Corso:Meccanica Quantistica/Spinori, particelle identiche, simmetrie interne/Spinori

Nota: c'è continuità implicita tra questo capitolo e il precedente; si è scelto di dividerlo in due per evitare di avere une trattazione eccessivamente lunga senza distinzioni, ma deve essere chiaro che il discorso è unico.

Consideriamo solo stati a spin $\frac{1}{2}$; come abbiamo visto, questi stati sono particolari: su di loro agisce il gruppo $SU(2)$ formato dalla matrici di Pauli. Chiameremo **spinore** la funzione d'onda del solo spin:

$$(\mathbf{\Psi}^m_{\frac{1}{2}}, \mathbf{\Psi}) = \psi^m$$

Sempre ricordando la possibilità di espandere su una base completa, in questo caso quella degli stati a spin semi intero, qualsiasi stato. Consideriamo una trasformazione dello stato:

$$\mathbf{\Psi} \rightarrow \mathbf{\Psi'} = \mathcal{U}\mathbf{\Psi} = \sum_m \mathcal{U}\mathbf{\Psi}^m(\mathbf{\Psi}^m, \mathbf{\Psi})$$

Con $\mathcal{U}$ operatore unitario nello spazio di Hilbert. Il rispettivo spinore si trasforma come segue:

$$\psi'^m = (\mathbf{\Psi}^{m'}, \mathbf{\Psi'}) = \sum_m (\mathbf{\Psi}^{m'}, \mathcal{U}\mathbf{\Psi}^m)(\mathbf{\Psi}^m, \mathbf{\Psi})$$

Possiamo scriverlo semplicemente come un **prodotto riga per colonna** $(\psi')^{m'} = \sum_m \mathcal{U}_{m'm}\psi^m$. L'operatore unitario in questo caso vogliamo che agisca come operatore di rotazione, quindi possiamo esprimerlo in funzione delle matrici di Pauli:

$$\mathcal{U} = \mathbb{I} + \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}$$
$$\left(\mathbf{\Psi}^{m'}, \left(\mathbb{I} + \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\right)\mathbf{\Psi}^m\right) = \delta_{mm'} + \frac{i}{\hbar}\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{\Psi}^{m'}, \mathbf{J}\mathbf{\Psi}^m) = \delta_{mm'} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

Che la realizzazione di una rotazione per uno spinore dipendesse dalle matrici di Pauli, tuttavia, già lo sapevamo dallo scorso capitolo. Potremo compiere una trasformazione finita semplicemente operando $\psi' = e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\psi$, in termini matriciali:

$$(\psi')^m = \sum_{m'} \mathcal{U}_{m'm}\psi^{m'}$$

L'esponenziale di matrici, tuttavia, può risultare abbastanza fastidioso, per di più con operatori non lineari o che non commutano. Il caso delle matrici di Pauli tuttavia è particolarmente comodo: conosciamo già il commutatore $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\,\epsilon_{ijk}\sigma_k$; a questo associamo **l'anticommutatore**:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}$$

Mettendoli in relazione:

$$2\sigma_i\sigma_j = [\sigma_i, \sigma_j] + \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} + 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

In breve $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k$. Espandendo in serie l'esponenziale ci torna comodo:

$$e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}} \approx \mathbb{I} + \frac{i}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \frac{i}{2}\frac{(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2}{2!}$$

Posto $\boldsymbol{\omega} = \theta\hat{\mathbf{n}}$, il termine quadratico possiamo esprimerlo in funzione del versore angolare $(\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2 = n_i n_j \sigma_i\sigma_j$; andando a sostituire la relazione ricavata da commutatore e anticommutatore:

$$n_i n_j(\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k) = n_i n_j\delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}n_i n_j\sigma_k = (\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}) + i(\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{n}})\cdot\boldsymbol{\sigma} = 1$$

Quindi estendendo l'esponenziale otteniamo la relazione:

$$e^{\frac{i}{2}\theta(\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})} = \mathbb{I}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i(\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Questa trasformazione è molto particolare: **se compiamo una rotazione di 2π attorno l'asse $\hat{\mathbf{z}}$ non torniamo al punto di prima**! Lo spinore cambia segno. Magia.

