Utente:Dan/Elettromagnetismo/Elettrostatica/Applicazioni del teorema di Gauss

Forse è superfluo precisarlo, ma il teorema di Gauss ha innumerevoli applicazioni nella soluzione di esercizi e problemi. Infatti, sapendo che il flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie è pari a $\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$, si può calcolare facilmente l'espressione del campo elettrico, prendendo in esame il flusso attraverso le note **superfici gaussiane**, ovvero delle superfici costruite ad hoc caso per caso che, rispettando e migliorando la simmetria del sistema, permettono una facile soluzione al problema. Ne diamo qualche esempio.

Esempio (2.6)

Partiamo da un caso opposto. Abbiamo noto il campo elettrico, che vale $\mathbf{E} = Kr^3\hat{\mathbf{r}}$, dobbiamo calcolarci:

1. la densità di carica;
2. la carica contenuta in una sfera di raggio R centrata nell'origine *in due modi diversi.*

Partiamo dal calcolare la densità di carica; dalla prima equazione di Maxwell vale $\rho = \epsilon_0(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E})$, quindi basta applicarla per ottenere la soluzione. Poiché il campo è scritto in coordinate sferiche, conviene calcolare la divergenza in questo set di coordinate:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^2}(r^2\,E_r)$$
$$\rho = \epsilon_0\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r^2}(r^2\,Kr^3) = 5\epsilon_0 Kr^2$$

Passiamo ora al secondo punto, trovare la carica interna a una sfera di raggio qualsiasi con centro nell'origine. Possiamo procedere in due modi: il primo è banale, basta calcolare la carica totale come $Q = \int_\tau \rho d\tau$, ricordando che il volume di una sfera vale $\tau = \frac{4}{3}\pi r^3$, differenziando otteniamo $d\tau = 4\pi r^2 dr$, quindi la carica contenuta sarà pari a:

$$Q = \int_\tau \rho d\tau = \int_0^R 5\epsilon_0 Kr^2\,4\pi r^2 dr = 4\pi K\epsilon_0 r^5$$

Un altro modo per calcolarla è applicare il teorema di Gauss, prendendo come superficie gaussiana la stessa superficie della sfera:

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_S Kr^3 \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = Kr^3 \int_S dS$$

Da cui otteniamo il risultato $Q_{\text{int}} = 4\pi K \epsilon_0 r^5$

Questo era un esempio di esercizio standard per poter valutare le conoscenze generali dell'elettrostatica. Tuttavia il teorema di Gauss è utile anche per calcolare campi elettrici di distribuzioni standard, come sfere, cilindri, piani.

Esempio (2.6 Sfera carica uniformemente)

Vogliamo calcolare il **campo elettrico generato da una sfera carica** in tutto lo spazio. Assumiamo che la carica totale della sfera sia Q e questa abbia raggio R finito (se fosse infinito, non sarebbe una sfera carica ma sarebbe tutto lo spazio euclideo ad essere carico, il che è un po' strano). Da queste due informazioni otteniamo la densità di carica volumica:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Osserviamo che questa è **costante**, indipendente dalla posizione all'interno della sfera. Per questo motivo, e anche per il fatto che una sfera ha simmetria sferica (tautologie moderne) , ci aspettiamo che il campo sia **radiale**, scrivibile in forma $\mathbf{E} = E(\mathbf{r})\, \hat{\mathbf{r}}$. Applichiamo allora il teorema di Gauss, prendendo come superficie gaussiana una sfera centrata nel centro della sfera carica e di raggio $r > R$; otteniamo:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \int_S E(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = E(r) 4\pi r^2$$

