

# Meccanica Quantistica Relativistica



18 febbraio 2020





wikitoLearn  
collaborative textbooks

This book is the result of a collaborative effort of a community of people like you, who believe that knowledge only grows if shared.  
We are waiting for you!

Get in touch with the rest of the team by visiting <http://join.wikitoLearn.org>

You are free to copy, share, remix and reproduce this book, provided that you properly give credit to original authors and you give readers the same freedom you enjoy.

Read the full terms at <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>



# Indice

<b>1</b>	<b>Unificazione della meccanica quantistica e della relatività</b>	<b>1</b>
1.1	Impostazione del problema . . . . .	1
1.2	Equazione di Klein-Gordon . . . . .	2
1.3	Equazione di Dirac . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Equazione di Dirac: sviluppi e conseguenze</b>	<b>9</b>
2.1	Formalismo dei bispinori e interazione elettromagnetica . . . . .	9
2.2	Bispinori: soluzioni a massa nulla . . . . .	12
2.3	Teoria di Dirac. Antiparticelle . . . . .	14
2.4	Invarianza per trasformazioni . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Riscrittura delle equazioni di Maxwell</b>	<b>22</b>
3.1	Formulazione covariante delle equazioni di Maxwell . . . . .	22
3.2	Equazioni di Maxwell in forma quantistica . . . . .	30
3.3	Operatore energia, impulso e momento angolare . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Sistemi di Particelle Identiche</b>	<b>38</b>
4.1	Introduzione . . . . .	38
4.2	Formalismo di Seconda Quantizzazione per Bosoni . . . . .	39
4.3	Formalismo di Seconda Quantizzazione per Fermioni . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Elettrodinamica quantistica</b>	<b>44</b>
5.1	Quantizzazione del campo elettromagnetico . . . . .	44
5.2	Quantizzazione del campo elettronico . . . . .	47
5.2.1	Perturbazioni dipendenti dal tempo . . . . .	48
5.2.2	Operatore di evoluzione temporale . . . . .	49
5.2.3	Rappresentazione di Schrödinger, Heisemberg e Dirac . . . . .	50
5.3	Quantizzazione dell'interazione fotone-elettrone . . . . .	51
5.3.1	Interazione cariche-campo elettromagnetico al I ordine in $e$ . . . . .	52

---

<b>6</b>	<b>Fonti per testo e immagini; autori; licenze</b>	<b>55</b>
6.1	Testo . . . . .	55
6.2	Immagini . . . . .	56
6.3	Licenza dell'opera . . . . .	56



# Capitolo 1

## Unificazione della meccanica quantistica e della relatività

### 1.1 Impostazione del problema

Nella meccanica quantistica non relativistica ad ogni osservabile è associato un operatore hermitiano. Valgono il principio di corrispondenza e di sovrapposizione (che deriva dalla linearità dell'equazione):

$$\begin{cases} \hat{x} & \rightarrow x \\ \hat{p} & \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \end{cases} \quad \psi = \sum_n a_n \psi_n$$

e la media di un operatore  $\hat{\Omega}$  è data da:

$$\langle \hat{\Omega} \rangle = \int \psi^* \hat{\Omega} \psi d^3x$$

L'interpretazione probabilistica della meccanica quantistica ci fornisce inoltre un'equazione di continuità per le probabilità:

$$\psi^* \psi = \varrho \quad \frac{\partial}{\partial t} = i\hbar \vec{\nabla} \cdot [(\vec{\nabla} \psi^*) \psi - \psi^* \vec{\nabla} \psi] = \vec{j}$$

dove la densità  $\varrho$  è definita positiva.

La conseguenza fondamentale della meccanica quantistica è la relazione di indeterminazione  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ . A questo, la relatività aggiunge "solo" la condizione  $v < c$  e la relazione  $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ . Questo ha tuttavia grosse implicazioni sullo scarto indotto da  $p$  (e quindi da  $q$ ) su  $E$ :

$$\Delta E = \Delta \left( \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} \right)$$

lo scarto indotto su  $E$  da  $p$  è esprimibile anche come  $\Delta E = \frac{\partial E}{\partial p} \Delta p$ , per cui:

$$\Delta E = \frac{c^2 p}{\sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}} \Delta p = \frac{c^2 p}{E} \Delta p$$



ricordando che  $p = \frac{E v}{c^2}$  ed utilizzando il principio di indeterminazione:

$$\Delta E = \frac{c^2 p}{E} \Delta p = v \Delta p \rightarrow \frac{\delta q \Delta E}{v} \simeq \hbar \rightarrow \Delta q \Delta E \simeq v \hbar$$

e  $v \hbar$  è una costante che al massimo vale  $c \hbar$ , per cui se  $\delta q \rightarrow 0$ ,  $\Delta E \rightarrow \infty$ . Ma sappiamo che l'energia contribuisce alla massa, per cui all'aumentare di  $\Delta E$  ci si deve aspettare la creazione di nuove particelle. *Una trattazione uniparticellare non è quindi più valida, il numero di particelle deve essere una variabile dinamica e questo non è come trattare un sistema a più particelle.*

Vediamo ora cosa accade se cerchiamo direttamente una funzione d'onda che soddisfi la relazione relativistica fra energia e impulso: questo conduce all'equazione di Klein-Gordon.

## 1.2 Equazione di Klein-Gordon

Come è noto, l'equazione di Schrodinger è basata sul principio di corrispondenza:

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

Questa equazione non è relativisticamente invariante sotto trasformazioni di Lorentz, tuttavia il principio di corrispondenza risulta conservato nella formulazione invariante:

$$p_\mu \rightarrow -i\hbar \partial_\mu$$

L'equazione quantistica relativistica per una particella libera a spin 0 ([1]) si ottiene applicando il principio di corrispondenza alla relazione relativistica sull'energia  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ :

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad \rightarrow \quad \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2} \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

o in modo più compatto, introducendo il d'alambertiano (**equazione di Klein-Gordon**):

$$\left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

Questa relazione implica, fra l'altro, che il quadrivettore impulso  $p_\mu$  sia un vettore di lunghezza fissa pari a  $m^2 c^2$ :

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

Da notare che per  $m = 0$  questa equazione si riduce all'equazione di Maxwell per i potenziali, rafforzando la conclusione che questa equazione rappresenta particelle a spin zero.



Il fatto che questa equazione sia del secondo ordine nel tempo implica che se  $\psi(\vec{r}, t)$  è una soluzione, allora anche  $\psi(\vec{r}, -t)$  è una soluzione, ovvero:

$$\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) &= E\psi(\vec{r}, t) \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, -t) &= -E\psi(\vec{r}, -t) \end{cases}$$

e quindi che una particella reale potrebbe avere energia negativa. Non si può qui escludere semplicemente la soluzione negativa in quanto questa scelta non si mantiene necessariamente nel tempo.

D'altronde, risulta naturale definire qui l'Hamiltoniana del sistema come:

$$H = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

e quindi tramite il principio di corrispondenza:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \psi(\vec{r}, t)$$

La radice dell'operatore pone subito un problema di interpretazione. Se si effettua una espansione si ottiene una equazione che contiene tutte le potenze delle derivate e quindi una teoria non locale. Queste teorie sono difficili da trattare e inoltre non rappresenta una versione preferibile all'equazione di Schrödinger e presenta ancora tempo e spazio su due piano diversi. È possibile però eliminare la radice quadrata dell'operatore prendendo il quadrato dell'energia. Questo modo di ottenere l'equazione di Klein-Gordon rende ancora più evidente il fatto che si ritrovano soluzioni a energia negativa perché ora anche le:

$$H = -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

sono soluzioni dell'equazione quadratica.

Da questa equazione deve essere possibile costruire una corrente di carica conservata perché vogliamo conservare l'interpretazione probabilistica della teoria quantistica non relativistica. Per fare questo, si procede usando la stessa tecnica come per l'equazione di Schrodinger. Consideriamo quindi l'equazione ottenuta moltiplicando l'equazione di Klein-Gordon a sinistra per  $\psi^*(\vec{r}, t)$  :

$$\psi^*(\vec{r}, t) \left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(\vec{r}, t) = 0$$

e la sua complessa coniugata:

$$\psi(\vec{r}, t) \left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^*(\vec{r}, t) = 0$$

e sottraendo:

$$\psi^*(\vec{r}, t) \left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t) \left[ \square + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi^*(\vec{r}, t) = 0$$



ovvero:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) \right] + \frac{\hbar}{2im} \vec{\nabla} \cdot [\psi^*(\nabla\psi) - \psi(\nabla\psi^*)] = 0$$

L'idea sarebbe di interpretare la quantità  $\frac{i\hbar}{2mc^2} (\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^*)$  come una densità di probabilità  $\varrho(\vec{r}, t)$ , ma questa non risulta definita positiva. Seguendo il percorso storico, quindi, questa equazione sarà abbandonata. Si tratta tuttavia di un abbandono temporaneo perché si vedrà che è possibile recuperare questa equazione ed utilizzarla per descrivere particelle a spin zero.

1. Si tratta di una particella a spin zero perché l'operatore di spin non interviene nella derivazione dell'equazione. Per la precisione, siccome si tratta dell'equazione che regge le particelle libere senza prendere in considerazione lo spin, è un'equazione che *non è specifica per particelle a spin 1/2*.

### 1.3 Equazione di Dirac

Tale problema condusse P.A.M. Dirac nel 1928 a formulare la sua equazione, che fra l'altro porta alla predizione dell'esistenza delle antiparticelle. La situazione in cui il numero delle particelle è una variabile viene detto seconda quantizzazione.

L'equazione che Dirac cercava doveva soddisfare i seguenti requisiti:

1. Deve essere lineare (per conservare il principio di sovrapposizione proprio dell'equazione di Schrödinger);
2. Deve rispettare la condizione relativistica fra  $E$  e  $p$ , comprendere le derivate di spazio e tempo sullo stesso piano (per avere una formulazione relativistica);
3. Deve contenere solo le derivate prime (per non incorrere nel problema dell'equazione di Klein-Gordon);
4. Deve tuttavia soddisfare l'equazione di Klein-Gordon  $[\square - m^2c^2/\hbar^2]\psi = 0$  (per contenere in sé la relazione relativistica  $E^2 = p^2 + m^2$ );
5. Deve essere covariante a vista (per conservare l'invarianza per trasformazioni)

Impostiamo quindi una relazione lineare con le derivate prime, imponendo in tal modo i requisiti (1) e (3):

$$E = [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta mc] \psi \Rightarrow [p_4 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta mc] \psi = 0$$

I coefficienti  $\alpha_i$  e  $\beta$  sono calcolati imponendo le altre condizioni. Moltiplichiamo infatti la relazione precedente per la sua coniugata  $[p_4 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta mc]$  per imporre le condizioni (2) e (4). Si ottiene allora:





$$\left[ p_4^2 - p_4 \sum_i \alpha_i p_i - p_4 \beta m c + \sum_i \alpha_i p_i \cdot p_4 - \sum_i \sum_j \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} p_i p_j + \right. \\ \left. - \sum_i \alpha_i \beta m c p_i + \beta m c p_4 - \beta m c \sum_i \alpha_i p_i - \beta^2 m^2 c^2 \right] \psi = 0$$

e tenendo presente che  $\alpha_i$  e  $\beta$  commutano con  $p$  (sono in effetti dei coefficienti), si ricava:

$$\left[ p_4^2 - \sum_i \sum_j \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} p_i p_j - \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) m c p_i - \beta^2 m^2 c^2 \right] \psi = 0$$

Siamo giunti quindi ad un'equazione del II ° ordine, che deve corrispondere alla relazione relativistica della condizione(4). Esplicitando la componente  $p_4$  :

$$\left[ -\frac{E^2}{c^2} + \sum_i \sum_j \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} p_i p_j + \sum_i (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) m c p_i + \beta^2 m^2 c^2 \right] \psi = 0$$

Per ottenere ora la relazione  $E^2 = p^2 + m^2$  a partire da questa equazione, dobbiamo ritrovare il termine  $p^2$  e i termini misti in  $m c p_i$  devono essere nulli. I coefficienti devono quindi sottostare alle condizioni:

$$\frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} = \delta_{ij} \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ \beta^2 = \mathbb{I}$$

ed in questo caso la relazione diventa:

$$p_4 \psi = \left[ \sum_i \alpha_i p_i + \beta m c \right] \psi$$

Bisogna ora explicitare i coefficienti da inserire nell'equazione. I coefficienti  $\alpha_i$  soddisfano la proprietà di *anticommutazione* e quelle delle matrici. Questo implica immediatamente che  $\psi$  non può essere uno scalare, ma un vettore sul quale queste matrici possono operare. La seconda proprietà ci permette di dedurre:

$$\alpha_i \beta = -\beta \alpha_i \quad \Rightarrow \quad \det \alpha_i \cdot \det \beta = (-1)^N \det \beta \cdot \det \alpha_i$$

in  $N$  dimensioni. Ma il determinante e' un numero, quindi **N deve essere pari**. Essendo anche il determinante diverso da 0, possiamo prendere le matrici inverse e dalla stessa relazione ricavare le condizioni:

$$\alpha_i^{-1} \alpha_i \beta = -\alpha_i^{-1} \beta \alpha_i \quad \Rightarrow \quad \beta = -\alpha_i^{-1} \beta \alpha_i$$





L'equazione in forma operatoriale assume questo aspetto:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{c}{i} \sum_k \alpha_k \partial_k \psi + \frac{mc^2}{\hbar} \beta \psi$$

la cui complessa coniugata è:<sup>\*</sup>[1]

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger = -\frac{c}{i} \sum_k \partial_k \psi^\dagger \alpha_k + \frac{mc^2}{\hbar} \psi^\dagger \beta$$

Seguendo il procedimento standard per trovare l'equazione di continuità, possiamo ora moltiplicare la prima per  $\psi^\dagger$  a sinistra e la seconda per  $\psi$  a destra. Sottraendo poi la seconda dalla prima si ottiene:

$$i \left[ \psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger \cdot \psi \right] = \frac{c}{i} \sum_k \left( \psi^\dagger \alpha_k \partial_k \psi + \partial_k \psi^\dagger \alpha_k \psi \right)$$

ovvero:

$$i \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = \frac{c}{i} \sum_k \partial_k (\psi^\dagger \alpha_k \psi)$$

È possibile quindi definire una densità di probabilità ed una densità di corrente di probabilità rispettivamente come:

$$\begin{aligned} \rho &= \psi^\dagger \psi \\ j_k &= c \psi^\dagger \alpha_k \psi \end{aligned}$$

ed ottenere infine l'equazione di continuità nella solita forma, dove il termine  $c\vec{\alpha}$  risulta legato alla velocità ed in cui la densità di probabilità è effettivamente definita positiva:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

Resta da soddisfare infine la condizione (5). L'equazione scritta qui è in realtà già covariante e si esplicita semplicemente moltiplicando a sinistra per  $\beta$  :

$$\frac{i\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi + i\beta \alpha_k \partial_k \psi - \frac{mc}{\hbar} \psi = 0$$

Introduciamo ora la notazione standard di Dirac, facendo le posizioni (*Matrici di Dirac*):

$$i\beta \equiv \gamma_4 \quad \beta \alpha_i \equiv \gamma_i$$

Questo permette di riscrivere l'equazione in forma più compatta:



$$\begin{aligned}
 i\gamma_4\partial_4\psi + i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}\psi - \frac{mc}{\hbar}\psi &= 0 \rightarrow \\
 -\gamma_4\frac{\hbar}{i}\partial_4\psi - \frac{\hbar}{i}\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla}\psi - mc\psi &= 0 \rightarrow \\
 (\gamma_4p_4 + \vec{\gamma} \cdot \vec{p} + mc)\psi &= 0
 \end{aligned}$$

La covarianza a vista è ormai già evidente. Riscrivendo l'equazione in termini di quadrivettori si trova la forma definitiva per l'equazione di Dirac:

$$(\gamma_\mu \cdot \hat{p}_\mu + mc)\psi = 0$$

Si può introdurre anche la notazione  $\not{P} \equiv \gamma_\mu \cdot \hat{p}_\mu$ , \* [2] che permette di scrivere l'equazione di Dirac nella forma eccezionalmente compatta:

$$(\not{P} + mc)\psi = 0$$

Evidenziamo ora alcune proprietà delle matrici  $\gamma_\mu$ . In primo luogo:

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_4^\dagger &= -i\beta^\dagger = -\gamma_4 \\
 \gamma_i^\dagger &= \alpha_1^\dagger\beta^\dagger = \alpha_i\beta = -\beta\alpha_i = -\gamma_i
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \gamma_\mu^\dagger = -\gamma_\mu$$

Dall'equazione di Dirac si ricava invece:

$$\alpha_i\beta^2\alpha_j + \alpha_j\beta^2\alpha_i = 2\delta_{ij} \Rightarrow -\beta\alpha_i\beta\alpha_j - \beta\alpha_j\beta\alpha_i = 2\delta_{ij} \Rightarrow \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = -2\delta_{ij}$$

ed in particolare, se  $i = j$ ,  $\gamma_i^2 = -\mathbb{I}$ . Inoltre, per la quarta componente:

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \Rightarrow -i\gamma_i\gamma_4 - i\gamma_4\gamma_i = 0$$

e dunque in definitiva vale l'importante relazione:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = -2\delta_{\mu\nu}$$

1. Siccome si ha a che fare con vettori, con la notazione  $\psi^\dagger$  si indica l'operazione di coniugazione complessa degli elementi più quella di inversione righe/colonne. In pratica, se  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  allora  $\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*)$ .
2. Questa notazione si usa per snellire le formule in cui compare il prodotto della matrice  $\gamma_\mu$ , quindi in generale  $\not{A} \equiv \gamma_\mu \cdot \hat{A}^\mu$ .



