Utente:Dan/Elettromagnetismo/ Appendice B: riferimenti matematici/Teorema di Helmholtz

In virtù della teoria classica dell'elettrodinamica, il teorema di Helmholtz risulta *fondamentale* per dare un senso a tutto quello che si fa. D'altronde, le quattro equazioni di Maxwell sono divergenza e rotore dei campi elettrico e magnetico: cosa ci dice che, dati divergenza e rotore di un campo vettoriale, questo risulta essere univocamente definito? A dircelo è proprio il teorema di Helmholtz, che afferma **Se sono note la divergenza D e il rotore $\mathbf{C}$ di un campo vettoriale $\mathbf{F}$, e entrambi vanno a 0 all'infinito più rapidamente di $\frac{1}{r^2}$, e anche il campo stesso va a zero all'infinito, allora il campo vettoriale è univocamente definito dalla seguente espressione**:

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{4\pi}\int_{AS}\frac{D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'\right) + \boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{1}{4\pi}\int_{AS}\frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'\right)$$

Dove gli integrali sono calcolati su tutto lo spazio.

Vediamo come possiamo dimostrarlo. Ricordiamo che $D = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}$ e $\mathbf{C} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}$; chiamiamo:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{AS}\frac{D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'$$
$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{AS}\frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'$$

L'espressione di $\mathbf{F}$ diventa:

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}U + \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{W}$$

Per vedere se le cose hanno senso, se calcoliamo la divergenza di questa espressione:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}^2U = -\frac{1}{4\pi}\int_{AS}D(\mathbf{r}')\,\boldsymbol{\nabla}^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)d\tau' = -\frac{1}{4\pi}\int_{AS}D(\mathbf{r}')(-4\pi)\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\tau' = D\mathbf{r}$$

Ha senso con quanto scritto finora. Il rotore invece:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}^2\mathbf{W} + \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{W})$$

Per il laplaciano avremo:

$$-\nabla^2 \mathbf{W} = -\frac{1}{4\pi}\int_{AS} \mathbf{C}(\mathbf{r}')\,\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d\tau' = \mathbf{C}(\mathbf{r})$$

Ottimo, a meno che $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{W}) = 0$. La divergenza di $\mathbf{W}$ vale:

$$\nabla\cdot\mathbf{W} = \frac{1}{4\pi}\int_{AS} \mathbf{C}(\mathbf{r}')\,\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d\tau' = -\frac{1}{4\pi}\int_{AS} \mathbf{C}(\mathbf{r}')\,\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d\tau'$$

Dove abbiamo usato la stessa uguaglia vista nella sezione 6.6 (relazione tra gradiente puro e gradiente primato). Applicando la formula $\nabla\cdot(f\mathbf{v}) = \nabla f\cdot\mathbf{v} + f(\nabla\cdot\mathbf{v})$, ovvero:

$$\nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = \mathbf{C}(\mathbf{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) + \frac{\nabla'\cdot\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

Possiamo allora riscrivere:

$$\nabla\cdot\mathbf{W} = \frac{1}{4\pi}\int_{AS} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\cdot\mathbf{C}(\mathbf{r}')d\tau' - \int_{\tau}\nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d\tau'$$

Applichiamo al secondo membro a destra il teorema della divergenza:

$$\nabla\cdot\mathbf{W} = \frac{1}{4\pi}\int_{AS} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\cdot\mathbf{C}(\mathbf{r}')d\tau' - \int_{\partial\tau}\frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot\hat{n}\,dS$$

Allora, il primo termine è sempre nullo, perché $\nabla\cdot\mathbf{C} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})$ e la divergenza di un rotore è sempre nulla; il secondo termine invece è un integrale di superficie *all'infinito*, e se $\mathbf{C}$ va a zero all'infinito abbastanza in fretta questo sarà nullo.

Questo significa anche dire che gli integrali nelle espressioni di U e $\mathbf{W}$ convergono, anche perché se non convergessero i due campi non esisterebbero. Per $r' \to \infty$ possiamo assumere $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r'$, e i due integrali avranno una forma del tipo ($d\tau' \propto r'^2 dr'$) :

$$\int_{\infty} \frac{\mathrm{X}(r')}{r'} r'^2\,dr' = \int_{\infty} r'\mathrm{X}(r')\,dr'$$

Dove X vale D o $\mathbf{C}$ a seconda del caso. Da questa relazione concludiamo che $\mathrm{X}(r')$ non può essere proporzionale ne a $\frac{1}{r'}$ (perché l'integrale di una costante su uno spazio infinito diverge), ne a $\frac{1}{r'^2}$, perché anche l'integrale di un logaritmo diverge. In conclusione, *i campi* D *e* $\mathbf{C}$ *devono andare a zero all'infinito più rapidamente di* $\frac{1}{r^2}$, il che rende $\nabla\cdot\mathbf{W}$ nulla, per quanto ne abbiamo detto.

Quindi, possiamo scrivere il nostro campo vettoriale esprimibile come:

$$\mathbf{F} = -\nabla U + \nabla\times\mathbf{W}$$

Cosa ci assicura che questa scrittura sia unica? Nessuno: possiamo tranquillamente aggiungere a $\mathbf{F}$ un qualsiasi campo vettoriale che abbia divergenza e rotore nullo e ottenere la stessa rappresentazione. Meno male che un campo irrotazionale e solenoidale allo stesso tempo non possa che essere nullo: **la scrittura è unica, il campo F risulta univocamente determinato dalla sua divergenza e dal suo rotore**.

Piccolo appunto: vi siete mai chiesti perché nelle espressioni dei campi elettrico e magnetico (e di tutti i derivati: campi ausiliari, potenziali ecc) ci sia sempre un 4π al denominatore? È tutto in virtù del teorema di Helmholtz.

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Appendice B: riferimenti matematici/Teorema di Helmholtz** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Appendice_B%3A_riferimenti_matematici/Teorema_di_Helmholtz?oldid=46200 *Contributori:* Dan

1.2 Immagini

1.3 Licenza dell'opera