità limitate a 0, il limite vale 1, e rimane

$$\limsup_q \|f\|_q \leq \|f\|_\infty .$$

Osservazione: Vale anche che

$$\lim_q \|f\|_q = \|f\|_\infty$$

cioè lo spazio L^∞ è il limite degli spazi L^p . Tuttavia dimostrare la disuguaglianza inversa

$$\liminf_q \|f\|_q \geq \|f\|_\infty$$

è più complicato.

Esempio 7.1

Esistono successioni per cui nel lemma di Fatou vale la disuguaglianza stretta. Considero ad esempio la successione

$$g_n(x) = I_{(n,n+1)}(x)$$

All'aumentare di n , il tratto in cui le g_n valgono 1 si sposta sempre più a destra, quindi $g_n(x) \to 0$ puntualmente.

Le $g_n(x)$ sono misurabili e positive, quindi posso applicare Fatou:

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_n g_n \leq \liminf_n \int_{\mathbb{R}} g_n .$$

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_n g_n(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} 0 \, dx = 0$$

$$\liminf_n \int_{\mathbb{R}} I_{(n,n+1)(x)} \, dx = \liminf_n 1 = 1$$

quindi in questo caso Fatou vale con il segno di disuguaglianza stretta.

Esercizio 7.17

Supponiamo di avere una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e continua a tratti. Introduciamo la funzione

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} (f(t) - a_0/2) \, dt$$

dove a_0 è il coefficiente di Fourier della serie di Fourier di f che è ben definita. Allora rispondere alle seguenti domande.

1. **Mostrare che F è periodica**.Per mostrare la periodicità di F , osservo che $F(-\pi) = 0$, e mostro che anche $F(\pi) = 0$.

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - a_0/2)\, dt$$

e spezzando l'integrale:

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt - a_0/2 \int_{-\pi}^{\pi} dt$$

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt - a_0/2 * 2\pi$$

Sostituisco l'espressione di $a_0 = 1/\pi \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$ ottengo:

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt - \pi * 1/\pi * \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = 0$$

quindi F è periodica.Si può mostrare anche che F è continua e regolare a tratti.

2. **Calcolare i coefficienti di Fourier di F in termini di quelli di f .**Siano A_n, B_n i coefficienti di Fourier di F . Allora

$$A_1 = 1/\pi * \int_{-\pi}^{\pi} F(t) * \cos t\, dt$$

integro per parti, tenendo conto che F è la primitiva di $f - a_0/2$:

$$= 1/\pi * \{[F(t) * \sin t]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - a_0/2) \sin t\, dt\}$$

Il termine di bordo si annulla, perché il seno si annulla in π e $-\pi$. Rimane quindi

$$A_1 = 1/\pi * \{\int_{-\pi}^{\pi} a_0/2 \sin t\, dt - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t\, dt\}$$

$$A_1 = 1/\pi * \{a_0/2[-\cos t]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t\, dt\}$$

e anche il primo addendo si annulla:

$$A_1 = 1/\pi * \{-\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t\, dt\} = -b_1$$

Lo stesso vale per i B_n .

7.9 Esercizi di riepilogo

Esercizio 7.18

Mostrare, usando il teorema dell'applicazione aperta, che gli spazi di Banach non hanno dimensione numerabile.

(da qui segue che lo spazio dei polinomi su $[0,1]$ non è di Banach perché ha dimensione numerabile)

Dimostrazione

Per assurdo, sia X di Banach, di dimensione numerabile, cioè supponiamo che esista una base algebrica C numerabile, infinita. Chiamo $C = \{e_1, \dots, e_n, \dots\}$. Se chiamo $Y_1 = \mathrm{span}\{\mathrm{e}_1\}$, $Y_2 = \mathrm{span}\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2\}$, ... , $Y_n = \mathrm{span}\{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$, allora

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

Gli Y_n sono di dimensione finita e quindi sono chiusi (sono completi). Per la condizione equivalente al teorema di Baire esiste $\bar{n}$ tale che $\overset{\circ}{Y}_{\bar{n}} \neq \emptyset$. Ogni sottospazio vettoriale ha parte interna vuota (lemma $*$), quindi l'unica possibilità è che $Y_n = X$, e quindi X dovrebbe avere dimensione finita, e si ha una contraddizione perché era stato supposto infinito!

Lemma 7.2 (lemma $\ast$)

Sia X uno spazio normato e Y sottospazio vettoriale proprio di X . Allora $\overset{\circ}{Y} = \emptyset$.