## Capitolo 2

# Equazione di Dirac: sviluppi e conseguenze

### 2.1 Formalismo dei bispinori e interazione elettromagnetica

Iniziamo per semplicità con il considerare una particella a impulso nullo. L'equazione in forma operatoriale diventa quindi:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \beta mc^2 \psi \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{i\beta mc^2}{\hbar} \psi$$

che può essere integrata componente per componente. In quattro dimensioni – come è il caso presente – una base di vettori è fornita banalmente da:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ricordando che  $\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$ , si ritrovano per soluzione i ben noti esponenziali:

$$\psi_1(t) = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \psi_2(t) = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ai quali risultano ora affiancate altre due soluzioni che devono essere prese in considerazione:

$$\psi_3(t) = e^{\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \psi_4(t) = e^{\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Le prime due soluzioni rappresentano l'evoluzione temporale di un'onda a due componenti: sono le funzioni rappresentanti lo "spin semintero". Le seconde soluzioni sono invece la descrizione di particelle ad energia negativa, che la teoria interpreta come "antiparticelle". La semplificazione fatta di trascurare il termine dell'impulso corrisponde in realtà al limite non relativistico, in cui il termine predominante è proprio  $\beta mc$ .

Introduciamo ora nella equazione di Dirac l'interazione elettromagnetica, operando la sostituzione  $p^\mu \rightarrow p^\mu + eA/c$ . L'equazione in forma operatoriale si trasforma allora nella seguente:

$$\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc) \psi \quad \Rightarrow \quad \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{\alpha} \cdot \vec{A} + e\Phi + \beta mc) \psi$$

Ne segue che l'Hamiltoniana di questo sistema si può scrivere nella forma  $H = H_0 + H'$ , dove  $H'$  rappresenta l'Hamiltoniana di interazione con il campo elettromagnetico:

$$H' = -\frac{e}{c} \vec{\alpha} \cdot \vec{A} + e\Phi$$

e dove  $\vec{\alpha}$ , come già detto, assume il ruolo della velocità. Questo permette di riscrivere il teorema di Ehrenfest come:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \langle \frac{\hbar}{i} [H, \vec{r}] \rangle = \langle c\vec{\alpha} \rangle$$

Le conclusioni precedenti sulle soluzioni dell'equazione di Dirac ci autorizzano a scrivere la funzione d'onda  $\psi$  in termini di un bispinore:

$$\psi = \begin{bmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{bmatrix}$$

Un bispinore è quindi un particolare vettore che può essere pensato composto di due parti ( $\varphi$  e  $\chi$ ), in cui ogni parte contiene le due componenti dello spin. Scriviamo quindi l'equazione di Dirac comprendente l'interazione elettromagnetica nel formalismo dei bispinori:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{bmatrix} = c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \begin{bmatrix} \chi' \\ \varphi' \end{bmatrix} + e\Phi \begin{bmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \varphi' \\ -\chi' \end{bmatrix}$$

dove  $\vec{\pi} = \vec{p} - e/c\vec{A}$  e si è tenuto presente che:

$$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_k \chi' \\ \sigma_k \varphi' \end{bmatrix} = \sigma_k \begin{bmatrix} \chi' \\ \varphi' \end{bmatrix}$$

Nel limite non relativistico il termine predominante è ovviamente  $mc^2 \begin{bmatrix} \varphi' \\ -\chi' \end{bmatrix}$ . Ricerchiamo ora le soluzioni per la particella libera nella forma:

$$\begin{bmatrix} \varphi' \\ \chi' \end{bmatrix} = e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$



e sostituendo questa forma nell'equazione ai bispinori scritta sopra:

$$\left\{ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} \right\} e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t} = \left\{ c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} + e\Phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} + mc^2 \begin{bmatrix} \varphi \\ -\chi \end{bmatrix} \right\} e^{-i\frac{mc^2}{\hbar}t}$$

ovvero, eliminando il fattore esponenziale in comune ai due e mai nullo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} = c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \begin{bmatrix} \chi \\ \varphi \end{bmatrix} + e\Phi \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix} - 2mc^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \chi \end{bmatrix}$$

Nel limite non relativistico predominano chiaramente i termini in  $c$  e  $c^2$ . Separando quindi l'equazione per le componenti alte e basse, nel limite non relativistico otteniamo:

$$\begin{cases} c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\chi & = 0 \\ c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}\varphi - 2mc^2\chi & = 0 \end{cases}$$

Le componenti alte restituiscono quindi in questo caso (“classico”)  $\chi = 0$  e questo è corretto: *a energie sufficientemente basse non ci sono componenti legate alle antiparticelle*. Le componenti basse ci permettono invece di giungere alla relazione:

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2mc} \varphi$$

Questa relazione permette di identificare le componenti basse come le componenti “piccole” in rapporto alle componenti alte  $\varphi$ . Queste componenti sono infatti ridotte di un fattore  $v/c \ll 1$  nel limite non relativistico rispetto alle  $\varphi$ . Sostituendo la forma delle  $\chi$  nelle componenti alte dell'equazione ai bispinori scritta sopra si ricava:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})}{2mc} \varphi + e\Phi \varphi$$

siccome vale: <sup>\*</sup>[1]

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) = \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{c} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

l'equazione per le componenti alte (particelle) nel caso non relativistico diventa quindi (*Equazione di Pauli per particelle con spin*):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[ \frac{(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A})^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2m} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e\Phi \right] \varphi$$

Ritrovare questa equazione significa che l'equazione di Dirac è effettivamente un buon punto di partenza per costruire una teoria quantistica relativistica. Infatti, le due componenti alte sono sufficienti per i due gradi di libertà associati allo



spin  $1/2$  di una particella libera, ritrovando anche il corretto momento magnetico dell'elettrone corrispondente al rapporto giromagnetico  $g=2$ . Infatti, tenendo presente che  $\vec{A} = 1/2\vec{B} \times \vec{r}$  e prendendo solo i termini al primo ordine nel campo magnetico  $\vec{B}$  :

$$\frac{1}{2m} \left[ \vec{p} - \frac{e}{2c} \vec{B} \times \vec{r} \right]^2 \simeq \frac{1}{2m} \left[ p^2 - \frac{e}{c} \vec{p} \cdot (\vec{B} \times \vec{r}) \right]$$

dalle proprietà del prodotto misto si sa che:  $\vec{p} \cdot (\vec{B} \times \vec{r}) = (\vec{p} \times \vec{B}) \cdot \vec{r} = (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{B} = \vec{L} \cdot \vec{B}$ , per cui denotando con  $\vec{S} \equiv 1/2\hbar\vec{\sigma}$  l'operatore di spin l'equazione di Pauli assume la forma:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[ \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{2mc} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} \right] \varphi$$

dove il coefficiente di interazione dello spin con il campo magnetico e' appunto  $g=2$ .

1. Vale la relazione per il prodotto scalare:  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} + i\sigma \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$  e  $\vec{\pi} = \vec{p} - e/c\vec{A}$ . Il prodotto vettoriale esplicito fornisce:

$$i\epsilon_{ijk}\sigma_k \left( p - \frac{e}{c}A \right)_i \left( p - \frac{e}{c}A \right)_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \left[ p_i p_j + \frac{e^2}{c^2} A_i A_j - \frac{e}{c} A_i p_j - \frac{e}{c} p_i A_j \right]$$

I primi due termini scompaiono (si tratta in effetti di un prodotto vettore per se' stesso), per gli altri due termini vale ricordando che  $\vec{p}$  e  $\vec{A}$  sono operatori:

$$\epsilon_{ijk} (p_i A_j + A_i p_j) = \epsilon_{ijk} (A_j p_i + [p_i, A_j] + A_i p_j)$$

il termine  $\epsilon_{ijk}(A_j p_i + A_i p_j)$  e' nullo in quanto la parentesi e' simmetrica in  $i$  e  $j$  e  $\epsilon_{ijk}$  e' antisimmetrico, resta quindi il termine  $\epsilon_{ijk}[p_i, A_j]$  e esplicitando gli operatori:

$$-i\hbar\epsilon_{ijk} (\partial_i A_j - A_j \partial_i) \text{ ovvero } -i\hbar\vec{\nabla} \times \vec{A}$$

## 2.2 Bispinori: soluzioni a massa nulla

Torniamo ora a considerare la  $\psi$  in termini di bispinori  $\begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$ .

Abbiamo visto che l'equazione in questo caso fornisce per le due componenti:

$$\begin{cases} i\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varphi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \chi + mc\varphi \\ i\frac{\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \varphi + mc\chi \end{cases}$$

Cerchiamo ora di disaccoppiare le due equazioni con una opportuna trasformazione unitaria:  $\psi' \mapsto u\psi$  e  $\gamma'_\mu \rightarrow u^\dagger \gamma_\mu u$  in modo che questa lasci l'equazione invariata. Utilizzando le matrici:





$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \rho = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

e definendo la trasformazione come  $u \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta + \rho)$ , allora:

$$uu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta + \rho) \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta + \rho) = \frac{1}{2}(\beta^2 + \beta\rho + \rho\beta + \rho^2) = \mathbb{I} + \frac{1}{2}(\beta\rho + \rho\beta)$$

Essendo:

$$\begin{aligned} \beta\rho &= \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \\ \rho\beta &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

risulta effettivamente  $uu^\dagger = \mathbb{I}$  e quindi  $u$  è unitaria. Appliciamola quindi alla  $\psi$ :

$$\psi' = u\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta + \rho) \begin{bmatrix} \varphi \\ \chi \end{bmatrix}$$

e denominando  $\psi' \equiv \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$ , si ricava:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \chi) \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi - \chi) \end{cases}$$

Operando ora con la trasformazione  $u$  anche su  $\alpha, \beta$ :

$$\begin{aligned} \alpha'_i &= u\alpha_i u^\dagger = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \\ \beta &= u\beta u^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e l'equazione diventa:

$$i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{i} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \cdot \vec{p} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} mc \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}$$

ovvero, per le singole equazioni:

$$i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\xi = \vec{\sigma} \cdot \vec{p}\xi + mc\eta$$

$$i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\eta = -\vec{\sigma} \cdot \vec{p}\eta + mc\xi$$

che si disaccoppiano completamente per particelle a massa zero. Si può tentare di interpretare queste soluzioni come neutrini, ma è stato finalmente dimostrato



che queste particelle hanno una massa, che se estremamente piccola. Quindi, anche per i neutrini queste due equazioni non si disaccoppiano perfettamente, ma “quasi”.

Occorre fare attenzione al fatto che questa equazione non vale per particella a massa zero come i fotoni, perché questi ultimi sono a spin 1, mentre l'equazione di Dirac vale solo per particelle a spin semintero  $\pm 1/2$ .

## 2.3 Teoria di Dirac. Antiparticelle

Ricerchiamo ora esplicitamente delle soluzioni all'equazione di Dirac per la particella libera. Per fare ciò, scriviamola in forma operatoriale:

$$i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc)\psi$$

e ricerchiamo delle soluzioni in termini della trasformata di Fourier:

$$\psi(\vec{r}, t) = \int \psi_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k \quad \psi_k = \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \chi_k \end{bmatrix}$$

le equazioni per i bispinori, che erano:

$$\begin{cases} i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\varphi_k &= \vec{\sigma} \cdot \vec{k}\chi_k + mc\varphi_k \\ i\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\chi_k &= \vec{\sigma} \cdot \vec{k}\varphi_k + mc\chi_k \end{cases}$$

diventano, nel caso di soluzioni nella forma di onde piane  $\psi_k = \psi_0(k)e^{-i\omega t}$ :

$$\begin{cases} \left(\frac{\hbar}{c}\omega - mc\right)\varphi_k - \hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{k}\chi_k &= 0 \\ -\hbar\vec{\sigma} \cdot \vec{k}\varphi_k + \left(\frac{\hbar}{c}\omega + mc\right)\chi_k &= 0 \end{cases}$$

Ora, questo è un sistema di equazioni nelle due componenti del bispinore e per ammettere soluzioni diverse dalla soluzione banale il suo determinante deve essere nullo. Pertanto, la condizione per avere delle soluzioni è la seguente:

$$\left(\frac{\hbar^2}{c^2}\omega^2 - m^2c^2\right) - \hbar^2(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) = 0$$

Ricordando ora che fra le proprietà delle matrici  $\sigma$  c'è la  $\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$ , si ricava:

$$(\sigma_i k_i)(\sigma_j k_j) = \frac{1}{2}(\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i)k_i k_j = k^2$$

e quindi per la condizione sul determinante:



$$\frac{\hbar^2}{c^2}\omega^2 = m^2c^2 + k^2$$

che, ricordando che  $E = \hbar\omega$  e  $p = \hbar k$ , si riduce alla ben nota relazione relativistica fra energia ed impulso  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ . In particolare deve valere:

$$\omega = \pm \frac{1}{\hbar} \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2k^2c^2} \equiv \pm \epsilon$$

l'energia puo' quindi risultare negativa.

La  $\psi$  risulta somma di funzioni a frequenza positiva e a frequenza negativa:  $\psi = \psi^{(+)} + \psi^{(-)}$ . La più bassa frequenza positiva ammessa è  $mc^2$ , mentre la più alta negativa è  $-mc^2$ . Le trasformazioni di Lorentz, inoltre, non permettono di passare da soluzioni a frequenza positiva a soluzioni a frequenza negativa.

Se si lavora per comodità in "unità naturali", dove  $\hbar = c = 1$ , le due soluzioni assumono la forma:

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(\vec{r}, t) &= \int \psi_0^{(+)}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \epsilon t)} d\vec{k} \\ \psi^{(-)}(\vec{r}, t) &= \int \psi_0^{(-)}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} + \epsilon t)} d\vec{k} \end{aligned}$$

La  $\psi^{(+)}(\vec{r}, t)$  rappresenta soluzioni che si propagano "in avanti" nel tempo, mentre la  $\psi^{(-)}(\vec{r}, t)$  rappresenta onde che si propagano "all'indietro". Questo è reso evidente mandando  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ , in quanto la soluzione negativa diventa:

$$\psi^{(-)}(\vec{r}, t) = \int \psi_0^{(-)}(\vec{k}) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \epsilon t)} d\vec{k}$$

Nell'equazione operatoriale  $\hat{E}\psi = \hbar\omega\psi$ , gli autovalori dell'energia sono dati proprio da  $\omega = \pm\sqrt{m^2 + k^2}$ , e dunque  $\psi^{(+)}(\vec{r}, t)$  e  $\psi^{(-)}(\vec{r}, t)$  sono due autofunzioni relativi ad autovalori distinti e pertanto ortogonali fra loro.

In unità naturali, il sistema di equazioni ai bispinori si scrive:

$$\begin{cases} (\omega - m)\varphi_k - \vec{\sigma} \cdot \vec{k}\chi_k = 0 \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k}\varphi_k + (\omega - m)\chi_k = 0 \end{cases}$$

che per le autofunzioni fornisce:

$$\chi_k^{(+)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{(\epsilon - m)} \varphi_k^{(+)} \quad \varphi_k^{(-)} = -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{k}}{(\epsilon + m)} \chi_k^{(-)}$$

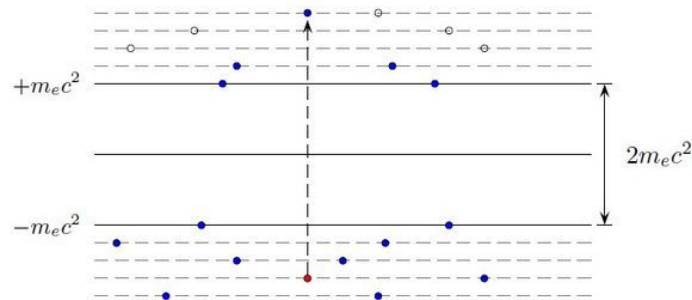
Queste relazioni evidenziano effettivamente che  $\psi^{(+)}(\vec{r}, t)$  e  $\psi^{(-)}(\vec{r}, t)$  sono ortogonali e quindi soddisfano la relazione:

$$\int \psi^{(+)}(\vec{r}, t) \psi^{(-)}(\vec{r}, t) d\vec{r} = 0$$



L'esistenza di energie negative con un limite superiore di  $-mc^2$  ma senza limite inferiore rende impossibile la stazionarietà di qualunque sistema, in quanto in seguito a scambi di energia una particella potrebbe portarsi su livelli di energia via via sempre più bassi.

Nella teoria di Dirac, la stabilità della materia viene spiegata ipotizzando che tutti gli stati a energia negativa compatibili con il principio di Pauli siano occupati (*mare di elettroni*).



Questa teoria ha diverse conseguenze. Quando si cede al sistema un'energia pari ad almeno  $2m_e c^2$ , può accadere che un elettrone in un livello di energia negativa acquisti sufficiente energia e passi in uno stato a energia positiva, creando una buca. In questo caso si osserverà un elettrone (carica  $-|e|$ ) di energia positiva  $+E$  più una buca nel mare di elettroni a energia negativa. L'osservatore vedrà quindi anche l'assenza di un elettrone di carica  $-|e|$  e energia  $-E$ , che sarà interpretata come la presenza di una particella di carica  $+|e|$  e energia  $+E$ , ovvero un *positrone*.

In maniera analoga una buca si comporta come una trappola per qualunque elettrone a energia positiva e conduce quindi alla "annichilazione" dell'elettrone con la buca, con emissione di radiazione di energia pari ad almeno  $2m_e c^2$ .

La teoria di Dirac prevede quindi la presenza di "coppie di particelle con carica opposta" ("antiparticelle") e la funzione d'onda deve tenere conto anche della possibilità di creare e distruggere particelle.

