Utente:Dan/Elettromagnetismo/ Introduzione al corso e elementi di analisi vettoriale/Calcolo integrale

Gli operatori integrali principali sono di tre semplici tipi: integrali di linea, di superficie e di volume; ricordiamo che, a meno di integrali indefiniti, i quali hanno interesse prettamente matematico, il risultato di integrali da come risultato uno scalare. La risoluzione degli integrali non è facile: a differenza delle derivate, calcolare integrali a volte può essere addirittura impossibile analiticamente. Inoltre, solo l'esperienza e la pratica possono fornire trucchi e vantaggi nella loro soluzione, quindi un libro di testo, a parte fornire le più generiche regole e metodi conosciuti, non può fornire al lettore la stessa competenza che questo acquisirebbe dopo un duro lavoro di risoluzione di integrali.

1 Integrali di linea

Si parla di solito di integrali di linea *lungo una curva*; presa una curva Γ e un campo vettoriale $\mathbf{v}$, l'integrale del campo lungo la curva tra due punti viene scritto come:

$$\int_{A(\Gamma)}^{B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

L'infinitesimo di integrazione $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz)$ viene moltiplicato scalarmente, per il campo; l'integrale di linea si riduce quindi a risolvere tre sotto integrali:

$$\int_{A(\Gamma)}^{B} \Big(v_x dx + v_y dy + v_z dz \Big)$$

Gli integrali di linea sono largamente utilizzati in fisica, e il primo esempio che viene in mente a uno studente di fisica è, ovviamente, il **lavoro compiuto da una forza** definito proprio come l'integrale di linea della forza per lo spostamento, $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Lo spostamento $d\mathbf{l}$ è *orientato*: cambiando verso di percorrenza, il risultato dell'integrale cambia segno. Nel caso la curva su cui si calcola l'integrale è una curva chiusa (ovvero gli estremi coincidono), si parla di **circuitazione** e si indica con un integrale lungo un percorso chiuso:

$$\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$$

Il valore degli integrali di linea *dipende dalla curva percorsa*: cambiando percorso, cambia il risultato dell'integrale. Ci sono tuttavia un gruppo di campi vettoriali, detti **conservativi**, per i quali il risultato dell'integrale è *indipendente dal percorso scelto* ma dipende solo **dai punti iniziali e finali**; poiché è possibile esprimere i campi conservativi come il gradiente di un altro campo scalare detto *potenziale*, $\mathbf{v} = \nabla f$, per il teorema fondamentale del calcolo l'integrale applicato al gradiente questo corrisponde a calcolare la differenza del campo potenziale f tra gli estremi di integrazione. Il **teorema fondamentale del calcolo** può essere sintetizzato come:

$$\int_A^B \frac{df}{dx} dx = f(B) - f(A)$$

Per l'operatore gradiente si applica allo stesso modo:

$$\int_A^B (\boldsymbol{\nabla} V) \cdot d\mathbf{l} = V(B) - V(A)$$

Questi sono validi lungo qualsiasi curva che vada da A a B .

2 Integrali di superficie

Data una superficie S , definito con $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}\, dS$ il *vettore infinitesimo di superficie*, che corrisponde a un infinitesimo di superficie orientato, si parla di integrale di un campo vettoriale su una superficie come:

$$\int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Ovviamente, ci sono due versori normali alla superficie; se questa è chiusa, si prende per convenzione storica il versore uscente; se inmathbfe è aperta, una delle due direzioni va bene comunque, ricordando però che **cambiando verso del versore, cambia il segno dell'integrale**. Legato all'integrale di superficie c'è il concetto di **flusso attraverso una superficie**, definito come:

$$\Phi_S(\mathbf{v}) = \int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$$

Per poter calcolare integrali di superficie di particolari superfici, si parla spesso di *parametrizzare* una superficie attraverso una funzione del tipo: $\gamma : (u, v) \to \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$; il versore normale, in questo caso, è fornito da:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u} \times \frac{\partial \gamma}{\partial v}$$

A scanso di equivoci, in questo corso non ci spingeremo oltre le *superfici cartesiane*, che hanno una rappresentazione parametrica del tipo γ appena discusso, il quale non è la più generica forma di una superficie.

3 Integrali di volume

Dato un volume τ , presa una funzione scalare f , l'integrale di volume di f sul volume τ si scrive in forma:

$$\int_\tau f\, d\tau$$

L'infinitesimo di volume, in spazi euclidei, vale $d\tau = dxdydz$; siamo in fisica classica, non ci sposteremo in spazi di Minkowsky con geometrie strane, per cui indicheremo con $d\tau$ la terna euclidea appena indicata.