Dimostrazione

Supponiamo per assurdo che $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset$.

Caso 1: Sia $0 \in \overset{\circ}{Y}$, allora esiste una bolla centrata in 0 e contenuta in Y . Sia $y \neq 0$, allora se considero $y' = r/2 \frac{y}{\|y\|}$, si ha che $\|y'\| = r/2$, allora y' è contenuto nella bolla. Allora y è un omotetico di un punto che sta nella bolla, e quindi $y = k * y'$, e quindi deve appartenere a Y che è un sottospazio vettoriale. Allora si avrebbe $Y = X$, assurdo.

Caso 2: Se suppongo che il punto interno a $\overset{\circ}{Y}$ sia x_0 , allora esiste una bolla $B(x_0, r) \in \overset{\circ}{Y}$. Allora

$$B(0,r) + x_0 = B(x_0, r) \subset Y$$

e da quest'inclusione segue che $B(x_0, r) \subset Y - x_0 = Y$, cioè anche 0 è necessariamente punto interno e ci si riconduce al caso precedente.

Osservazione 7.1

l^2 è un sottospazio di Hilbert di L^2 e quindi è un Banach di dimensione infinita. Allora la cardinalità di ogni base algebrica di l^2 dev'essere più che numerabile, mentre la dimensione di l^2 come spazio di Hilbert è numerabile (la base è data dagli e_i).

Esercizio 7.19

Sia $T : X \to Y$ un'applicazione lineare. Il grafico G_f è chiuso se e solo se le ipotesi $x_n \to x$ e $T(x_n) \to y$ implicano $y = T(x)$.

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: per il teorema del grafico chiuso, se T ha grafico chiuso allora è continua, e quindi vale la condizione 2 che è equivalente alla continuità.

$2 \longrightarrow 1$: per mostrare che il grafico è chiuso, basta mostrare che ogni punto $(x, T(x))$ che sia limite di una successione appartiene al grafico. Se ho una successione tale che $x_n \to x$ e $T(x_n) \to y$, segue che la successione $(x_n, T(x_n)) \to (x, y)$, e il fatto che $(x, y) \in G$ segue dalla condizione 2, perché si deve avere $y = T(x)$.

Esercizio 7.20

Considero uno spazio di Hilbert X , e una funzione lineare : $X \to X$ tale che $x \cdot Ty = Tx \cdot y$ (condizione $\circ$). Mostrare che T ha grafico chiuso.

Dimostrazione

Per l'esercizio precedente, mostrare che il grafico di T è chiuso equivale a mostrare che per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \to x$ e $T(x_n) \to y$ (*proprietà* $\star$), si ha che $T(x) = y$.

Considero una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che soddisfa la proprietà $\star$, e mostro che $y = T(x)$. Fisso un vettore $z \in X$, allora, siccome $x_n \to x$, segue che

$$T(z) \cdot (x_n - x) \to 0 \iff n \to \infty.$$

Inoltre applicando la condizione $\circ$ e per $n \to \infty$:

$$(x_n - x) \cdot T(z) = x_n \cdot T(z) - x \cdot T(z) = T(x_n) \cdot z - T(x) \cdot z = y \cdot z - T(x) \cdot z = (y - T(x)) \cdot z$$

e siccome il primo membro tende a 0, si avrà $(y - T(x)) \cdot z = 0$, cioè $y = T(x)$. Allora il grafico di T è chiuso e per il teorema del grafico chiuso, T è continua.

Esercizio 7.21

Considero X, Y di Banach e $T : X \to Y$ continua. Considero le seguenti condizioni:

1. esiste $c > 0$ tale che
$$\|T(x)\| \geq c\|x\| \forall x > 0$$
2. $\ker T = 0$ e $T(X)$ è chiuso in Y .

Mostrare che le condizioni 1 e 2 sono equivalenti.

Dimostrazione

$1 \longrightarrow 2$: supponiamo che $\|T(x)\| \geq c * \|x\|$ e mostriamo che $\ker T = 0$ (equivalentemente che T è iniettiva. Preso $x \in \ker T$, per ipotesi si ha

$$\|T(x)\| = 0 \geq c * \|x\|$$

e quindi $\|x\| = 0$ cioè $x = 0$ e $\ker T = \{0\}$.

Mostro ora che $T(X)$ **è chiuso in** Y , e quindi che data una successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che tende a y , allora $y \in ImT$.