Le soluzioni relative all'autovalore negativo  $-\epsilon$  sono quindi in realtà associate ad una frequenza negativa e hanno un'energia positiva, si tratta quindi delle antiparticelle con una carica positiva: [1] in altri termini, nella teoria di Dirac l'equazione ai bispinori rappresenta coppie identiche di particelle a carica opposta.

Dalla teoria delle buche di Dirac emerge quindi una fondamentale simmetria della natura: ad ogni particella deve corrispondere una antiparticella, l'esistenza dell'una implica quella dell'altra. Per esprimere formalmente questa simmetria occorre cercare un operatore che permetta di passare da una soluzione all'altra (l'operatore *coniugazione di carica*  $\hat{C}$ ).

Consideriamo l'equazione di Dirac con il termine di interazione elettromagnetica:

$$\left[ \gamma_\mu \left( p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) + mc \right] \psi = 0$$

L'analoga equazione per il positrone avrà la carica  $e$  con il segno invertito:



$$\left[ \gamma_\mu \left( p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) + mc \right] \psi^C = 0$$

Nella teoria di Dirac il segno della carica  $e$  non ha in realtà alcun ruolo. La simmetria richiede che l'assenza di una soluzione a energia negativa dell'equazione dei positroni corrisponda a un elettrone di energia positiva. Esiste quindi una corrispondenza uno-a-uno fra le soluzioni dell'equazione di Dirac a energia positiva e a energia negativa. Per stabilire questa corrispondenza è necessario invertire il segno relativo dell'operatore impulso  $p_\mu$  e campo elettromagnetico  $A_\mu$ . Per fare questo, si prende innanzitutto la complessa coniugata dell'equazione in forma operatoriale:

$$\left[ \gamma_\mu \left( p_\mu - \frac{e}{c} A_\mu \right) + mc \right]^* \psi^* = \left[ \left( -p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \gamma_\mu^* + mc \right] \psi^* = 0$$

avendo ricordato che  $p_\mu = -i\hbar\partial_\mu$ . Se è possibile trovare una matrice non singolare  $C$  tale che:

$$(C\gamma_4)\gamma_\mu^*(C\gamma_4)^{-1} = -\gamma_\mu$$

allora l'equazione di Dirac assume la forma cercata per i positroni:

$$\left[ \gamma_\mu \left( p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) + mc \right] (C\gamma_4\psi^*) = 0$$

e in questo caso la funzione d'onda dei positroni ha la forma:

$$\psi^C = C\gamma_4\psi^* \equiv C\bar{\psi}^T$$

La matrice dell'operatore coniugazione di carica  $\hat{C}$  puo' essere costruita esplicitamente. Siccome vale la proprieta'  $\gamma_4\gamma_\mu^*\gamma_4 = \gamma_\mu^T$ , deve risultare:

$$C\gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu \quad \Rightarrow \quad C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T$$

In questa rappresentazione  $\hat{C}$  deve quindi commutare con  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  e anticommutare con  $\gamma_2$  e  $\gamma_4$ . Una scelta ragionevole è:

$$\hat{C} = i\gamma_2\gamma_4 = -\hat{C}^{-1} = -\hat{C}^\dagger = -\hat{C}^T$$

È sufficiente riuscire a costruire l'operatore  $\hat{C}$  in una qualunque rappresentazione, in quanto la trasformazione unitaria che passa da una rappresentazione all'altra una volta applicata alla matrice  $C$  fornisce la forma dell'operatore di coniugazione di carica in una qualunque altra rappresentazione. L'operatore  $\hat{C}$  permette quindi di costruire esplicitamente la funzione d'onda del positrone.

Vediamo più in dettaglio come agisce la coniugazione di carica  $\psi^C = C\hat{\psi}^T = i\gamma_2\psi^*$  su un elettrone libero di energia negativa e spin giù:

$$\psi_4(t) = e^{\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



L'operazione coniugazione fornisce:

$$i\gamma_2\psi_4^* = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} = \psi_1(t)$$

e quindi l'assenza di un elettrone di energia negativa con spin giù corrisponde alla presenza di un positrone a energia negativa e spin su. Nel caso di particella libera, quindi non interagente con un campo elettromagnetico, non c'è differenza fra elettroni e positroni e la coniugazione di carica trasforma quindi una soluzione in un'altra soluzione.

1. L'equazione di Dirac descrive evidentemente gli elettroni.

## 2.4 Invarianza per trasformazioni

consideriamo ora l'equazione di Dirac:

$$[\gamma_\mu \cdot p_\mu + mc]\psi = 0 \quad \text{ovvero} \quad \left[ \frac{\hbar}{i} \gamma_\mu \partial_\mu + mc \right] \psi = 0$$

La richiesta di covarianza per trasformazioni di Lorentz implica la ricerca di un operatore tale che  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x')$  in modo da soddisfare ancora la stessa equazione. Di conseguenza, questo equivale a cercare una matrice che soddisfi la trasformazione  $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ , e quindi che soddisfi anche le:

$$\begin{aligned} \psi'(x') &= S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \\ \psi(x) &= S^{-1}(\Lambda)\psi'(x') \\ \psi(x) &= S(\Lambda^{-1})\psi'(x) \end{aligned}$$

e cioè, in definitiva, che rispetti:

$$S^{-1}(\Lambda) = S(\Lambda^{-1})$$

Riscriviamo quindi l'equazione di Dirac in termini di  $\psi'$  e  $x'$ :

$$\left[ \frac{\hbar}{i} \tilde{\gamma}_\mu \partial'_\mu + mc \right] \psi'(x') = 0$$

dove abbiamo fatto la posizione:

$$\tilde{\gamma}_\mu = u^\dagger \gamma_\mu u \quad u^\dagger u = \mathbb{I}$$

L'equazione di Dirac può essere espressa in questi termini:

$$\frac{\hbar}{i} \gamma_\mu \partial_\mu S^{-1}(\Lambda)\psi' + mcS^{-1}(\Lambda)\psi' = 0$$



che moltiplicata a sinistra per  $S(\Lambda)$  fornisce:

$$\frac{\hbar}{i}S(\Lambda)\gamma_\mu\partial_\mu S^{-1}(\Lambda)\psi' + mc\psi' = 0$$

ricordando che vale la relazione:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}$$

l'equazione di sopra diventa:

$$\frac{\hbar}{i}S(\Lambda)\gamma_\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda_{\mu\nu}\partial'_\nu\psi' + mc\psi' = 0$$

la trasformazione  $S(\Lambda)$  rimane quindi invariata l'equazione di Dirac se risulta verificata la relazione:

$$S(\Lambda)\gamma_\mu S^{-1}(\Lambda)\Lambda_{\mu\nu} = \gamma_\nu$$

siccome la matrice  $\Lambda_{\mu\nu}$  commuta con  $S(\Lambda)$  in quanto agiscono su spazi diversi, mandiamo  $\Lambda$  in  $\Lambda^{-1}$  e moltiplichiamo poi per  $\Lambda$  :

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma_\mu S(\Lambda) = \Lambda_{\mu\nu}\gamma_\nu$$

Passiamo ora a considerare trasformazioni infinitesime:

$$\begin{aligned}\Lambda_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \epsilon\omega_{\mu\nu} \\ S(\Lambda) &= \mathbb{I} - \frac{i}{4}\epsilon\sigma_{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}\end{aligned}$$

dove le  $\sigma_{\mu\nu}$  sono 4 matrici antisimmetriche. Sostituiamo queste nella condizione su  $S(\Lambda)$  di sopra e ricordando che gli indici muti possono essere rinominati:

$$\begin{aligned}(\delta_{\mu\nu} + \epsilon\omega_{\mu\nu})\gamma_\nu &= (\mathbb{I} - \frac{i}{4}\epsilon\sigma_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta})\gamma_\mu(\mathbb{I} - \frac{i}{4}\epsilon\sigma_{\lambda\rho}\omega_{\lambda\rho}) \rightarrow \\ \epsilon\omega_{\mu\nu}\gamma_\nu &= \frac{i}{4}\epsilon(\sigma_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}\gamma_\mu - \gamma_\mu\sigma_{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}) \rightarrow \\ \epsilon\omega_{\mu\nu}\gamma_\nu &= \frac{i}{4}\epsilon\omega_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha\beta}\gamma_\mu - \gamma_\mu\sigma_{\alpha\beta}) \rightarrow \\ \frac{\omega_{\alpha\beta}}{2}(\delta_{\alpha\mu}\gamma_\beta - \delta_{\beta\mu}\gamma_\alpha) &= \frac{i}{4}\epsilon\omega_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha\beta}\gamma_\mu - \gamma_\mu\sigma_{\alpha\beta}) \rightarrow \\ 2(\delta_{\alpha\mu}\gamma_\beta - \delta_{\beta\mu}\gamma_\alpha) &= i(\sigma_{\alpha\beta}\gamma_\mu - \gamma_\mu\sigma_{\alpha\beta})\end{aligned}$$

che permette di ricavare la relazione per le matrici  $\sigma_{\alpha\beta}$  :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]$$

e quindi le rotazioni infinitesime sono espresse da:



$$S = \mathbb{I} - \frac{1}{8}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)\epsilon\omega_{\mu\nu} = \mathbb{I} - \frac{1}{4}\gamma_\mu\gamma_\nu\epsilon\omega_{\mu\nu}$$

Consideriamo ora la parte spaziale del generatore delle rotazioni:

$$\vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

ora, ricordando anche che vale  $\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ijk}\sigma_k$  :

$$\gamma_i\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} = i\epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \equiv i\epsilon_{ijk}\Sigma_k$$

dove con  $\Sigma_k$  abbiamo indicato  $\begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$ , una sorta di matrice  $\vec{\sigma}$  in 4 dimensioni. La parte spaziale risulta in definitiva:

$$S = \mathbb{I} + \frac{i}{4}\epsilon_{ijk}\Sigma_k\epsilon\omega_{ij}$$

che è una matrice simile a quelle di rotazione della  $\psi$  per particelle con spin. La parte temporale fornisce:

$$\gamma_i\gamma_4 = i \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \equiv -i\vec{\alpha}$$

ma  $c\vec{\alpha}$  risulta legata alla velocità, quindi le componenti temporali delle rotazioni infinitesime corrispondono alle trasformazioni di Lorentz propriamente dette.

Consideriamo ora l'equazione di Dirac scritta per le componenti  $\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$ . L'equazione si scrive in questo caso:

$$-\frac{\hbar}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger + \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi^\dagger\alpha - \psi^\dagger\beta mc = 0$$

siccome  $\beta^2 = \mathbb{I}$ , l'equazione di sopra si può riscrivere come:

$$\begin{aligned} \hbar\partial_4\psi^\dagger\beta^2 + \frac{\hbar}{i}\psi^\dagger\beta^2\alpha - \psi^\dagger\beta mc &= 0 \\ \frac{\hbar}{i}\partial_4\psi^\dagger\beta\gamma_4 + \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}\psi^\dagger\beta\vec{\gamma} - \psi^\dagger\beta mc &= 0 \end{aligned}$$

dove la quantità  $\psi^\dagger\beta$  rappresenta in sostanza la  $\psi^\dagger$  con le ultime due componenti cambiate di segno. Definendo  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\beta$ , l'equazione assume la forma:

$$\bar{\psi}(\gamma_\mu p_\mu - mc) = 0$$

Ne consegue che quello che deve avere senso fisico è la quantità  $\bar{\psi}$  e non la semplice  $\psi^\dagger$ . Infatti, come abbiamo appena visto, è la quantità  $\bar{\psi}$  sulla quale l'equazione di Dirac conserva la sua forma, ovvero risulta covariante. La densità di corrente





per la  $\bar{\psi}$  si può ricavare a partire dall'equazione scritta per la  $\psi$ , dove definendo  $\varrho \equiv \psi^\dagger \psi$  e  $\vec{j} \equiv c\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho = c \vec{\nabla} \cdot [\psi^\dagger \vec{\alpha} \psi] = 0$$

Ma la densità di corrente e di probabilità possono essere scritte anche come:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= c\psi^\dagger \beta^2 \vec{\alpha} \psi = c\bar{\psi} \vec{\gamma} \psi \\ \varrho &= \psi^\dagger \beta^2 \psi = \bar{\psi} \beta \psi = -i\bar{\psi} \gamma_4 \psi \end{aligned}$$

ne consegue quindi che il quadrivettore  $j_\mu = c\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$  soddisfa anch'esso l'equazione di continuità:

$$\partial_\mu j_\mu = 0$$

Siamo ora pronti per vedere come trasforma la quantità  $\bar{\psi}$  e quindi il quadrivettore corrente  $j_\mu = c\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ :

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) \quad \psi'^\dagger(x') = \psi^\dagger(x)S^\dagger(x)$$

ma:

$$\psi'^\dagger(x')\beta \equiv \bar{\psi}'(x') = \psi^\dagger \beta^2 S^\dagger(\Lambda)\beta \equiv \bar{\psi}(x)\beta S^\dagger(\Lambda)\beta$$

siccome è dimostrabile che  $\beta S^\dagger(\Lambda)\beta = S^{-1}(\Lambda)$ , la precedente è riscrivibile nella forma:

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)$$

Il termine della corrente di probabilità assume allora la forma:

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \psi = \bar{\psi} S^{-1}(\Lambda) \gamma_\mu S(\Lambda) \psi$$

Ma  $S^{-1}(\Lambda) \gamma_\mu S(\Lambda)$  è la relazione che definisce  $S(\Lambda)$  e quindi il termine appena scritto equivale a  $\bar{\psi} \Lambda_{\mu\nu} \gamma_\nu \psi$ . La legge di trasformazione diventa pertanto:

$$\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) = \bar{\psi}(x) \Lambda_{\mu\nu} \gamma_\nu \psi(x) = \Lambda_{\mu\nu} \bar{\psi}(x) \gamma_\nu \psi(x)$$

ed in definitiva:

$$\vec{j}'_\mu = \Lambda_{\mu\nu} \vec{j}_\nu$$

ovvero trasforma esattamente come un quadrivettore.

L'insieme delle matrici combinazioni di  $\gamma_\mu$ ,  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  aventi proprietà definite di trasformazione (di Lorentz) sono 16, si indicano complessivamente con  $\Gamma$  e sono denominate *covarianti bilineari*. Quelle riportate nella tabella seguente sono le uniche possibili, in quanto tutte le altre combinazioni di matrici  $\gamma_\mu$  si riducono a queste sfruttando le proprietà di queste matrici.



## Capitolo 3

# Riscrittura delle equazioni di Maxwell

### 3.1 Formulazione covariante delle equazioni di Maxwell

Consideriamo le equazioni di Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = +4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = 4\pi \frac{\rho \vec{v}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Come è noto, il fatto che la divergenza del campo magnetico  $\vec{H}$  sia identicamente nulla\* [1] induce a scrivere  $\vec{H}$  come il rotore di un campo:

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Infatti la divergenza di un rotore è identicamente nulla se sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Schwarz.\* [2] Questa scrittura permette di dedurre:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} \times \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Il campo  $\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  è quindi irrotazionale, pertanto si può a sua volta scrivere come il gradiente di un campo scalare  $\phi$  :

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{\nabla} \phi \Rightarrow \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

pertanto i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  soluzioni delle equazioni di Maxwell si possono scrivere tramite i potenziali  $\vec{A}$  e  $\phi$  :

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$



I potenziali  $\vec{A}$  e  $\phi$  prendono rispettivamente il nome di “potenziale vettore” e “potenziale scalare”. Sostituendo queste espressioni nelle equazioni del flusso del campo elettrico e della generalizzazione della legge di Ampère (ovvero le altre due equazioni di Maxwell) si ricavano le equazioni corrispondenti per i potenziali:

dove si è tenuto conto della relazione vettoriale  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$ . Queste equazioni, note anche come “equazioni elettrodinamiche” descrivono la propagazione dei due potenziali vettore e scalare, tuttavia queste due equazioni risultano accoppiate.

Grazie al margine di arbitrarietà compreso nella definizione dei potenziali è possibile però disaccoppiarle. Questo margine di arbitrarietà deriva dal fatto che applicando determinate trasformazioni ai potenziali, le equazioni di evoluzione rimangono inalterate: in altri termini, applicando queste trasformazioni ai potenziali (dette “trasformazioni di Gauge”) le espressioni dei campi elettrico e magnetico non variano. Lo scopo finale che si ha in mente qui è quello di disaccoppiare le due equazioni e di renderle allo stesso tempo invarianti relativisticamente.