A volte si parla di integrali di volume di campi vettoriali; ricordando che un campo può essere scritto anche in forma vettoriale:

$$\mathbf{v} = \big(v_x, v_y, v_z\big) = v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}$$

Allora l'integrale di volume di un campo diventa semplicemente:

$$\begin{aligned}\int_\tau \mathbf{v} d\tau = \int_\tau \big(v_x\hat{\mathbf{x}} + v_y\hat{\mathbf{y}} + v_z\hat{\mathbf{z}}\big) d\tau =& \hat{\mathbf{x}} \int_\tau v_x\, d\tau + \hat{\mathbf{y}} \int_\tau v_y\, d\tau + \hat{\mathbf{z}} \int_\tau v_z\, d\tau = \\ =& \Big(\int_\tau v_x\, d\tau, \int_\tau v_y\, d\tau, \int_\tau v_z\, d\tau \Big)\end{aligned}$$

Gli integrali di volume sono, spesso, più facili da risolvere cambiando set di coordinate, di cui discuteremo tra poco.

4 Integrazione per parti

La regola di integrazione per parti, nel caso di funzioni a una variabile, segue dalla derivazione del prodotto:

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \dot{f} \cdot g + f \cdot \dot{g}$$

Da cui otteniamo:

$$\int f \cdot \dot{g}\, dx = f \cdot g - \int \dot{f} \cdot g\, dx$$

Questa regola può essere portata nel caso di più variabili utilizzando la divergenza del prodotto:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\mathbf{v}) = f(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f)$$

Applicando il teorema di Gauss a questo fattore, otteniamo:

$$\int_\tau \boldsymbol{\nabla} \cdot (f\mathbf{v}) d\tau = \int_\tau f(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v}) d\tau + \int_\tau \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\nabla} f) d\tau = \int_{\partial\tau} (f\mathbf{v}) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Da questa segue immediatamente la regola di integrazione per parti in più variabili:

$$\int_\tau f(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})d\tau = \int_S (f\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS - \int_\tau \mathbf{v}\cdot(\boldsymbol{\nabla}f)d\tau$$

5 Cambi di variabile

Passare in coordinate sferiche spesso può salvare la vita di molti neuroni, così come può causarne il decesso prematuro. È bene quindi, anche qui, impegnarsi e fare pratica con la soluzione degli esercizi, imparando a riconoscere quando è bene passare da un set a un altro, basandosi anche sulle simmetrie in gioco.

In generale, per effettuare un cambio di variabili occorre un'applicazione **biunivoca** $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ che fa passare, ad esempio, dalla terna (x,y,z) alle nuove (u,v,w) . Quando si applica questo cambio, bisogna prestare attenzione al calcolo integrale: esiste infatti un teorema dell'analisi che guida alla soluzione.

Teorema

Sia $T:D\to T(D)$ applicazione biunivoca e $T\in C^1$, con D aperto e $D,T(D)\subseteq\mathbb{R}^3$. Presa una funzione scalare $f:T(D)\to\mathbb{R}$; posto necessario che il determinante della trasformazione è *non nullo*:

$$\det\Big(J_T(x,y,z)\Big)\neq 0\ \forall x,y,z\in D$$

Allora si effettua la seguente trasformazione sotto il segno di integrale:

$$\int_{T(D)} f(u,v,w)\,dudvdw = \int_D f(x,y,z)\Big|\det\big(J_T(x,y,z)\big)\Big|dxdydz$$

Qui forniamo i più noti cambi di variabile con i loro *jacobiani*.

Set di variabili	**Variabili**	**Jacobiano**	**Cambio rispetto alle euclidee**
Euclidee	(x,y,z)	1	$\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=z \end{cases}$
Sferiche	(r,ϕ,θ)	$r^2\sin\theta$	$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\phi \\ y=r\sin\theta\sin\phi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$ $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta=\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases}$
Cilindriche	(r,ϕ,z)	r	$\begin{cases} x=r\cos\phi \\ y=r\sin\phi \\ z=z \end{cases}$ $\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z=z \end{cases}$

6 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

6.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Introduzione al corso e elementi di analisi vettoriale/Calcolo integrale** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Introduzione_al_corso_e_elementi_di_analisi_vettoriale/Calcolo_integrale?oldid=46144 *Contributori:* Dan

6.2 Immagini

6.3 Licenza dell'opera