Per ipotesi

$$\|T(x_n - x_m)\| \geq c * \|x_n - x_m\|, \text{ disuguaglianza 1}$$

inoltre

$$\|T(x_n - x_m)\| = \|T(x_n) - T(x_m)\| = \|y_n - y_m\|$$

ma siccome Y è di Banach e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y , allora (y_n) è di Cauchy, per la disuguaglianza 1 anche $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, e quindi converge ad un certo x poiché X è di Banach. Mostro ora che $T(x) = y$. Per la continuità di T :

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = \lim_{n\to+\infty} y_n = y,$$

quindi $y \in ImT$.

$2 \longrightarrow 1$: T è iniettiva, allora esiste un'inversa $T^{-1}\colon T(X) \to X$.

L'inversa è lineare, infatti ad esempio

$$T^{-1}(y_1+y_2) = T^{-1}(T(x_1)+T(x_2)) = T^{-1}(T(x_1+x_2)) = x_1+x_2 = T^{-1}(y_1)+T^{-1}(y_2).$$

Un operatore lineare è continuo se e solo se la norma è limitata. Per il corollario al teorema dell'applicazione aperta T^{-1} è continua, quindi ha norma limitata, e questa condizione si traduce con l'esistenza delle due costanti c, d tali che

$$c * \|x\| \leq \|T\| \leq d * \|x\|$$

e quindi in particolare vale la condizione 1.

Esercizio 7.22

Considero tre spazi di Banach:

$$l^1 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\, t.c. \sum_n |x_n| < \infty\}$$

$$l^\infty = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\, t.c. \sup_n |x_n| < \infty\}$$

$$C_0 = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\, t.c.\, x_n \to 0\}$$

1. Determinare le inclusioni tra questi spazi.
2. Mostrare che l'insieme delle successioni definitivamente nulle è denso in l^1 .
3. Mostrare che l^1 è separabile e che l^∞ non lo è.

Dimostrazione

1. Si ha che $l^1 \subset C_0 \subset l^\infty$.
2. Fisso $x \in l^1$, allora $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\sum_n |x_n| < \infty$. Considero la bolla $B_{x,r}$ e mostro che interseca l'insieme delle successioni definitivamente nulle.

$$B_{x,r} = \{x' \, t.c. \sum_n |x'_n - x_n| < r\}$$

   Costruisco una successione x' che stia nella bolla. Siccome x' ha serie convergente, esiste k tale che

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} |x_i| < r$$

   Allora, per $i = 1, \ldots, k$, pongo $x'_i = x_i$, e poi pongo $x'_i = 0 \forall i > k$ .In questo modo si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x'_n| = \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n| < r$$

   e quindi $x' = (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, che è una successione definitivamente nulla, sta nella bolla, e l'insieme delle successioni definitivamente nulle è denso in l^1 .
3. Per mostrare che l^1 è separabile basta considerare come sottoinsieme denso e numerabile le successioni a elementi razionali definitivamente nulle. l^∞ invece non è separabile. Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme $Y \subset l^\infty$ denso e numerabile. Considero un sottoinsieme $A \subset \mathbb{N}$, e considero la funzione caratteristica di A , tale che χ_A vale 1 se $x \in A$ e 0 se $x \notin A$, quindi le funzioni caratteristiche sono successioni di 0 e 1 e possono essere viste come elementi di l^∞ . Questo insieme ha cardinalità non numerabile, inoltre, dato $A \neq B$,

$$\|\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1$$

   Allora ho una quantità non numerabile di funzioni di norma 1. Le bolle aperte di raggio 1/4 centrate in queste funzioni sono disgiunte, e costituiscono una famiglia non numerabile. Allora in ogni bolla dev'esserci un elemento del sottoinsieme numerabile denso Y , e questo è assurdo.