Innanzitutto si osservi che siccome il rotore di un campo gradiente è sempre nullo e denotando con  $\Psi$  un campo sufficientemente regolare, si ha che la trasformazione  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi$  non altera il campo magnetico. Se si inserisce questa trasformazione nella seconda delle equazioni di Maxwell informa covariante si trova per il campo elettrico:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \vec{\nabla}\phi \rightarrow -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \vec{\nabla} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - \vec{\nabla}\phi$$

e si vede che affinché anche il campo elettrico resti invariato il potenziale scalare deve far comparire un termine che compensi quello aggiuntivo derivante dal potenziale vettore, deve trasformare cioè come  $\phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ . Quindi le trasformazioni sui potenziali:

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi \\ \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c} \frac{d\Psi}{dt} \end{cases}$$

rimangono invariate le equazioni di Maxwell. Avendo sempre in mente di disaccoppiare le due equazioni elettrodinamiche e metterle in una forma relativisticamente invariante, si può utilizzare la libertà di scelta fornita dalla  $\Psi$  per fare in modo che risulti:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi \quad \Rightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0$$

Questa particolare scelta prende il nome di **Gauge di Lorenz** ed è un invariante di Lorentz. In questo modo la prima equazione si disaccoppia e prende la forma di un’equazione delle onde:

$$-\nabla^2 \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\nabla^2 \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 4\pi \rho$$



Questa scelta risulta coerente, si vede infatti che sostituita nell'equazione per il potenziale vettore permette anche a questa equazione di disaccoppiarsi e assumere la forma di un'equazione delle onde:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= 4\pi \frac{\rho \vec{v}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \right) \Rightarrow \\ -\nabla^2 \vec{A} + \cancel{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})} &= 4\pi \frac{\rho \vec{v}}{c} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \cancel{\vec{\nabla} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} \end{aligned}$$

ovvero, in definitiva:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho \\ \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= -4\pi \frac{\rho \vec{v}}{c} \end{aligned}$$

Queste due equazioni possono ormai essere riscritte direttamente in forma invariante utilizzando l'operatore D'alambertiano  $\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  che, come è noto, è un invariante relativistico:

$$\begin{aligned} \square \phi &= -4\pi \rho \\ \square \vec{A} &= -4\pi \frac{\rho \vec{v}}{c} \end{aligned}$$

*La gauge di Lorenz, che sfrutta la libertà insita nella definizione dei potenziali, permette quindi di esplicitare la covarianza delle equazioni dei potenziali.*

Il fatto che il d'alambertiano sia un invariante porta ad introdurre in maniera naturale due quadrivettori:

$$\begin{aligned} A_\mu &\equiv (\vec{A}, \phi) && \text{quadrivettore potenziale} \\ j_\mu &\equiv (\rho \vec{v}/c, \rho) && \text{quadrivettore corrente} \end{aligned}$$

L'introduzione di un quadrivettore potenziale è del tutto lecita. Non deve sfuggire infatti che la gauge di Lorenz è in effetti la quadridivergenza di questo quadrivettore, che risulta pertanto invariante. In altri termini, l'imposizione della gauge di Lorenz ai potenziali vettore e scalare oltre che disaccoppiare le equazioni dei potenziali, rendono questi le componenti di un quadrivettore invariante.

In termini di questi due quadrivettori, le equazioni dei potenziali assumono immediatamente una forma invariante relativistica estremamente compatta:

$$\square A_\mu = -4\pi j_\mu$$

Si consideri ora una generica rotazione:

$$\begin{cases} x' &= \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' &= z \end{cases}$$



Il gradiente definito come:

$$\vec{\nabla} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

trasforma come:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}$$

e quindi il gradiente trasforma esattamente come un vettore. Considerando invece le trasformazioni di Lorentz:

$$\begin{cases} z' &= \gamma(z + vt) \\ ct' &= \gamma \left( ct + z \frac{v}{c} \right) \end{cases}$$

il gradiente trasforma come:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial(ct)}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial(ct)} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial z} - \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial(ct)} \right) \\ \frac{\partial}{\partial(ct')} &= \frac{\partial(ct)}{\partial(ct')} \frac{\partial}{\partial(ct)} + \frac{\partial z}{\partial(ct')} \frac{\partial}{\partial z} = \gamma \left( \frac{\partial}{\partial(ct)} - \frac{v}{c} \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{cases}$$

e quindi anche nel caso di trasformazioni di Lorentz il gradiente trasforma come un vettore. Si possono quindi introdurre i quadri-vettori:

$$x_\mu \equiv (\vec{r}, ct) \quad \partial_\mu \equiv \left( \vec{\nabla}, -\frac{\partial}{\partial ct} \right)$$

e i rispettivi controvarianti:

$$x^\mu \equiv (\vec{r}, -ct) \quad \partial^\mu \equiv \left( \vec{\nabla}, \frac{\partial}{\partial ct} \right)$$

in questo modo  $x_\mu x^\mu = r^2 - c^2 t^2$  e' il quadrintervallo e  $\partial_\mu \partial^\mu = \square$  è il d'alambertiano. Con questa notazione, la gauge di Lorenz si esprime come  $\partial_\mu A^\mu = 0$ .

L'introduzione di un formalismo relativisticamente invariante permette di definire un tensore elettromagnetico. Infatti vale:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} \Rightarrow H_z = \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \quad \text{ovvero} \quad H_k = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

per il campo elettrico vale una relazione analoga:

$$E_z = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \phi = \partial_4 A_3 - \partial_3 A_4$$

Si è portati quindi ad introdurre un *tensore elettromagnetico* definito come:



$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \equiv \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -E_x \\ -H_z & 0 & H_x & -E_y \\ H_y & -H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$$

e che trasforma evidentemente come:

$$F'_{\mu\nu}(x'_\lambda) = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma F_{\rho\sigma}(x_\lambda)$$

Si vedrà ora come trasformano alcune delle componenti di questo tensore a titolo di esempio.

$$H'_z = F'_{12} = \Lambda_1^\rho \Lambda_2^\sigma F_{\rho\sigma} = F_{12} = H_z$$

$$E'_z = F'_{43} = \Lambda_4^\rho \Lambda_3^\sigma F_{\rho\sigma} = \Lambda_4^4 \Lambda_3^3 F_{43} + \Lambda_3^4 \Lambda_4^3 F_{34} = \gamma^2(F_{43} + \beta^2 F_{34}) = \gamma^2(F_{43} - \beta^2 F_{34}) = F_{43} = E_z$$

$$H'_x = F'_{23} = \Lambda_2^\rho \Lambda_3^\sigma F_{\rho\sigma} = \Lambda_2^2 \Lambda_3^\sigma F_{2\sigma} = \Lambda_3^3 F_{23} + \Lambda_3^4 F_{24} = \gamma(H_x - \beta E_y)$$

e in maniera analoga per le altre componenti.

Si possono ora considerare le equazioni di Maxwell. Si considerino prima quelle senza sorgenti:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = \epsilon_{abc} \partial_a F_{bc} = 0$$

la quarta componente fornisce:

$$\partial_2 F_{34} + \partial_3 F_{42} + \partial_4 F_{23} = -\partial_y E_z + \partial_z E_y - \frac{1}{c} \partial_t H_x$$

ovvero proprio l'equazione  $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} = 0$ . Le equazioni senza sorgenti possono quindi scriversi in termini del tensore elettromagnetico:

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu} \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0$$

Per le altre equazioni risulta:

$$\partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = 4\pi \rho = \partial_1 F_{41} + \partial_2 F_{42} + \partial_3 F_{43}$$

e siccome il termine  $\partial_4 F_{44} = 0$ , questa equazione assume la forma  $\partial^\lambda F_{4\lambda} = 4\pi j_4$ . Generalizzando l'altra equazione si trova per la coppia di equazioni con le sorgenti:

$$\partial^\lambda F_{\mu\lambda} = 4\pi j_\mu$$

Si consideri ora la forza di Lorentz  $\vec{F} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H})$ . Se si introduce la densità di carica  $\rho$  si può definire una densità di forza di Lorentz  $\vec{\mathcal{F}} = \rho(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H})$ . Si consideri la componente lungo  $z$  di questa densità  $\vec{\mathcal{F}}$  in termini del tensore elettromagnetico e si tenga presente che vale  $j_\mu = (\rho \frac{\vec{v}}{c}, \rho)$ :



$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_z &= \rho E_z + \frac{\rho}{c} (v_x H_y - v_y H_x) = \rho E_z + \frac{\rho}{c} v_x H_y - \frac{\rho}{c} v_y H_x = \\
 &= \rho F_{43} + \frac{\rho v_x}{c} F_{31} - \frac{\rho v_y}{c} F_{23} = j_4 F_{43} + j_1 F_{31} - j_2 F_{23} = \\
 &= j_4 F_{43} + j_1 F_{31} + j_2 F_{32} + \underbrace{j_3 F_{33}}_{=0} = j^\mu F_{3\mu}
 \end{aligned}$$

Lo stesso calcolo può applicarsi alle altre componenti della densità di forza, risulta quindi:

$$\mathcal{F}_i = j^\mu F_{i\mu}$$

Per la quarta componente si ha:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_4 &= j^\mu F_{4\mu} = j^1 F_{41} + j^2 F_{42} + j^3 F_{43} + \cancel{j^4 F_{44}}^0 = \frac{\rho}{c} v_x E_x + \frac{\rho}{c} v_y E_y + \frac{\rho}{c} v_z E_z = \frac{\rho}{c} \vec{v} \cdot \vec{E} = \\
 &= \rho \left( \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c} \right) \cdot \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\vec{\mathcal{F}} \cdot \vec{v}}{c}
 \end{aligned}$$

e cioè la densità di potenza.  $\mathcal{F}_\lambda$  costituisce quindi un quadrivettore le cui componenti sono la densità di forza di Lorentz e la densità di potenza:

$$\mathcal{F}_\lambda = j^\mu F_{\lambda\mu}$$

Deve allora essere possibile definire un “potenziale” a partire dal quadrivettore  $\mathcal{F}_\lambda$  tale che  $\mathcal{F}_\lambda = -\partial^\mu T_{\lambda\mu}$ . In base alla forma covariante delle equazioni di Maxwell si può scrivere:

$$\mathcal{F}_\lambda = \underbrace{\frac{1}{4\pi} \partial^\rho F_\rho^\mu}_{=j^\mu} F_{\lambda\mu} = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{4\pi} F_\rho^\mu \partial^\rho F_{\lambda\mu} = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial_\rho F_{\lambda\mu}$$

L’idea è di far uscire una divergenza totale manipolando opportunamente questa equazione in modo da poter trovare l’espressione esplicita del “potenziale”  $T_{\lambda\mu}$ . A questo fine, scambiando gli indici  $\rho$  e  $\mu$  nel secondo pezzo di quest’ultima equazione:

$$-\frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial_\rho F_{\lambda\mu} = -\frac{1}{4\pi} F^{\rho\mu} \partial_\mu F_{\lambda\rho}$$

e sommando:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_\lambda &= \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{8\pi} \left( \frac{1}{4\pi} F^{\mu\rho} \partial_\rho F_{\lambda\mu} + \frac{1}{4\pi} F^{\rho\mu} \partial_\mu F_{\lambda\rho} \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\rho} (\partial_\rho F_{\lambda\mu} - \partial_\mu F_{\lambda\rho}) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\rho} (\partial_\rho F_{\lambda\mu} - \partial_\mu F_{\lambda\rho} - \partial_\lambda F_{\mu\rho} + \partial_\lambda F_{\mu\rho})
 \end{aligned}$$



notando ora che  $\partial_\rho F_{\lambda\mu} = -\partial_\rho F_{\mu\lambda}$  si ha:

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\rho} \left( \underbrace{-\partial_\rho F_{\mu\lambda} - \partial_\mu F_{\lambda\rho} - \partial_\lambda F_{\mu\rho}}_{=\epsilon_{\lambda\mu\rho} \partial^\rho F^{\lambda\rho} \equiv 0} + \partial_\lambda F_{\mu\rho} \right)$$

per cui:

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\rho} (\partial_\lambda F_{\mu\rho}) = \frac{1}{4\pi} \partial^\rho (F_\rho^\mu F_{\lambda\mu}) - \frac{1}{16\pi} \partial_\lambda (F^{\mu\rho} F_{\mu\rho})$$

rinominando ora gli indici muti  $\mu$  in  $\nu$  e  $\rho$  in  $\mu$  nel primo termine e mandando l'indice muto  $\mu$  in  $\nu$  nel secondo termine, si ottiene:

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{1}{4\pi} \partial^\mu (F_\mu^\nu F_{\lambda\nu}) - \frac{1}{16\pi} \partial_\lambda (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho})$$

notando infine che  $\partial_\lambda = g_{\lambda\mu} \partial^\mu$  si ricava:

$$\mathcal{F}_\lambda = \frac{1}{4\pi} \partial^\mu (F_\mu^\nu F_{\lambda\nu}) - \frac{1}{16\pi} g_{\lambda\mu} \partial^\mu (F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}) = \partial^\mu \left( \frac{1}{4\pi} F_\mu^\nu F_{\lambda\nu} - \frac{1}{16\pi} g_{\lambda\mu} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} \right)$$

che permette di definire il “potenziale” come:

$$\mathcal{F}_\lambda = -\partial^\mu T_{\lambda\mu} \quad T_{\lambda\mu} \equiv -\frac{1}{4\pi} F_\mu^\nu F_{\lambda\nu} + \frac{1}{16\pi} g_{\lambda\mu} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}$$

che prende il nome di *Tensore energia-impulso elettromagnetico*.

Questo tensore è simmetrico. Infatti, scambiando  $\mu$  e  $\lambda$  nel secondo passaggio:

$$F_{\mu\nu} F_\lambda^\nu = -F_{\nu\mu} F_\lambda^\nu = F_\mu^\nu F_{\nu\lambda} = F_\lambda^\nu F_{\mu\nu}$$

Analizziamo ora le componenti principali di questo tensore.

$$T_{41} = -\frac{1}{4\pi} F_{4\nu} F_1^\nu = -\frac{1}{4\pi} F_{42} F_1^2 - \frac{1}{4\pi} F_{43} F_1^3 = -\frac{1}{4\pi} (E_y H_z - E_z H_y) = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H})_x = S_x$$

in quanto  $g_{41} = 0$ .

$$T_{12} = -\frac{1}{4\pi} F_{1\nu} F_2^\nu = -\frac{1}{4\pi} F_{13} F_2^3 - \frac{1}{4\pi} F_{14} F_2^4 = -\frac{1}{4\pi} (E_x E_y - H_y H_x) \equiv -\sigma_{xy}$$

per l'ultimo termine, ricordando che i termini diagonali sono nulli:

$$\begin{aligned} T_{44} = & -\frac{1}{4\pi} F_{4\nu} F_4^\nu + \frac{1}{16\pi} g_{44} F^{\rho\nu} F_{\rho\nu} = \frac{1}{4\pi} (F_{41} F_1^4 + F_{42} F_2^4 + F_{43} F_3^4) + \\ & -\frac{1}{16\pi} (F^{12} F_{12} + F^{13} F_{13} + F^{14} F_{14} + F^{21} F_{21} + F^{23} F_{23} + F^{24} F_{24} + \\ & + F^{31} F_{31} + F^{32} F_{32} + F^{34} F_{34} + F^{41} F_{41} + F^{42} F_{42} + F^{43} F_{43}) \end{aligned}$$





ricordando la forma del tensore elettromagnetico, il termine si può riscrivere come:

$$\begin{aligned} T_{44} &= -\frac{1}{4\pi} (-E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{16\pi} g_{44} (-2H_x^2 - 2H_y^2 - 2H_z^2 + 2E_x^2 + 2E_y^2 + 2E_z^2) = \\ &= \frac{1}{4\pi} E^2 - \frac{1}{16\pi} (-2H_x^2 - 2H_y^2 - 2H_z^2 + 2E_x^2 + 2E_y^2 + 2E_z^2) \\ &= \frac{1}{4\pi} E^2 + \frac{1}{8\pi} H^2 - \frac{1}{8\pi} E^2 = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \end{aligned}$$

In definitiva il tensore energia-impulso espresso come matrice assume la forma:

$$T_{\lambda\nu} \equiv \begin{pmatrix} -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} & \frac{1}{c} S_x \\ -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} & \frac{1}{c} S_y \\ -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} & \frac{1}{c} S_z \\ \frac{1}{c} S_x & \frac{1}{c} S_y & \frac{1}{c} S_z & \mathcal{H} \end{pmatrix}$$

dove:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{1}{4\pi} (E_i E_j + H_i H_j) - \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \delta_{ij} = \text{tensore degli sforzi di Maxwell} \\ S_i &= \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \text{vettore di Poynting} \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \text{energia} \end{aligned}$$

Si consideri ora la quarta componente della densità di forza:

$$\mathcal{F}_4 = \partial^\lambda T_{4\lambda} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T_{44} - \partial^i T_{4i}$$

integrando si trova:

$$\underbrace{\int_{\mathcal{V}} \mathcal{F}_4 dV}_{\text{lavoro}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} T_{44} dV - \int_{\mathcal{V}} \partial^i T_{4i} dV \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c} \frac{dE_{\text{cariche}}}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{dE_{\text{e.m.}}}{dt} - \frac{1}{c} \int_{\Sigma} S_i d\sigma_i$$

Il lavoro rappresenta un'energia per unità di tempo (l'energia posseduta dalle cariche), mentre l'integrale di superficie rappresenta il flusso del vettore di Poynting, ovvero il flusso di energia uscente dal volume considerato. Ne consegue la legge di conservazione:

$$\frac{d}{dt} (E_{\text{cariche}} + E_{\text{e.m.}}) = -\frac{d}{dt} E_{\text{uscita}}$$

che esprime il fatto che se la somma dell'energia delle particelle e del campo elettromagnetico in un determinato volume non è costante, allora significa che esiste un flusso di energia uscente da questo volume.



Vediamo ora le componenti spaziali della densità di forza:

$$\mathcal{F}_i = -\partial^\lambda T_{i\lambda} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} T_{i4} - \partial^j T_{ij}$$

e integrando:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathcal{F}_i dV = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} T_{i4} dV - \int_{\mathcal{V}} \partial^j T_{ij} dV \Rightarrow \frac{d}{dt} P_{i\text{cariche}} = -\frac{d}{dt} P_{i\text{e.m.}} - \int_{\Sigma} T_{ij} \sigma_j$$

ovvero:

$$\frac{d}{dt} (P_{i\text{cariche}} + P_{i\text{e.m.}}) = - \int_{\Sigma} T_{ij} \sigma_j$$

Le due equazioni nel riquadro costituiscono i cosiddetti “teoremi di bilancio del tensore  $T_{\mu\nu}$ ”.

1. Si ricordi che questa scrittura implica che i monopoli magnetici non esistano.
2. Vale forse la pena di ricordare che le condizioni per la validità del teorema di Schwarz sono che la funzione deve essere di classe  $C^{(2)}$  e che sia definita su un insieme aperto e semplicemente connesso.