Lo uguagliamo al valore del flusso $\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ ottenendo:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{r}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Ovvero il campo generato da una sfera **è uguale al campo generato da una carica puntiforme situata nel centro della sfera con carica pari alla carica totale della sfera**. Questo però avviene *fuori* dalla sfera: a noi interessa il campo elettrico in tutto lo spazio. Quindi, dobbiamo calcolarlo anche nei punti interni della sfera, dove vale $r < R$. Anche qui prendiamo come superficie gaussiana una sfera di centro il centro della carica e di raggio r , ma stavolta dobbiamo stare attenti al fatto che **la carica interna alla superficie gaussiana non è la carica totale del sistema**; infatti la carica interna è $Q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$, quindi applichiamo il teorema di Gauss a questo valore di carica interna:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \int_\tau \rho d\tau = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3$$

Da cui otteniamo $E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$; sostituendo alla densità il valore espresso a inizio problema e riordinando le cose, otteniamo l'espressione generale del campo elettrico in tutto lo spazio:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{r}{R^3}\hat{\mathbf{r}} & \text{per } r \le R \\ \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}} & \text{per } r > R \end{cases}$$

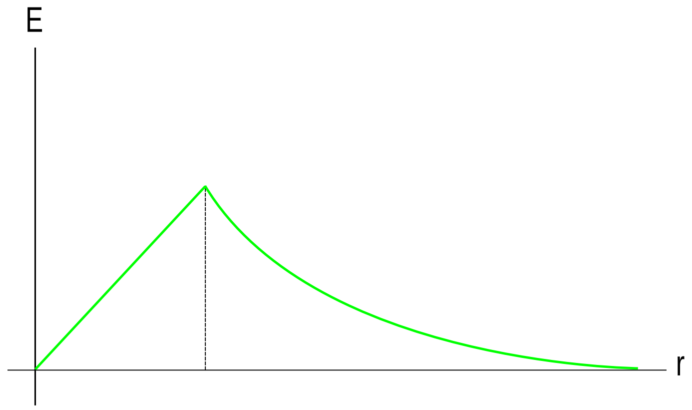

Fig. 2.7: andamento in funzione della distanza del campo elettrico di una sfera carica

Esempio (2.7 Piano infinito di carica)

Vediamo ora l'espressione del campo elettrico **generato da un piano infinito di carica**. Come abbiamo già anticipato qualche sezione fa, questo campo è uniforme in tutto lo spazio, con direzione normale al piano, e può essere utilizzato per approssimare il campo all'interno di un condensatore.

Ricavare l'espressione del campo è molto semplice. Prendiamo come superficie gaussiana una scatola (parallelepipedo) che intersechi il piano, con due facce parallele a questo e le altre quattro ortogonali (spesso si usa un cilindro, ma è la stessa cosa). La carica interna alla superficie, poiché il piano ha densità uniforme σ , sarà $Q = \sigma A$ dove con A indichiamo l'area delle due facce parallele al piano. Proprio perché sono parallele al piano, il vettore campo elettrico $\mathbf{E}$ le interseca ortogonalmente (il versore normale alla superficie e il campo elettrico sono paralleli), e quindi il flusso attraverso ognuna di essa sarà pari a $\Phi = AE$; poiché queste sono due, il flusso totale attraverso la scatola sarà $\Phi = 2AE$ (si ricorda che le facce parallele hanno flusso nullo in quanto il versore normale alla superficie e il campo elettrico sono ortogonali). Applicando il teorema di Gauss:

$$2E(\mathbf{r})A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Se ci sono due piani infiniti, uno con densità σ e l'altro con densità $-\sigma$, il campo elettrico in tutto lo spazio sarà nullo (infatti i due campi si annullano), escluso il volume compreso tra i due piani, in cui vale $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (perché sono concordi e vengono sommati) ed è diretto dalla lastra positiva a quella negativa.

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Elettrostatica/Applicazioni del teorema di Gauss** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Elettrostatica/Applicazioni_del_teorema_di_Gauss?oldid=46148 *Contributori:* Dan

1.2 Immagini

- **File:Esfera.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/d/d9/Esfera.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

1.3 Licenza dell'opera