Capitolo 8

Fonti per testo e immagini; autori; licenze

8.1 Testo

- **Corso:Analisi III I1/Spazi metrici/Spazi vettoriali** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Spazi_metrici/Spazi_vettoriali?oldid=48169 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Spazi metrici/Spazi metrici** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Spazi_metrici/Spazi_metrici?oldid=48431 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Spazi metrici/Disuguaglianze fondamentali** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Spazi_metrici/Disuguaglianze_fondamentali?oldid=48494 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Spazi metrici/Spazi di dimensione infinita ricalcati sulle norme p** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Spazi_metrici/Spazi_di_dimensione_infinita_ricalcati_sulle_norme_p?oldid=48192 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Spazi metrici/Spazi L^p** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Spazi_metrici/Spazi_L%5Ep?oldid=48346 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Spazi metrici/Definizione degli spazi L^p** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Spazi_metrici/Definizione_degli_spazi_L%5Ep?oldid=48319 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Spazi di Hilbert/Spazi con prodotto scalare** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Spazi_di_Hilbert/Spazi_con_prodotto_scalare?oldid=48251 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Spazi di Hilbert/Proiezione ortogonale** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Spazi_di_Hilbert/Proiezione_ortogonale?oldid=48396 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Spazio duale/Ricerca del duale** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Spazio_duale/Ricerca_del_duale?oldid=48122 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Spazio duale/Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Spazio_duale/Ortogonalizzazione_di_Gram-Schmidt?oldid=48424 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Disuguaglianza di Bessel/Disuguaglianza di Bessel** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Disuguaglianza_di_Bessel/Disuguaglianza_di_Bessel?oldid=48497 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio

- **Corso:Analisi III I1/Disuguaglianza di Bessel/Base di Hilbert** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Disuguaglianza_di_Bessel/Base_di_Hilbert?oldid=48206 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Disuguaglianza di Bessel/Successioni generalizzate** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Disuguaglianza_di_Bessel/Successioni_generalizzate?oldid=48165 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Disuguaglianza di Bessel/Isomorfismo di spazi di Hilbert** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Disuguaglianza_di_Bessel/Isomorfismo_di_spazi_di_Hilbert?oldid=48049 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Sistema trigonometrico/Sistema trigonometrico** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Sistema_trigonometrico/Sistema_trigonometrico?oldid=48389 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Sistema trigonometrico/Completezza del sistema trigonometrico** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Sistema_trigonometrico/Completezza_del_sistema_trigonometrico?oldid=48175 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Sistema trigonometrico/Trasformata di Fourier** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Sistema_trigonometrico/Trasformata_di_Fourier?oldid=48088 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Sistema trigonometrico/Convergenza puntuale delle serie di Fourier** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Sistema_trigonometrico/Convergenza_puntuale_delle_serie_di_Fourier?oldid=48511 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Sistema trigonometrico/Convergenza uniforme** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Sistema_trigonometrico/Convergenza_uniforme?oldid=48350 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Altri teoremi/Lo spazio L^infty** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Altri_teoremi/Lo_spazio_L%5Einfty?oldid=48331 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Altri teoremi/Caratterizzazione del duale degli spazi L^p** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Altri_teoremi/Caratterizzazione_del_duale_degli_spazi_L%5Ep?oldid=48530 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Altri teoremi/Dimostrazione del teorema nel caso mu(X) finito** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Altri_teoremi/Dimostrazione_del_teorema_nel_caso_mu(X)_finito?oldid=44405 *Contributori:* ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Altri teoremi/Teorema di Banach-Steinhaus** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Altri_teoremi/Teorema_di_Banach-Steinhaus?oldid=48321 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Altri teoremi/Applicazioni del principio di limitatezza uniforme** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Altri_teoremi/Applicazioni_del_principio_di_limitatezza_uniforme?oldid=48179 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Altri teoremi/Teorema dell'applicazione aperta** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Altri_teoremi/Teorema_dell'applicazione_aperta?oldid=48085 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Esercizi/Spazi metrici** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Esercizi/Spazi_metrici?oldid=48014 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Esercizi/Disuguaglianze fondamentali** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Esercizi/Disuguaglianze_fondamentali?oldid=48100 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Esercizi/Distanza e proiezioni** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Esercizi/Distanza_e_proiezioni?oldid=48091 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio

- **Corso:Analisi III I1/Esercizi/Spazi di Hilbert** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Esercizi/Spazi_di_Hilbert?oldid=48086 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Esercizi/Teorema di Rietz** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Esercizi/Teorema_di_Rietz?oldid=48469 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Esercizi/Polinomi di Legendre** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Esercizi/Polinomi_di_Legendre?oldid=48060 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Esercizi/Serie di Fourier** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Esercizi/Serie_di_Fourier?oldid=48428 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Esercizi/Spazi L^p** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Esercizi/Spazi_L%5Ep?oldid=48368 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio
- **Corso:Analisi III I1/Esercizi/Esercizi di riepilogo** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAnalisi_III_I1/Esercizi/Esercizi_di_riepilogo?oldid=48466 *Contributori:* Toma.luca95, ScimmiaSpaziale e Mmontrasio

8.2 Immagini

8.3 Licenza dell'opera