### 3.2 Equazioni di Maxwell in forma quantistica

Consideriamo ora invece le equazioni di Maxwell nel vuoto e lavoriamo in unità naturali:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases}$$

Poiché non ha senso scriverle come un'equazione d'onda nello spazio delle  $x$ , [1] passiamo nello spazio delle  $k$  tramite la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int \vec{E}_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \int \vec{H}_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k} \end{aligned}$$

che sostituite nelle equazioni di Maxwell forniscono:

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{H}_k = 0 \\ i\vec{k} \times \vec{H}_k = \vec{E}_k \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E}_k = 0 \\ -i\vec{k} \times \vec{E}_k = \vec{H}_k \end{cases}$$

Bisogna ora naturalmente garantire che  $\vec{E} = \vec{E}^*$  e  $\vec{H} = \vec{H}^*$ . [2] Siccome vale:



$$\vec{E}^*(\vec{r}) = \int \vec{E}_k^* e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k} = \int \vec{E}_{-k}^* e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}$$

deve quindi risultare:

$$\begin{cases} \vec{E}_k^* = \vec{E}_{-k} \\ \vec{H}_k^* = \vec{H}_{-k} \end{cases}$$

che rappresentano sei condizioni.

Siccome: \* [3]

$$i\vec{k} \times \vec{H}_k = \vec{E}_k \quad \rightarrow \quad i\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{H}_k] = \vec{k} \times \vec{E}_k \quad \rightarrow \quad i(\vec{k} \cdot \vec{H}_k)\vec{k} - ik^2\vec{H}_k = \vec{k} \times \vec{E}_k$$

si deduce senz'altro che: \* [4]

$$\vec{H}_k = \frac{i}{k^2} \vec{k} \times \vec{E}_k$$

Per svincolarsi ora dalla condizione di realtà si fa la posizione:

$$\begin{cases} \vec{E}_k = N(k) (\vec{f}_k + \vec{f}_{-k}^*) \\ \vec{E}_k = -ikN(k) (\vec{f}_k + \vec{f}_{-k}^*) \end{cases}$$

dove  $N(k)$  è una costante di normalizzazione che sarà calcolata fra breve. Questa relazione implica a sua volta:

$$\begin{cases} \vec{E}_k = \vec{E}_{-k} \\ \vec{H}_k = \vec{H}_{-k} \end{cases}$$

Si consideri ora l'equazione di Maxwell:

$$i\vec{k} \times \vec{E}_k = \vec{H}_k$$

sostituendo in questa l'espressione per  $\vec{H}_k$  trovata sopra si trova:

$$i\vec{k} \times \vec{E}_k = \frac{i}{k^2} \vec{k} \times \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}_k \rightarrow i\vec{k} \left( \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}_k + \vec{E}_k \right) = 0 \rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + k^2 \right) \vec{E}_k$$

ovvero formalmente:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + ik \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} - ik \right) \vec{E}_k = 0$$

Essendo ora:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - ik \right) \vec{E}_k = \vec{H}_k - ik\vec{H}_k = ikN(k) (\vec{f}_k - \vec{f}_{-k}^*) - ikN(k) (\vec{f}_k + \vec{f}_{-k}^*) = -2ikN(k) \vec{f}_k$$



si può sostituire questo risultato nella precedente ottenendo:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + ik\right) 2ikN(k)\vec{f}_k = 0$$

ovvero:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\vec{f}_k = k\vec{f}_k$$

Dalle rimanenti equazioni si ricava invece:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{E}_k = 0 &\rightarrow \vec{k} \cdot \vec{f}_k + \vec{k} \cdot \vec{f}_{-k}^* = 0 \\ \vec{k} \cdot \left(\frac{\vec{k} \times \vec{E}_k}{k^2}\right) = 0 &\rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{k} \cdot \vec{f}_k + \vec{k} \cdot \vec{f}_{-k}^* = 0 \end{aligned}$$

che implicano:

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{f}_k = 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{f}_{-k}^* = 0 \end{cases}$$

ovvero:

$$\vec{k} \cdot \vec{f}_k = 0$$

Combinando ora le due relazioni di sopra si ricava la seguente:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\vec{f}_k = k\vec{f}_k - \frac{\vec{k}}{k}(\vec{k} \cdot \vec{f}_k) \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}\vec{f}_k = k\left[\vec{f}_k - \frac{\vec{k}}{k^2}(\vec{k} \cdot \vec{f}_k)\right]$$

che scritta per componenti fornisce:

$$i\frac{\partial}{\partial t}(f_k)_i = \hat{W}_{ij}(f_k)_j \quad \hat{W}_{ij} \equiv k\left(\delta_{ij} - \frac{k_i \cdot k_j}{k^2}\right)$$

Consideriamo ora il prodotto scalare di questa con le  $k_i$  :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\vec{k} \cdot \vec{f}_k = k_i \hat{W}_{ij}(f_k)_j$$

ma:

$$k_i \hat{W}_{ij} = k(\vec{k} \cdot \vec{f}_k - \vec{k} \cdot \vec{f}_k)$$

e dunque  $\vec{k} \cdot \vec{f}_k$  e' soluzione di  $i\frac{\partial}{\partial t}\vec{k} \cdot \vec{f}_k = 0$ . In altre parole, imposto il valore  $\vec{k} \cdot \vec{f}_k$  all'inizio, questo si conserva nel tempo.

Le equazioni di Maxwell si riducono quindi in definitiva a:



$$\begin{cases} i \frac{\partial}{\partial t} \vec{k} \cdot \vec{f}_k = k_i \hat{W}_{ij} (\vec{f}_k)_j \\ \vec{k} \cdot \vec{f}_k = 0 \Big|_0 & \text{Condizione Iniziale} \\ \hat{W}_{ij} = k \left( \delta_{ij} - \frac{k_i \cdot k_j}{k^2} \right) \end{cases}$$

che di fatto è un'equazione di tipo Schrodinger con  $\hat{W}_{ij}$  come operatore.

1. Il fotone e' a massa nulla e viaggia sempre a velocita'  $v \equiv c$ , di conseguenza lo spazio delle  $x$ , le posizioni, non ha senso per esso.
2. Richiesta necessaria per garantire che i campi siano reali.
3. Si sfrutta qui la relazione del doppio prodotto vettore  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ .
4. I vettori  $\vec{k}$ ,  $\vec{H}$  e  $\vec{E}$  sono perpendicolari fra loro.

### 3.3 Operatore energia, impulso e momento angolare

Dimostreremo ora che l'operatore  $\hat{W}$  può essere effettivamente interpretato come operatore energia, in analogia all'equazione di Schrödinger.

Dalla sua definizione, il valore medio è dato da:

$$\langle \hat{W} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}_k^* \hat{W} \vec{f}_k d\vec{k} = \int_{-\infty}^{+\infty} k \vec{f}_k^* \vec{f}_k d\vec{k}$$

Si noti incidentalmente che per particelle a massa nulla, siccome vale  $E^2 - k^2 = 0$ , la relazione risulta automaticamente dimostrata.

L'energia del campo elettromagnetico è data da:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E}^2 + \vec{H}^2) d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E}_k \cdot \vec{E}_{k'} + \vec{H}_k \cdot \vec{H}_{k'}) e^{i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{r}} d\vec{k} d\vec{k}' d\vec{r}$$

e siccome vale la relazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = (2\pi)^2 \delta(\vec{k})$$

si ricava per l'energia:

$$\mathcal{E} = \frac{(2\pi)^3}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E}_k \cdot \vec{E}_{-k} + \vec{H}_k \cdot \vec{H}_{-k}) d\vec{k}$$

ma  $\vec{H}_k = \frac{i}{k^2} \vec{k} \times \vec{E}_k$  per cui risulta: \* [1]



$$\vec{H}_k \cdot \vec{H}_{-k} = \frac{1}{k^2} \vec{E}_k \cdot \vec{E}_{-k}$$

e si ottiene:

$$\mathcal{E} = 4\pi^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \vec{E}_k \cdot \vec{E}_{-k} + \frac{1}{k^2} \vec{E}_k \cdot \vec{E}_{-k} \right) d\vec{k}$$

In termini di  $\vec{f}$  risulta:

$$\mathcal{E} = 4\pi^3 \int_{-\infty}^{+\infty} N^2(k) \left[ (\vec{f}_k + \vec{f}_{-k}^*) (\vec{f}_{-k} + \vec{f}_k^*) - (\vec{f}_k - \vec{f}_{-k}^*) (\vec{f}_{-k} - \vec{f}_k^*) \right] d\vec{k}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 4\pi^3 \int_{-\infty}^{+\infty} N^2(k) \left[ \vec{f}_k \cdot \vec{f}_{-k} + \vec{f}_k \cdot \vec{f}_k^* + \vec{f}_{-k} \cdot \vec{f}_{-k}^* + \vec{f}_{-k} \cdot \vec{f}_k^* - \right. \\ &\quad \left. - \vec{f}_k \cdot \vec{f}_{-k} + \vec{f}_k \cdot \vec{f}_k^* + \vec{f}_{-k} \cdot \vec{f}_{-k}^* - \vec{f}_{-k} \cdot \vec{f}_k^* \right] d\vec{k} = \\ &= 16\pi^3 \int_{-\infty}^{+\infty} N^2(k) \vec{f}_k^* \cdot \vec{f}_k d\vec{k} \end{aligned}$$

e questa è esattamente la definizione di valor medio di  $\hat{W}$  a patto di porre:

$$N(k) = \sqrt{\frac{k}{4\pi^3}}$$

e cioè l'operatore  $\hat{W}$  rappresenta effettivamente l'energia se:

$$\begin{cases} \vec{E}_k &= \sqrt{\frac{k}{4\pi^3}} (\vec{f}_k + \vec{f}_{-k}^*) \\ \vec{E}_{-k} &= -\frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{k^3}{\pi}} (\vec{f}_k + \vec{f}_{-k}^*) \end{cases}$$

Sia ora una soluzione con  $k = \omega$ , cioè del tipo  $f_k = f_k^0 e^{-i\omega t}$ . L'energia è quindi fissata da  $\omega$ :

$$\langle \omega \rangle = \omega \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}_k^* \cdot \vec{f}_k d\vec{k}$$

il che implica che le  $\vec{f}_k$  siano normalizzate.

Riscriviamo ora l'impulso associato al campo. Il vettore di Poynting ha la forma:

$$\vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{r}$$

ovvero:



$$\vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\vec{E}_k \times \vec{H}_{k'}] e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{r}} d\vec{k} d\vec{k}' d\vec{r} = 2\pi^3 \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E}_k \times \vec{H}_k) d\vec{k}$$

ma:

$$\vec{E}_k \times \vec{H}_k = \vec{E}_k \times \left( -\frac{i}{k^2} \vec{k} \times \vec{E}_{-k} \right)$$

e l'ultimo termine per la regola sul prodotto triplo fornisce:

$$-\frac{i}{k^2} (\vec{E}_k \cdot \vec{E}_{-k}) \vec{k}$$

da cui:

$$\vec{p} = -(i2\pi^3) \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{E}_k \cdot \vec{E}_{-k}) \frac{\vec{k}}{k^2} d\vec{k}$$

ed esprimendo in questa equazione i campi in termini delle  $\vec{f}_k$  :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= -(i2\pi^3) \int_{-\infty}^{+\infty} N^2(k) (\vec{f}_k + \vec{f}_{-k}^*) ik (\vec{f}_{-k} - \vec{f}_k^*) d\vec{k} = \\ &= \frac{(2\pi)^3}{16\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \frac{\vec{k}}{k^2} \left[ \vec{f}_k \cdot \vec{f}_{-k} - \vec{f}_k \cdot \vec{f}_k^* + \vec{f}_{-k}^* \vec{f}_{-k} - \vec{f}_{-k}^* \vec{f}_k^* \right] d\vec{k} \end{aligned}$$

ma  $(\vec{f}_k \cdot \vec{f}_{-k})^* = (\vec{f}_k \cdot \vec{f}_{-k})$  in quanto sono reali. Si ottiene pertanto:

$$\vec{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{k} (\vec{f}_k \cdot \vec{f}_k^*) d\vec{k}$$

e quindi  $\vec{k}$  è proprio l'impulso associato al fotone. Nello spazio delle  $x$  :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}$$

ma in realtà la  $\vec{F}(\vec{r})$  non è interpretabile dal punto di vista probabilistico. Infatti, per poter localizzare un fotone, questo deve necessariamente interagire con i campi  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  :

$$\vec{E}_k = N(\vec{k}) (\vec{f}_k + \vec{f}_{-k}^*) \quad \vec{E}(\vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d\vec{k}$$

La presenza di una radice di  $k$  (\*[2]) ci conduce infatti ad una  $\sqrt[4]{\nabla^2}$  e questo significa che determinare la  $\vec{F}(\vec{r})$  non è sufficiente per determinare i campi  $\vec{E}(\vec{r})$  e  $\vec{H}(\vec{r})$ . In altri termini: il fotone non è localizzabile esattamente e addirittura per lunghezze d'onda inferiori a quelle del fotone non ha nemmeno senso il concetto di localizzazione.

Consideriamo ora il momento angolare associato al campo elettromagnetico.



$$\vec{M} = \int_{-\infty}^{+\infty} (\vec{r} \times \vec{p}) d\vec{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{H}) d\vec{r} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{r} \times (\vec{E}_k \times \vec{H}_{k'}) e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}} d\vec{k} d\vec{k}' d\vec{r}$$

in questo caso non si può estrarre la delta dall'integrale. Però, notando che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{r} e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}} d\vec{r} = -i \vec{\nabla}_{k'} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}} d\vec{r} = -i(2\pi)^3 \vec{\nabla}_{k'} \delta^3(\vec{k} + \vec{k}')$$

e sostituendo:

$$\vec{M} = -i(2\pi)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \vec{\nabla}_{k'} \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') \right] \times (\vec{E}_k \times \vec{H}_{k'}) d\vec{k} d\vec{k}'$$

si può quindi integrare per parti e (trascurando i termini ad infinito che si annullano) ottenere:

$$\vec{M} = -i(2\pi)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^3(\vec{k} + \vec{k}') \vec{\nabla}_{k'} \times (\vec{E}_k \times \vec{H}_{k'}) d\vec{k} d\vec{k}'$$

che riscritta in termini delle  $\vec{f}_k$  :

$$\vec{M} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -i \left[ \vec{k} \times \vec{\nabla} (f_k^{*c} \cdot f_k) \right] - i (f_k^* \times f_k) \right\} d\vec{k}$$

dove con la notazione  $f_k^{*c}$  si intende “considerato costante sotto l'operatore  $\vec{\nabla}$ ”.

Questa equazione rappresenta di fatto il valore medio dell'operatore momento angolare:

$$M_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ -i f_k^{*i} \left( \vec{k} \times \vec{\nabla} \right)_j f_k^i - i \epsilon_{ilj} f_k^{*i} f_k^l \right] d\vec{k}$$

In questa equazione può essere facilmente riconosciuto un termine che rappresenta il noto momento angolare:

$$\hat{M} = \vec{k} \times \vec{\nabla} \quad \text{Operatore Momento Angolare}$$

più un altro termine di momento angolare  $i \epsilon_{ilj} f_k^{*i} f_k^l$  che deve pertanto essere riconosciuto come il momento angolare associato allo “spin”, il cui operatore è quindi definito da:

$$(s_i f_k^j)_j = -(s_j f_k^i)_i = -i \epsilon_{ilj} f_k^l \quad \text{Operatore Spin}$$

Formalmente quindi:

$$\vec{M} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_k^* \left[ -i \vec{k} \times \vec{\nabla} + \vec{s} \right] f_k d\vec{k}$$





1. Si e' utilizzata la proprieta'  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$  .
2. Presente nel fattore  $N(\vec{k})$



## Capitolo 4

# Sistemi di Particelle Identiche

### 4.1 Introduzione

Si consideri un sistema di particelle identiche e siano dati i due eventi:

- Evento A: la particella 1 si trova nella posizione 1, la particella 2 nella posizione 2,
- Evento B: la particella 1 si trova nella posizione 2, la particella 2 nella posizione 1

In meccanica quantistica, non potendosi definire una traiettoria, non e' possibile distinguere gli eventi A e B, per cui indicate le rispettive funzioni d'onda con  $\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  e  $\varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$  deve risultare:

$$|\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 = |\varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)|^2$$

da cui discende immediatamente che:

$$\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \pm \varphi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$$

cioe' le due funzioni d'onda devono possedere proprieta' definite di simmetria nello scambio delle due particelle.

*Le particelle che hanno il segno meno sono dette **fermioni**, mentre quelle che soddisfano il segno positivo sono dette **bosoni**.*

Ne consegue subito che due fermioni non possono trovarsi nello stesso posto contemporaneamente in quanto risulta:

$$\varphi(\vec{r}, \vec{r}) = -\varphi(\vec{r}, \vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \varphi(\vec{r}, \vec{r}) = 0$$

Piu' in generale quindi la funzione d'onda dei fermioni deve avere la forma:

$$\varphi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \varphi_\alpha(\vec{r}_1)\varphi_\beta(\vec{r}_2) - \varphi_\alpha(\vec{r}_2)\varphi_\beta(\vec{r}_1)$$

Dove le  $\varphi_\alpha$  e  $\varphi_\beta$  sono le funzioni d'onda dei singoli fermioni, supposti non interagenti.