Un'altra importante caratteristica delle matrici di Pauli è la relazione che le vede legate al tensore di Levi-Civita di rango 2:

$$i\sigma_2 = i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon_{ij}$$

Applicando questo a uno spinore qualsiasi:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi^2 \\ -\psi^1 \end{vmatrix}$$

Si definisce allora **spinore covariante**, e ha gli indici bassi rispetto alla sua versione *controvariante* (che ha gli indici alti):

$$\begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \psi^2 \\ -\psi^1 \end{vmatrix}$$

Questa non è una differenza sottile o di poco conto: considerati due spinori, uno controvariante ψ e uno covariante ϕ , il loro prodotto scalare è nullo:

$$\psi^\lambda \phi_\lambda = \psi^1\phi_1 + \psi^2\phi_2 = (-\psi_2)(\phi^2) + (\psi_1)(-\phi^1) = -\psi_\lambda \phi^\lambda$$

A questo punto vediamo come si trasformano gli spinori covarianti. Avremo ovviamente $\psi \to \mathcal{U}\psi$, ma se moltiplichiamo entrambi i membri per il tensore di Levi-Civita (osserviamo al secondo passaggio che $\sigma_2\sigma_2 = \mathbb{I}$):

$$\begin{aligned}
(i\sigma_2)\psi &\to i\sigma_2 e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\psi \\
&\to i\sigma_2 e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\sigma_2\sigma_2\psi \\
&\to \sigma_2 e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\sigma_2(i\sigma_2)\psi
\end{aligned}$$

Per le matrici di Pauli vale un'importante proprietà: $\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\sigma_2 = -\boldsymbol{\sigma}^T$, da cui $\sigma_2\mathcal{U}\sigma_2 = \mathcal{U}^*$, quindi **i covarianti si trasformano con l'operatore $\mathcal{U}^*$** , mentre i controvarianti con l'operatore $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}
\psi^i &\to \mathcal{U}\psi^i \\
\psi_i &\to \mathcal{U}^*\psi_i
\end{aligned}$$

Concludiamo con la parte più importante del discorso. Abbiamo visto che moltiplicare uno spinore per il tensore di Levi-Civita ci fa abbassare l'indice; se lo utilizziamo allora in maniera furba possiamo ottenere cose interessanti:

$$\epsilon_{m''m'}\psi^{m'\,m''} = \psi^{\;m''}_{m''}$$

Il risultato finale ha gli indici *muti* (indici ripetuti si sommano): abbiamo ottenuto **uno spinore scalare**. Se consideriamo uno spinore con $2j$ indici *simmetrici*, se lo moltiplichiamo per il tensore di Levi-Civita otterremo ovviamente **zero** (ϵ_{ij} è un tensore antisimmetrico). D'altro canto, uno spinore antisimmetrico può essere invece *degradato* sfruttando l'epsilon.

Sfruttando tutte queste nozioni, possiamo riscrivere in maniera più semplice e compatta la somma di momenti angolari utilizzando solo gli spinori:

$$\boldsymbol{\Psi}^{m',m''}_{j',j''} \to \psi^{m_1,\cdots,m_{2j'};\,n_1,\cdot,n_{2j''}}$$

Lo spinore a destra è di rango $2j' + 2j''$; moltiplicandolo per ϵ_{ij} il suo rango scenderà di 2:

$$\epsilon_{\bar{m},\bar{n}}\psi^{m_1,\cdots,m_{2j'};\,n_1,\cdot,n_{2j''}} = \psi_{\bar{m}}^{m_1,\cdots,\bar{m},\cdots,m_{2j'};\,n_1,\cdots,\bar{n}-1,\bar{n}+1,\cdots,n_{2j''}}$$

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Corso:Meccanica Quantistica/Spinori, particelle identiche, simmetrie interne/-Spinori** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Quantistica/Spinori%2C_particelle_identiche%2C_simmetrie_interne/Spinori?oldid=48768 *Contributori:* Mapelli Dario, Dan e Thomas Bino

1.2 Immagini

1.3 Licenza dell'opera