## 4.2 Formalismo di Seconda Quantizzazione per Bosoni

Consideriamo  $N$  bosoni non interagenti e siano  $\varphi_{\alpha_j}(\vec{r}_{p_j})$  le funzioni d'onda di singola particella, dove  $p_j$  indica il numero di particelle nello stato  $\alpha_j$ . Se le particelle non fossero identiche la funzione totale si scriverebbe come:

$$\varphi_1(\vec{r}_1) \cdots \varphi_1(\vec{r}_{p_1}) \varphi_2(\vec{r}_{p_1+1}) \cdots \varphi_2(\vec{r}_{p_1+p_2}) \cdots \varphi_{\alpha_l}(\vec{r}_{p_1+\dots+p_l=N})$$

poiche' pero' le particelle sono bosoni identici occorre prendere la somma su tutte le permutazioni non banali, ovvero permettere la permutazione delle prime  $p_1$  particelle fra loro, delle seconde  $p_2$  e cosi' via. Queste permutazioni sono in numero di  $N!/(p_1! \cdots p_l!)$  e quindi la funzione totale va anche moltiplicata per  $\sqrt{p_1! \cdots p_l! / N!}$  per mantenere la normalizzazione. Si indichi con  $|p_1 \dots p_l\rangle$  lo stato simmetrico ottenuto in questo modo.

Chiamiamo ora *operatore collettivo* un operatore definito come:

$$\hat{O} = \sum_{i=1}^N \hat{O}_i$$

dove il singolo operatore  $\hat{O}_i$  agisce sulla singola particella. Ricerchiamo quindi gli elementi di matrice di questo operatore  $\hat{O}$ . Se si suppone gli  $\hat{O}_i$  diagonali, allora: <sup>[1]</sup>

$$\hat{O}_i \varphi_{\alpha_h}(\vec{r}_j) = \delta_{ij} o_h \varphi_{\alpha_h}(\vec{r}_j)$$

si ricava:

$$\hat{O} |p_1 \cdots p_l\rangle = \sum_{h=1}^N o_h p_h |p_1 \cdots p_l\rangle$$

Se questi operatori soddisfano invece la relazione:

$$\hat{O}_i \varphi_{\alpha_l}(\vec{r}_j) = \delta_{ij} \delta_{lr} \varphi_{\alpha_s}(\vec{r}_j)$$

questo agisce solo sulle funzioni d'onda relative alla particella  $i = j$  e manda lo stato  $\alpha_r$  ( $l = r$ ) nello stato  $\alpha_s$  con autovalore 1. In altre parole, questo operatore sposta  $r$  in  $s$ : se lo stato  $r$  manca esso non agisce, ma se e' presente almeno una particella la manda nello stato  $s$ . Se inizialmente lo stato  $r$  ha  $p_r$  particelle e lo stato  $s$  ne ha  $p_s$ , dopo l'azione dell'operatore lo stato  $r$  si ritrova con  $p_r - 1$  particelle e lo stato  $s$  con  $p_s + 1$ . Gli elementi di matrice devono allora essere del tipo  $\delta_{ps} \delta_{qr}$ , a cui va aggiunta la normalizzazione.

Prima dell'azione degli  $\hat{O}_i$  ci sono  $N!/\sqrt{p_1! \cdots p_l!}$  addendi in  $|p_1 \cdots p_l\rangle$ , dopo il numero dei prodotti degli stati per singola particella e':

$$\frac{p_r N!}{p_1! \cdots p_l!}$$



con il fattore di normalizzazione  $\sqrt{p_1! \cdots p_l! / N!}$ . Per azione diretta si ricava il numero di termini:

$$\frac{N!}{p_1 \cdots (p_r - 1)! (p_s + 1)! \cdots p_l!}$$

con una normalizzazione data da  $\sqrt{p_1 \cdots (p_r - 1)! (p_s + 1)! \cdots p_l! / N!}$ . Per confronto:

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{p_r N!}{p_1! \cdots p_l!} \sqrt{\frac{p_1! \cdots p_l!}{N!}}}{\frac{N!}{p_1 \cdots (p_r - 1)! (p_s + 1)! \cdots p_l!} \sqrt{\frac{p_1 \cdots (p_r - 1)! (p_s + 1)! \cdots p_l!}{N!}}} = \\ & = \frac{p_r (p_r - 1)! (p_s + 1)!}{p_r! p_s!} \sqrt{\frac{p_r! p_s!}{(p_r - 1)! (p_s + 1)!}} = (p_s + 1) \sqrt{\frac{p_r}{p_s + 1}} \end{aligned}$$

da cui in definitiva:

$$\hat{O} |p_1 \cdots p_r p_s \cdots p_l\rangle = \sqrt{p_r (p_s + 1)} |p_1 \cdots (p_r - 1) (p_s + 1) \cdots p_l\rangle$$

L'analogia con gli operatori di creazione e distruzione suggerisce la definizione degli operatori:

$$\begin{aligned} \hat{a}_s^\dagger |p_1 \cdots p_s \cdots p_l\rangle &= \sqrt{p_s + 1} |p_1 \cdots (p_s + 1) \cdots p_l\rangle \\ \hat{a}_r |p_1 \cdots p_r \cdots p_l\rangle &= \sqrt{p_r - 1} |p_1 \cdots (p_r - 1) \cdots p_l\rangle \end{aligned}$$

che soddisfano la relazione  $[a_r, a_s^\dagger] = \delta_{rs}$ . L'operatore  $\hat{a}_s^\dagger$  crea una particella nello stato  $s$  e l'operatore  $\hat{a}_r$  distrugge una particella nello stato  $r$ , sono chiamati pertanto rispettivamente **operatore bosonico di creazione** e **operatore bosonico di distruzione**.

In termini di questi operatori risulta:

$$\hat{O} = o_{sr} \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_r$$

Se si considera il generico operatore  $\hat{O}$  con elementi di matrice  $\hat{O}_{pq}$  che soddisfa la  $\hat{O}_{pq} = \delta_{ps} \delta_{qr} \hat{O}_{sr}$ , ricordando la definizione di  $\hat{O}_i$  data sopra si può riscrivere come:

$$\hat{O} = \sum_{r,s=1}^l o_{sr} \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_r$$

Consideriamo infine gli operatori:



$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{h=1}^n \varphi_h(\vec{r}) \hat{a}_h$$

$$\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') = \sum_{k=1}^n \varphi_k^*(\vec{r}') \hat{a}_k^\dagger$$

Questi operatori soddisfano le relazioni:

$$\left[ \hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}(\vec{r}) \right] = \left[ \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}'), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') \right] = 0$$

e

$$\left[ \hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') \right] = \sum_{h,k=1}^l \varphi_h(\vec{r}) \varphi_k^*(\vec{r}') \left[ \hat{a}_h, \hat{a}_k^\dagger \right] = \sum_{h=1}^l \varphi_h(\vec{r}) \varphi_h^*(\vec{r}')$$

poiche' le  $\varphi_h(\vec{r})$  sono anche un sistema completo, vale la relazione:

$$\left[ \hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') \right] = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Da queste relazioni si deduce che l'operatore  $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')$  crea una particella nella posizione  $\vec{r}'$  e l'operatore  $\hat{\Psi}(\vec{r})$  distrugge una particella nella posizione  $\vec{r}$ . Questi operatori sono chiamati **operatori di campo bosonico**.

1. Per alleggerire la notazione indicheremo d'ora in poi  $\vec{r}_{p_j}$  semplicemente con  $\vec{r}_j$

### 4.3 Formalismo di Seconda Quantizzazione per Fermioni

Il formalismo appena visto per i bosoni si puo' estendere ai fermioni a patto di tenere presente che la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica. In termini di autofunzioni di singola particella si puo' quindi scrivere come un determinante di Slater:

$$\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \equiv |\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(\vec{r}_1) & \cdots & \varphi_{\alpha_1}(\vec{r}_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{\alpha_N}(\vec{r}_1) & \cdots & \varphi_{\alpha_N}(\vec{r}_N) \end{vmatrix}$$

si noti che questa scrittura permette automaticamente di soddisfare il principio di Pauli, in quanto l'antisimmetria è automaticamente soddisfatta.

Si cerchino ora degli operatori  $\hat{O}_i$  analoghi agli operatori bosonici:

$$\hat{O} \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{l=1}^N \hat{O}_l \varphi_{\alpha_l}(\vec{r}_l) \quad \text{con} \quad \hat{O}_i \varphi_{\alpha_l}(\vec{r}_j) = \delta_{ij} \hat{O}_l \varphi_{\alpha_l}(\vec{r}_i)$$



Si possono ora presentare solo due casi:  $p, l \in \{1, \dots, N\}$  oppure  $p, l \notin \{1, \dots, N\}$ . Se  $l \notin \{1, \dots, N\}$ , l'operatore non agisce e restituisce 0. Se  $p \in \{1, \dots, N\}$  allora nel determinante compare una seconda riga  $\alpha_p$  e di conseguenza si annulla.

Consideriamo il caso  $l \in \{1, \dots, N\}$  e  $p \notin \{1, \dots, N\}$ . In questo caso l'operatore allora cambia la riga ma non preserva la normalizzazione. E' importante specificare l'ordine degli stati e quindi sistemarli nell'ordine giusto, si devono quindi effettuare delle permutazioni di righe che cambiano segno al determinante. Cerchiamo quindi un operatore del tipo:

$$\hat{O} = \sum_{p=0}^N O_{lp} \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p$$

dove il segno corretto e' nell'operatore  $\hat{b}$ . Indichiamo gli stati occupati con la notazione:

$$| \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{nonoccupati}}, \underbrace{\uparrow_{\alpha_1}, \uparrow_{\alpha_2}, \dots, \uparrow_{\alpha_N}}_{\text{occupati}} \rangle$$

allora risulta:

$$b_p |0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{p\text{-simo}} \rangle = (-1)^{\sum_{\alpha_i < p} \alpha_i} |0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 0}_{p\text{-simo}}, \dots, 1 \rangle$$

dove con  $\sum_{\alpha_i < p} \alpha_i$  si intende il numero di stati che precedono il  $p$ -simo. Piu' in generale se:

$$\begin{aligned} \hat{b}_p &= (-1)^{\sum_{\alpha_i < p} \alpha_i} n_p \\ \hat{b}_p^\dagger &= (-1)^{\sum_{\alpha_i < p} \alpha_i} (1 - n_p) \end{aligned}$$

allora  $\hat{b}_p$  e  $\hat{b}_p^\dagger$  apportano il segno giusto. Consideriamo infatti per semplicita' il caso  $l > p$ .

$$\begin{aligned} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_p |0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_p, \dots, \underbrace{0, \dots, 0}_l \rangle &= \hat{b}_l^\dagger (-1)^{\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i} |0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 0}_p, \dots, \underbrace{0, \dots, 1}_l \rangle = \\ &= (-1)^{\sum_i^{p-1} \alpha_i} (-1)^{[\sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i + \sum_{i=p+1}^N \alpha_i]} |0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 0}_p, \dots, \underbrace{0, \dots, 1}_l \rangle = \\ &= (-1)^{\sum_{i=p+1}^N \alpha_i} |0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 0}_p, \dots, \underbrace{0, \dots, 1}_l \rangle \end{aligned}$$

e  $\sum_{i=p+1}^N \alpha_i$  e' proprio il numero di posti di cui si e' scambiato lo stato. Come si vede, l'operatore  $\hat{b}_l^\dagger$  crea un fermione nello stato  $l$  e l'operatore  $\hat{b}_p$  distrugge un fermione nello stato  $p$  e sono chiamati pertanto rispettivamente **operatore fermionico di creazione** e **operatore fermionico di distruzione**.



Segue dalla definizione degli operatori  $\hat{b}_p$  :

$$\hat{b}_l \hat{b}_p + \hat{b}_l \hat{b}_p = 0 \quad \forall l, p$$

infatti se  $l > p$  :

$$\hat{b}_l \hat{b}_p | \dots, \underset{p}{\uparrow} 1, \dots, \underset{l}{\uparrow} 1, \dots \rangle = \hat{b}_l (-1)^{\sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i} | \dots, \underset{p}{\uparrow} 0, \dots, \underset{l}{\uparrow} 1, \dots \rangle = (-1)^{\sum_{i=p+1}^{l-1} \alpha_i} | \dots, \underset{p}{\uparrow} 0, \dots, \underset{l}{\uparrow} 0, \dots \rangle$$

quando si calcola  $\hat{b}_p \hat{b}_l$ ,  $\hat{b}_l$  agisce su uno stato occupato in piu' ed ha quindi un segno meno in piu' che annulla la somma. In modo analogo si ricavano le regole:

$$\begin{aligned} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_p + \hat{b}_p \hat{b}_l^\dagger &= \delta_{lp} \\ \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_p^\dagger + \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_l^\dagger &= 0 \quad \forall l, p \end{aligned}$$

In maniera analoga a quanto fatto per i bosoni, e' possibile introdurre degli operatori definiti come:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\vec{r}) &= \sum_{h=1}^n \varphi_h(\vec{r}) \hat{b}_h \\ \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') &= \sum_{k=1}^n \varphi_k^*(\vec{r}') \hat{b}_k^\dagger \end{aligned}$$

Siccome  $\hat{b}$  e  $\hat{b}^\dagger$  anticommutano risulta, ancora in analogia al formalismo bosonico:

$$[\Psi(\vec{r}), \Psi(\vec{r}')] = [\Psi^\dagger(\vec{r}'), \Psi^\dagger(\vec{r}')] = 0$$

e: \* [1]

$$\left[ \hat{\Psi}(\vec{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}') \right] = \sum_{h,k=1}^l \varphi_h(\vec{r}) \varphi_k^*(\vec{r}') \left[ \hat{b}_h, \right] \hat{b}_k^\dagger = \sum_{h=1}^l \varphi_h(\vec{r}) \varphi_h^*(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Si vede che l'operatore  $\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}')$  crea un fermione nella posizione  $\vec{r}'$  e l'operatore  $\hat{\Psi}(\vec{r})$  distrugge un fermione nella posizione  $\vec{r}$  e sono dunque chiamati **operatori di campo fermionico**.

*Da notare che i campi associati non sono osservabili, in quanto se si introduce in questa trattazione anche il tempo risulta che questi operatori non commutano su distanze time-like.*

1. Si ricordi che le  $\varphi(\vec{r})$  sono un sistema completo.



## Capitolo 5

# Elettrodinamica quantistica

### 5.1 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Si consideri il campo elettromagnetico  $A_\mu$  in assenza di sorgenti. Esso soddisfa l'equazione  $\square A_\mu = 0$ . Data l'arbitrarietà della scelta dei potenziali, si consideri la gauge di Lorents in cui  $\phi = 0$  e di conseguenza il campo elettromagnetico è descritto solo dal potenziale vettore  $\vec{A}$  che verifica le equazioni:

$$\square \vec{A} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

Si osservi subito che:

$$\square e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \left( -\frac{\omega^2}{c^2} + |\vec{k}|^2 \right) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

per cui se vale la relazione:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \vec{k}^2$$

una soluzione della prima delle equazioni dsul potenziale vettore è proprio  $\vec{e}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ , dove  $\vec{e}(\vec{k})$  è il versore indipendente dalla direzione di polarizzazione. Siccome poi vale anche:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{e}(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{e}(\vec{k}) \right] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \vec{e}(\vec{k}) \left[ \vec{\nabla} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] = 0 + \vec{e}(\vec{k}) \left[ \vec{\nabla} \cdot e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] = i e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \vec{k} \cdot \vec{e}$$

si ha che questa relazione soddisfa anche la seconda equazione sul potenziale vettore se vale  $\vec{k} \cdot \vec{e} = 0$ , ovvero se le onde elettromagnetiche sono trasverse. In uno spazio tridimensionale i vettori ortogonali ad uno dato sono solo due, per cui è più esplicito sostituire  $\vec{e}_\alpha(\vec{k})$  a  $\vec{e}(\vec{k})$ , dove l'indice  $\alpha$  può assumere solo due valori in corrispondenza delle due possibili polarizzazioni. Per questo, e siccome la prima è lineare omogenea, la sua soluzione generale reale si scrive:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha, \vec{k}} \left[ a(\alpha, \vec{k}) \vec{e}_\alpha(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + a^*(\alpha, \vec{k}) \vec{e}_\alpha(\vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right]$$





dove  $a(\alpha, \vec{k})$  sono dei coefficienti da determinare in base alle condizioni al contorno.\*[1]  
 Il fattore  $1/\sqrt{V}$  e' un conveniente fattore di normalizzazione, essendo  $V$  il volume di spazio in cui si sta considerando il campo elettromagnetico. Introduciamo le variabili dinamiche:

$$a_{\alpha, \vec{k}} = a(\alpha, \vec{k})e^{-i\omega t}$$

e le loro complesse coniugate. In questo modo, la soluzione generale di sopra si scrive in maniera più concisa:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha, \vec{k}} \vec{e}_{\alpha}(\vec{k}) \left[ a_{\alpha, \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + a_{\alpha, \vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right]$$

Dalle relazioni () per  $\phi = 0$  si possono poi ricavare i campi elettrico e magnetico:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha, \vec{k}} \frac{\omega}{c} \vec{e}_{\alpha}(\vec{k}) \left[ ia_{\alpha, \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - ia_{\alpha, \vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right] \\ \vec{\mathcal{H}} &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\alpha, \vec{k}} \vec{k} \times \vec{e}_{\alpha}(\vec{k}) \left[ ia_{\alpha, \vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - ia_{\alpha, \vec{k}}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right] \end{aligned}$$

Si vuole ora calcolare esplicitamente l'Hamiltoniana del campo elettromagnetico che, come è noto, è data da:

$$H = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2) dV$$

e a questo fine occorre calcolare a partire dalle equazioni precedenti  $\mathcal{E}^2$  e  $\mathcal{H}^2$ . Per fare questo si osservi che in queste equazioni i campi sono scritti in termini di serie di Fourier complessa per la quale vale l'uguaglianza di Bessel\*[2] e quindi:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}^2 &= \frac{1}{V} \sum_{\alpha, \vec{k}} 2 \frac{\omega^2}{c^2} a_{\alpha, \vec{k}} a_{\alpha, \vec{k}}^* = \frac{2}{V} \sum_{\alpha, \vec{k}} \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \left( \Re a_{\alpha, \vec{k}} \right)^2 + \left( \Im a_{\alpha, \vec{k}} \right)^2 \right] \\ \vec{\mathcal{H}}^2 &= \frac{1}{V} \sum_{\alpha, \vec{k}} 2 \vec{k}^2 a_{\alpha, \vec{k}} a_{\alpha, \vec{k}}^* = \frac{2}{V} \sum_{\alpha, \vec{k}} \vec{k}^2 \left[ \left( \Re a_{\alpha, \vec{k}} \right)^2 + \left( \Im a_{\alpha, \vec{k}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

per cui, non dipendendo da  $\vec{\mathcal{E}}^2$ ,  $\vec{\mathcal{H}}^2$  e da  $\vec{r}$ , si ha immediatamente:\*[3]

$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c^2} \sum_{\alpha, \vec{k}} \omega^2 \left[ \left( \Re a_{\alpha, \vec{k}} \right)^2 + \left( \Im a_{\alpha, \vec{k}} \right)^2 \right]$$

Introducendo ora le variabili dinamiche:

$$\begin{aligned} Q_{\alpha, \vec{k}} &= a_{\alpha, \vec{k}} + a_{\alpha, \vec{k}}^* = 2\Re a_{\alpha, \vec{k}} \\ P_{\alpha, \vec{k}} &= Q_{\alpha, \vec{k}}^* = -i\omega \left( a_{\alpha, \vec{k}} + a_{\alpha, \vec{k}}^* \right) = 2\omega \Im a_{\alpha, \vec{k}} \end{aligned}$$

l'Hamiltoniana del campo magnetico si scrive come:



$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c^2} \sum_{\alpha, \vec{k}} \left( P_{\alpha, \vec{k}}^2 + \omega^2 Q_{\alpha, \vec{k}}^2 \right)$$

Questa forma è probante: essa si interpreta dicendo che l'energia del campo elettromagnetico è data dalla somma delle energie di tanti oscillatori armonici di frequenze  $\omega$  corrispondenti ai modi normali. A questo punto, la quantizzazione del campo elettromagnetico può effettuarsi introducendo le relazioni di commutazione:

$$\left[ Q_{\alpha, \vec{k}}, P_{\alpha', \vec{k}'} \right] = i\hbar \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

Da queste relazioni e dalle relazioni su  $Q_{\alpha, \vec{k}}$  e  $P_{\alpha, \vec{k}}$ , che si possono anche scrivere nella forma:

$$\begin{aligned} a_{\alpha, \vec{k}} &= \frac{1}{2} \left( Q_{\alpha, \vec{k}} + iP_{\alpha, \vec{k}} \right) \\ a_{\alpha, \vec{k}}^\dagger &= \frac{1}{2} \left( Q_{\alpha, \vec{k}} - iP_{\alpha, \vec{k}} \right) \end{aligned}$$

si ricava l'altra relazione di commutazione:

$$\left[ a_{\alpha, \vec{k}}, a_{\alpha', \vec{k}'}^\dagger \right] = \frac{\hbar}{2\omega} \delta_{\alpha, \alpha'} \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$$

Quantisticamente, il campo elettromagnetico è quindi descritto dall'operatore:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha, \vec{k}} \left[ a(\alpha, \vec{k}) \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + a^\dagger(\alpha, \vec{k}) \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right]$$

Si osservi che essendo:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= \hbar\omega \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ -i\hbar \vec{\nabla} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= \hbar \vec{k} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= -\hbar\omega \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ -i\hbar \vec{\nabla} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} &= -\hbar \vec{k} \vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

il termine  $\vec{e}(\alpha, \vec{k}) e^{\pm i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$  si può interpretare come la funzione d'onda del quanto del campo elettromagnetico (fotone), corrispondente rispettivamente a energia  $\pm \hbar\omega$  e impulso  $\pm \hbar \vec{k}$ . Ancora, si può considerare  $a^\dagger(\alpha, \vec{k})$  e  $a(\alpha, \vec{k})$  rispettivamente come l'operatore di creazione e distruzione di un fotone di energia  $\hbar\omega$ .<sup>[4]</sup> Così il campo elettromagnetico è scritto come una somma di operatori di distruzione per la funzione d'onda del fotone  $\hbar\omega$  più un operatore di distruzione del fotone  $-\hbar\omega$ .<sup>[5]</sup> Analogamente a quanto fatto per l'energia, si può poi calcolare l'impulso  $\vec{P} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}}{c} dV$  del campo elettromagnetico, si trova in maniera analoga:<sup>[6]</sup>

$$\vec{P} = \frac{1}{8\pi c^2} \sum_{\alpha, \vec{k}} \vec{k} \left( a_{\alpha, \vec{k}} a_{\alpha, \vec{k}}^\dagger + a_{\alpha, \vec{k}}^\dagger a_{\alpha, \vec{k}} \right)$$



Gli autovalori di energia e impulso sono allora dati da:

$$H = \frac{1}{4\pi c^2} \sum_{\alpha, \vec{k}} \hbar\omega \left( n_{\alpha, \vec{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{P} = \frac{1}{4\pi c^2} \sum_{\alpha, \vec{k}} \hbar\vec{k} \left( n_{\alpha, \vec{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

Il termine  $n_{\alpha, \vec{k}}$ , come noto, è un numero intero che in questo caso andrà interpretato come numero di fotoni di energia  $\hbar\omega$ , impulso  $\hbar\vec{k}$  e polarizzazione  $\alpha$ . Si osservi che l'energia in assenza di fotoni anziché essere nulla è infinita, questa incongruenza si può risolvere eliminando (rigorosamente) il termine  $1/2$ . Questo inconveniente invece non si ha per l'impulso, in quanto se un fotone può avere impulso  $\hbar\vec{k}$ , ha anche  $-\hbar\vec{k}$  e così per  $n_{\alpha, \vec{k}}$  si ha  $\vec{P} = 0$ .

1. In generale, in maniera più corretta, al posto della sommatoria in  $\vec{k}$  si sarebbe dovuto utilizzare un integrale in  $dk$ , in quanto  $\vec{k}$  può appunto assumere valori continui. Tuttavia, per semplicità formale si assumerà che possa assumere solo valori discreti che fra l'altro è il caso di una cavità risonante, come noto.
2. Il quadrato della somma di una serie di Fourier è uguale alla somma dei moduli quadri dei coefficienti dello sviluppo di Fourier stesso.
3. Dalla relazione di dispersione  $\omega^2 = \vec{k}^2 c^2$ .
4. O, inversamente, un operatore rispettivamente di distruzione e creazione di un fotone di energia  $-\hbar\omega$ .
5. Naturalmente, si intende che gli operatori  $a_{\alpha, \vec{k}}$  e  $a_{\alpha, \vec{k}}^\dagger$  non agiscano sulle funzioni d'onda per le quali sono moltiplicati a sinistra.
6. Vale la relazione:

$$\vec{P} = \frac{\hbar}{c} \hat{k}$$

## 5.2 Quantizzazione del campo elettronico

Dopo aver effettuato la quantizzazione del campo elettromagnetico in assenza di cariche, si vuole ora considerare la quantizzazione del campo delle cariche, ovvero della carica elementare (elettrone) in assenza del campo elettromagnetico, riservando al paragrafo successivo il caso più complesso della loro interazione.

Come si è visto, la teoria di Dirac di prima quantizzazione prevede per l'elettrone libero anche stati di energia negativa, la cui interpretazione non era allora chiara. Tuttavia, si è appena visto che stati di energia negativa intervengono nella scrittura esplicita del campo elettromagnetico quantizzato. In analogia a quest'ultimo, Dirac propose di scrivere il campo quantizzato dell'elettrone  $\psi(\vec{r}, t)$  nella seguente forma:



$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{p}} \left[ u(\vec{p}, \beta) e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} b_{e^-}(\vec{p}, \beta) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} + u(-\vec{p}, \beta) e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} b_{e^+}^\dagger(\vec{p}, \beta) e^{i\frac{E}{\hbar}t} \right]$$

dove, al posto del vettore d'onda  $\vec{k}$  c'è l'impulso della particella  $\vec{p}$  e alla polarizzazione  $\alpha$  è stato sostituito l'indice  $\beta$  che individua i due possibili stati di spin della particella, inoltre, nel caso considerato, il campo  $\psi(\vec{r}, t)$  è in generale complesso e non necessariamente reale. Questo campo quantizzato associato ai fermioni prende il nome di *campo di Dirac*.

Nel primo addendo della relazione precedente compare la funzione d'onda di una particella libera avente energia positiva (l'elettrone) moltiplicata per un operatore di distruzione di un elettrone. Poiché distruggendo un elettrone la carica aumenta di una unità, il primo addendo incrementa quindi di 1 la carica ( $\Delta q = +1$ ). Prima di procedere avanti nell'interpretazione, si osservi che dovendo essere conservata la carica il campo  $\psi(\vec{r}, t)$  deve avere proprietà definite rispetto alla carica, per esempio può avere  $\Delta q = 0$  o  $\Delta q = \pm 1$  ([1]). In altre parole non può essere costituito, ad esempio, da una somma di termini che hanno ciascuno un  $\Delta q$  diverso. *Così, poiché il primo addendo ha  $\Delta q = +1$ , tale deve essere anche il secondo addendo. Di conseguenza, l'operatore di creazione compreso qui non può creare un elettrone perché in questo modo la carica diminuirebbe di 1: esso deve quindi creare una particella di carica positiva.* Questa ipotesi è confortata dal fatto che  $b_{e^+}^\dagger(\vec{p}, \beta)$  è moltiplicato per una funzione d'onda di una particella libera corrispondente a  $E < 0$  se la carica è negativa, ovvero con  $E > 0$  se la carica è positiva.

La teoria di Dirac di seconda quantizzazione prevede quindi l'esistenza di un elettrone positivo (**positrone**).

### 5.2.1 Perturbazioni dipendenti dal tempo

Si consideri un sistema descritto, all'istante iniziale  $t = 0$  dall'Hamiltoniana non esplicitamente dipendente dal tempo  $H_0$  e di cui sia noto lo spettro  $H_0|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$ . Se inizialmente il sistema è in uno stato  $|\psi^0\rangle = \sum_n c_n|\psi_n\rangle$ , è già noto che agli istanti successivi sarà nello stato  $|\psi^0(t)\rangle = \sum_n e^{-E_n/\hbar t} c_n|\psi_n\rangle$ , con i  $c_n$  non dipendenti dal tempo.

Si supponga ora però che da  $t = 0$  in poi sul sistema agisca una perturbazione  $V(t)$  per un periodo di tempo limitato, ossia il sistema abbia Hamiltoniana  $H = H_0 + V(t)$ . Lo stato  $|\psi(t)\rangle$  è allora soluzione dell'equazione:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = (H_0 + V(t)) |\psi(t)\rangle$$

Poiché  $\{|\psi_m\rangle\}$  è un sistema completo si può scrivere:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |\psi_n(t)\rangle$$

per cui il problema è ricondotto alla ricerca dei coefficienti  $c_n(t)$ . Sostituendo quest'ultima nella precedente si ha:



$$i\hbar \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \dot{c}_n(t) - i \frac{E_n}{\hbar} c_n(t) \right] e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |\psi_n(t)\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |\psi(t)\rangle + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(t) c_n(t) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |\psi(t)\rangle$$

per cui i  $c_n(t)$  soddisfano la relazione:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \dot{c}_n(t) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |\psi_n(t)\rangle = \frac{1}{i\hbar} \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(t) c_n(t) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |\psi_n(t)\rangle$$

e proiettando sullo stato  $\langle \psi_m(t) |$  :

$$\dot{c}_n(t) = \frac{1}{i\hbar} \sum_{m=0}^{+\infty} V_{mn}(t) c_m(t) e^{i \frac{E_m - E_n}{\hbar} t}$$

dove naturalmente  $V_{mn}(t)$  e' l'elemento di matrice  $\langle \psi_m(t) | V(t) | \psi_n(t) \rangle$  .

Si supponga ora di voler calcolare la probabilità di transizione dallo stato iniziale  $|\psi_p(t)\rangle$  ad uno stato finale  $|\psi_a(t)\rangle$  , questa è data proprio da  $|c_a(t)|^2$  , ricavabile direttamente dall'ultima relazione. Poiché questa è generalmente difficile da risolvere, si cerca in genere una soluzione approssimata per  $c_q(t)$  supponendo che la perturbazione  $V(t)$  sia di piccola entità e che agisca per un tempo breve. Se all'istante iniziale il sistema è nello stato  $\psi_p(t)$  allora deve valere  $c_n(0) = \delta_{np}$  , tuttavia se il potenziale perturbativo  $V(t)$  soddisfa le condizioni appena citate si può assumere che per tutta la durata della perturbazione sia  $c_n(t) \simeq \delta_{np}$  , per cui la relazione diventa:

$$c_q(t) \simeq \frac{1}{i\hbar} \int_0^T V_{qp}(t) e^{i \frac{E_p - E_q}{\hbar} t} dt$$

### 5.2.2 Operatore di evoluzione temporale

È già noto che se un sistema è descritto da una Hamiltoniana  $H_0$  indipendente dal tempo, l'operatore evoluzione temporale e'  $e^{-i \frac{H_0}{\hbar} t}$  , cioè che vale:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i \frac{H_0}{\hbar} t} |\psi(0)\rangle$$

Si supponga ora che l'Hamiltoniana del sistema sia  $H = H_0 + V(t)$  . In questo caso, la funzione d'onda  $\psi(t)$  si può scrivere sviluppandola con coefficienti  $c_n(t)$  ricavati a partire dalla relazione mostrata sopra. Si considerino ora le espressioni:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) |\psi_n(t)\rangle$$

$$\dot{f}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dot{c}_n(t) |\psi_n(t)\rangle$$

da cui:



$$e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |\psi_n(t)\rangle = |\psi(t)\rangle$$

$$e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} \dot{f}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dot{c}_n(t) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |\psi_n(t)\rangle$$

Con queste notazioni, lo sviluppo diventa formalmente:

$$e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} \dot{f}(t) = \frac{1}{i\hbar} V(t) e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} f(t)$$

o in maniera equivalente:

$$\dot{f}(t) = \frac{1}{i\hbar} \left[ e^{i\frac{H_0}{\hbar}t} V(t) e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} \right] f(t)$$

ovvero, formalmente:

$$f(t) = f(0) e^{\frac{1}{i\hbar} \int_0^T e^{i\frac{H_0}{\hbar}t} V(t) e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} dt}$$

da cui si ricava che l'operatore di evoluzione temporale nel caso considerato e' dato da:<sup>\*</sup>[2]

$$e^{\frac{1}{i\hbar} \int_0^T e^{i\frac{H_0}{\hbar}t} V(t) e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} dt}$$

In linea generale, si possono estendere i limiti di integrazione fra  $-\infty$  e  $+\infty$ , visto che la perturbazione si assume limitata nel tempo.

### 5.2.3 Rappresentazione di Schrödinger, Heisemberg e Dirac

È noto che in uno stato un operatore  $\hat{A}$  ha un valore medio:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$$

oppure equivalentemente:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A}(t) | \psi \rangle$$

La prima rappresentazione è detta *rappresentazione di Schrodinger*, in essa si assume che il valore medio di  $\hat{A}$  cambi nel tempo perche'è lo stato  $|\psi(t)\rangle$  che varia nel tempo. Invece, nella seconda equazione è mostrata la *rappresentazione di Heisemberg*, si assume che il valore medio di  $\hat{A}$  cambia perche'è l'operatore stesso che varia nel tempo mentre la funzione d'onda resta quella iniziale.

Una ulteriore rappresentazione, che risulterà utile nel seguito, e' dovuta a Dirac (detta appunto *rappresentazione di Dirac*): in essa si considera l'Hamiltoniana  $H$  come somma di quella libera  $H_0$  e di una Hamiltoniana di interazione  $H'$ , ovvero  $H = H_0 + H'$ . In questo caso risulta:



$$\overline{A(t)} = \langle \psi_0(t) | e^{i\frac{H_0}{\hbar}t} \hat{A} e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} | \psi_0(t) \rangle$$

dove  $\psi_0(t) \rightarrow \psi(0)$  se  $H' = 0$ .

Nel seguito, per ragioni di convenienza, la componente temporale di un quadri-vettore sara' indicata con l'indice 0. In questo modo risulta  $x_\mu = (ct, \vec{r})$  e sara' adottata la segnatura metrica  $+ - - -$ .

1. E in questo caso la carica viene conservata se si moltiplica  $\psi(\vec{r}, t)$  per un campo con  $\Delta q = \pm 1$  quale ad esempio  $\psi^\dagger$ .
2. Ovviamente, questa relazione si riferisce alla sola perturbazione, per la funzione d'onda soluzione dell'equazione di Schrodinger con  $H = H_0 + V(t)$  si ha:

$$|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t + \frac{1}{i\hbar} \int_0^T e^{i\frac{H_0}{\hbar}t} V(t) e^{-i\frac{H_0}{\hbar}t} dt}$$

### 5.3 Quantizzazione dell'interazione fotone-elettrone

Classicamente, l'interazione di un sistema di cariche con quadricorrente  $j_\mu = (e, \rho\vec{v}/c)$  con un campo elettromagnetico di potenziale vettore  $a_\mu = (\phi, \vec{A})$  è descritta da:

$$H'(t) = e \int_0^{+\infty} j_\mu(\vec{r}, t) A^\mu(\vec{r}, t) d\vec{r}$$

In elettrodinamica quantistica (d'ora in poi, QED) questa forma viene mantenuta, con la riserva però di considerare la quantità in questa formula come degli operatori la cui forma verrà ricavata qui di seguito. Innanzitutto si osservi che, dato il campo di Dirac  $\psi$  (o qualunque altro campo), le seguenti quantità hanno proprietà definite sotto trasformazioni di Lorentz:

dove con  $\gamma_5$  si indica, secondo la convenzione stabilita, il prodotto delle matrici di Dirac  $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ . Si usera' nel seguito anche la notazione  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma_0$ . Detto quindi  $\psi$  questo campo di Dirac, e' naturale costruire il vettore corrente:

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$$

mediante il quale l'interazione fra fermione e campo elettromagnetico si scrive:

$$H'(t) = e \int_0^{+\infty} \bar{\psi}(\vec{r}, t)\gamma_\mu\psi(\vec{r}, t)A^\mu(\vec{r}, t)d\vec{r}$$

cioè l'ampiezza di probabilità del dato fenomeno è il modulo quadro dell'elemento di matrice fra lo stato finale e lo stato iniziale dell'operatore:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \int H'(t)dt} = e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int \bar{\psi}(\vec{r}, t)\gamma_\mu\psi(\vec{r}, t)A^\mu(\vec{r}, t)d^4x_\mu}$$

I campi coinvolti in questa espressione sono:



$$\begin{aligned}
 A_\mu &= \sum_{\alpha, k} \left[ e^\mu(\alpha, k) a_{\alpha, k} e^{-ik_\mu x^\mu} + e^{*\mu}(\alpha, k) a_{\alpha, k}^\dagger e^{ik_\mu x^\mu} \right] \\
 \psi &= \sum_{\beta, p} \left[ u(\beta, p) b_{\beta, -p} e^{-i\frac{p_\mu}{\hbar} x^\mu} + v(\beta, p) b_{\beta, p} e^{i\frac{p_\mu}{\hbar} x^\mu} \right] \\
 \bar{\psi} &= \sum_{\beta, p} \left[ \bar{u}(\beta, p) b_{\beta, -p}^\dagger e^{i\frac{p_\mu}{\hbar} x^\mu} + \bar{v}(\beta, -p) b_{\beta, p}^\dagger e^{-i\frac{p_\mu}{\hbar} x^\mu} \right]
 \end{aligned}$$

In questo modo, dalla relazione sulla Hamiltoniana si vede che i processi elementari che possono avvenire in un punto dato sono otto, e precisamente:

1. distruzione di un fotone e di un  $e^-$ , creazione di un altro  $e^-$  ( $ab_-b_-^\dagger$ ),
2. distruzione di un fotone, di un  $e^-$  e di un  $e^+$  ( $ab_-b_+$ ),
3. distruzione di un fotone, creazione di un  $e^-$  e di un  $e^+$  ( $ab_-^\dagger b_+^\dagger$ ),
4. distruzione di un fotone e di un  $e^+$  e creazione di un altro  $e^+$  ( $ab_+b_+^\dagger$ ),
5. distruzione di un  $e^-$ , creazione di un altro  $e^-$  e di un fotone ( $a^\dagger b_-b_-^\dagger$ ),
6. distruzione di un  $e^-$  e di un  $e^+$ , creazione di un fotone ( $a^\dagger b_-b_+$ ),
7. creazione di un fotone, un  $e^+$  e di un  $e^-$  ( $a^\dagger b_+^\dagger b_-^\dagger$ ),
8. distruzione di un  $e^+$ , creazione di un altro  $e^+$  e di un fotone ( $a^\dagger b_+^\dagger b_+$ ).

la cui interazione è descritta proprio dalla Hamiltoniana di sopra in cui si sono sostituite le espressioni dei campi date sopra.

Nel seguito si studieranno i processi di interazione cariche-campo elettromagnetico a diversi ordini della carica elettrica  $e$ , ottenuti sviluppando in serie la forma :

$$e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int \bar{\psi}(\vec{r}, t) \gamma_\mu \psi(\vec{r}, t) A^\mu(\vec{r}, t) d^4 x_\mu} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!} \left( \frac{-i}{\hbar c} \right)^n \left| \int \bar{\psi}(\vec{r}, t) \gamma_\mu \psi(\vec{r}, t) A^\mu(\vec{r}, t) d^4 x_\mu \right|^n$$

### 5.3.1 Interazione cariche-campo elettromagnetico al I ordine in $e$

Al primo ordine in  $e$ , l'operatore diventa:

$$-i\frac{e}{\hbar c} \int \bar{\psi}(\vec{r}, t) \gamma_\mu \psi(\vec{r}, t) A^\mu(\vec{r}, t) d^4 x_\mu$$

Dei fenomeni possibili, si consideri ad esempio il fenomeno 5): un elettrone di quadrimpulso  $p_1$  viene distrutto e al suo posto viene creato un elettrone di quadrimpulso  $p_2$  e un fotone  $k$ . In questo caso si ha:





$$\begin{aligned}
 & \int \bar{\psi}(\vec{r}, t) \gamma_\mu \psi(\vec{r}, t) A^\mu(\vec{r}, t) d^4 x_\mu = \\
 & = \int \bar{u}(\beta_2, p_2) b_{\beta_2, -p_2}^\dagger e^{i \frac{p_2 \mu}{\hbar} x^\mu} \gamma_\mu u(\beta_1, p_1) b_{\beta_1, -p_1}^\dagger e^{i \frac{p_1 \mu}{\hbar} x^\mu} e^\mu(\alpha, k) a_{\alpha, k}^\dagger e^{i k_\mu x^\mu} d^4 x_\mu = \\
 & = \bar{u}(\beta_2, p_2) \gamma_\mu u(\beta_1, p_1) e^\mu(\alpha, k) \int e^{\frac{i}{\hbar} (p_2 \mu - p_1 \mu + \hbar k_\mu) x^\mu} d^4 x_\mu b_{\beta_2, -p_2}^\dagger b_{\beta_1, -p_1}^\dagger a_{\alpha, k}^\dagger = \\
 & = \bar{u}(\beta_2, p_2) \gamma_\mu u(\beta_1, p_1) e^\mu(\alpha, k) (2\pi)^4 \delta^4 \left( \frac{p_2 \mu}{\hbar} - \frac{p_1 \mu}{\hbar} + k_\mu \right) b_{\beta_2, -p_2}^\dagger b_{\beta_1, -p_1}^\dagger a_{\alpha, k}^\dagger
 \end{aligned}$$

dove la presenza della delta (che deriva dall'integrale) porta alla condizione:

$$p_{1\mu} = p_{2\mu} + \hbar k_\mu$$

che esprime la conservazione del quadrimpulso. Tuttavia, per il processo in esame questa relazione non puo' essere verificata in quanto, se ci si mette per esempio nel sistema di riferimento in quiete rispetto al primo elettrone (dove  $E_1 = mc^2$ ,  $\vec{p}_1 = 0$ ), l'altro elettrone deve avere una energia maggiore, il che non puo' essere. In altre parole, non e' possibile che da un elettrone fermo e senza nessuna azione esterna se ne origine un altro in moto con in piu' l'emissione di un fotone. Formalmente, questo si vede dal fatto che valendo  $p_\mu p^\mu = E^2 - c^2 \vec{p}^2 = m^2 c^4$ :

$$\begin{aligned}
 \hbar^2 k_\mu k^\mu & = (p_{1\mu} - p_{2\mu})(p_1^\mu - p_2^\mu) = p_{1\mu} p_1^\mu + p_{2\mu} p_2^\mu - 2p_{1\mu} p_2^\mu = m^2 c^4 + m^2 c^4 - 2p_{1\mu} p_2^\mu = \\
 & = 2(m^2 c^4 - E_1 E_2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) = 2(m^2 c^4 - mc^2 E_2) = 2mc^2(mc^2 - E_2) \neq 0
 \end{aligned}$$

in quanto  $E_2 > mc^2$ , d'altra parte vale  $k_\mu k^\mu = |\vec{k}|^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$ , per cui la condizione nella delta e' impossibile da verificarsi ed il fenomeno fisico descritto non puo' avvenire. Si puo' ragionare in modo analogo per gli altri sette fenomeni di interazione, per cui si deduce che nessuno di questi e' possibile. Quindi, *gli otto processi elementari descritti non sono realizzabili al primo ordine.*

#### PRODOTTO CRONOLOGICO

Agli ordini successivi di approssimazione compaiono prodotti di operatori che in generale non commutano fra loro. Al secondo ordine si ha:

$$-\frac{e^2}{2\hbar^2 c^2} \int \bar{\psi}(x_2) \gamma_\mu \psi(x_2) A^\mu(x_2) \bar{\psi}(x_1) \gamma_\nu \psi(x_1) A^\nu(x_1) d^4 x_1 d^4 x_2$$

sembrirebbe dunque essere presente una certa ambiguita' nella definizione dell'operatore in termini di serie, tuttavia questa ambiguita' viene completamente rimossa grazie alle seguenti considerazioni. Nello sviluppo, si puo' scrivere la potenza  $n$ -sima dell'integrale come un integrale di molteplicita'  $n$ , cioe':

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \int H'(t) dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int [H'_1(t) H'_2(t) \dots H'_n(t)] dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

In questo modo, si interpreta un processo all'ordine  $n$  come una successione ordinata di  $n$  processi elementari: l'ordine temporale di tale successione fornisce



allora l'ordine nel prodotto di operatori (naturalmente, in modo inverso). Così, ad esempio, se un processo di ordine  $n$  è dato dalla successione degli  $n$  processi descritti rispettivamente da  $H'_1(t)H'_2(t) \cdots H'_n(t)$ , nell'ordine temporale, ad esempio,  $t_3 < t_1 < t_2 < t_h < \dots < t_n$ , il prodotto in parentesi si scrive ordinatamente  $H'(t_n) \cdots H'(t_h)H'(t_2)H'(t_1)H'(t_3)$ . Per esplicitare questo ordine cronologico si scrive formalmente:

$$\hat{T}e^{-\frac{i}{\hbar} \int H'(t)dt} = \hat{T}e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int \bar{\psi}(\vec{r},t)\gamma_\mu\psi(\vec{r},t)A^\mu(\vec{r},t)d^4x_\mu}$$



## Capitolo 6

# Fonti per testo e immagini; autori; licenze

### 6.1 Testo

- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Unificazione della meccanica quantistica e della relatività/Impostazione del problema** *Fonte:* [https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Unificazione\\_della\\_mechanica\\_quantistica\\_e\\_della\\_relativita/C3%A0/Impostazione\\_del\\_problema?oldid=47271](https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica_Quantistica_Relativistica/Unificazione_della_mechanica_quantistica_e_della_relativita/C3%A0/Impostazione_del_problema?oldid=47271) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Unificazione della meccanica quantistica e della relatività/Equazione di Klein-Gordon** *Fonte:* [https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Unificazione\\_della\\_mechanica\\_quantistica\\_e\\_della\\_relativita/C3%A0/Equazione\\_di\\_Klein-Gordon?oldid=47273](https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica_Quantistica_Relativistica/Unificazione_della_mechanica_quantistica_e_della_relativita/C3%A0/Equazione_di_Klein-Gordon?oldid=47273) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Unificazione della meccanica quantistica e della relatività/Equazione di Dirac** *Fonte:* [https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Unificazione\\_della\\_mechanica\\_quantistica\\_e\\_della\\_relativita/C3%A0/Equazione\\_di\\_Dirac?oldid=47275](https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica_Quantistica_Relativistica/Unificazione_della_mechanica_quantistica_e_della_relativita/C3%A0/Equazione_di_Dirac?oldid=47275) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Equazione di Dirac: sviluppi e conseguenze/Formalismo dei bispinori e interazione elettromagnetica** *Fonte:* [https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Equazione\\_di\\_Dirac%3A\\_sviluppi\\_e\\_conseguenze/Formalismo\\_dei\\_bispinori\\_e\\_interazione\\_elettromagnetica?oldid=47284](https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica_Quantistica_Relativistica/Equazione_di_Dirac%3A_sviluppi_e_conseguenze/Formalismo_dei_bispinori_e_interazione_elettromagnetica?oldid=47284) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Equazione di Dirac: sviluppi e conseguenze/Bispinori: soluzioni a massa nulla** *Fonte:* [https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Equazione\\_di\\_Dirac%3A\\_sviluppi\\_e\\_conseguenze/Bispinori%3A\\_soluzioni\\_a\\_massa\\_nulla?oldid=47286](https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica_Quantistica_Relativistica/Equazione_di_Dirac%3A_sviluppi_e_conseguenze/Bispinori%3A_soluzioni_a_massa_nulla?oldid=47286) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Equazione di Dirac: sviluppi e conseguenze/Teoria di Dirac. Antiparticelle** *Fonte:* [https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Equazione\\_di\\_Dirac%3A\\_sviluppi\\_e\\_conseguenze/Teoria\\_di\\_Dirac.\\_Antiparticelle?oldid=47288](https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica_Quantistica_Relativistica/Equazione_di_Dirac%3A_sviluppi_e_conseguenze/Teoria_di_Dirac._Antiparticelle?oldid=47288) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Equazione di Dirac: sviluppi e conseguenze/Invarianza per trasformazioni** *Fonte:* [https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Equazione\\_di\\_Dirac%3A\\_sviluppi\\_e\\_conseguenze/Invarianza\\_per\\_trasformazioni?oldid=47290](https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica_Quantistica_Relativistica/Equazione_di_Dirac%3A_sviluppi_e_conseguenze/Invarianza_per_trasformazioni?oldid=47290) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Riscrittura delle equazioni di Maxwell/Formulazione covariante delle equazioni di Maxwell** *Fonte:* [https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Riscrittura\\_delle\\_equazioni\\_di\\_Maxwell/Formulazione\\_covariante\\_delle\\_equazioni\\_di\\_Maxwell?oldid=47295](https://it.wikiversity.org/wiki/Meccanica_Quantistica_Relativistica/Riscrittura_delle_equazioni_di_Maxwell/Formulazione_covariante_delle_equazioni_di_Maxwell?oldid=47295) *Contributori:* Valsdav e Valeb



- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Riscrittura delle equazioni di Maxwell/Equazioni di Maxwell in forma quantistica** *Fonte:* [https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Riscrittura\\_delle\\_equazioni\\_di\\_Maxwell/Equazioni\\_di\\_Maxwell\\_in\\_forma\\_quantistica?oldid=47297](https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Quantistica_Relativistica/Riscrittura_delle_equazioni_di_Maxwell/Equazioni_di_Maxwell_in_forma_quantistica?oldid=47297) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Riscrittura delle equazioni di Maxwell/Operatore energia, impulso e momento angolare** *Fonte:* [https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Riscrittura\\_delle\\_equazioni\\_di\\_Maxwell/Operatore\\_energia%2C\\_impulso\\_e\\_momento\\_angolare?oldid=47299](https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Quantistica_Relativistica/Riscrittura_delle_equazioni_di_Maxwell/Operatore_energia%2C_impulso_e_momento_angolare?oldid=47299) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Sistemi di Particelle Identiche/Introduzione** *Fonte:* [https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Sistemi\\_di\\_Partelle\\_Identiche/Introduzione?oldid=47308](https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Quantistica_Relativistica/Sistemi_di_Partelle_Identiche/Introduzione?oldid=47308) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Sistemi di Particelle Identiche/Formalismo di Seconda Quantizzazione per Bosoni** *Fonte:* [https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Sistemi\\_di\\_Partelle\\_Identiche/Formalismo\\_di\\_Seconda\\_Quantizzazione\\_per\\_Bosoni?oldid=47310](https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Quantistica_Relativistica/Sistemi_di_Partelle_Identiche/Formalismo_di_Seconda_Quantizzazione_per_Bosoni?oldid=47310) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Sistemi di Particelle Identiche/Formalismo di Seconda Quantizzazione per Fermioni** *Fonte:* [https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Sistemi\\_di\\_Partelle\\_Identiche/Formalismo\\_di\\_Seconda\\_Quantizzazione\\_per\\_Fermioni?oldid=47447](https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Quantistica_Relativistica/Sistemi_di_Partelle_Identiche/Formalismo_di_Seconda_Quantizzazione_per_Fermioni?oldid=47447) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Elettrodinamica quantistica/Quantizzazione del campo elettromagnetico** *Fonte:* [https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Elettrodinamica\\_quantistica/Quantizzazione\\_del\\_campo\\_elettromagnetico?oldid=47448](https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Quantistica_Relativistica/Elettrodinamica_quantistica/Quantizzazione_del_campo_elettromagnetico?oldid=47448) *Contributori:* Valsdav e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Elettrodinamica quantistica/Quantizzazione del campo elettronico** *Fonte:* [https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Elettrodinamica\\_quantistica/Quantizzazione\\_del\\_campo\\_elettronico?oldid=47445](https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Quantistica_Relativistica/Elettrodinamica_quantistica/Quantizzazione_del_campo_elettronico?oldid=47445) *Contributori:* Valsdav, V.e.padulano e Valeb
- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Elettrodinamica quantistica/Quantizzazione dell'interazione fotone-elettrone** *Fonte:* [https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica\\_Quantistica\\_Relativistica/Elettrodinamica\\_quantistica/Quantizzazione\\_dell\\_interazione\\_fotone-elettrone?oldid=47446](https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Quantistica_Relativistica/Elettrodinamica_quantistica/Quantizzazione_dell_interazione_fotone-elettrone?oldid=47446) *Contributori:* Valsdav e Valeb

## 6.2 Immagini

- **File:TeoriaDirac.jpg** *Fonte:* <http://it.wikitolearn.org/images/it/f/f3/TeoriaDirac.jpg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

## 6.3 Licenza dell'opera

- [Project:Copyright Creative Commons Attribution Share Alike 3.0 & GNU FDL]
- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0

