Utente: Dan/Elettromagnetismo/Induzione elettromagnetica/Invarianza relativistica

Abbandoniamo il regime stazionario per iniziare ad approcciarsi, molto gradualmente, al regime dinamico, dove analizzeremo le grandezze fondamentali introdotte finora, i campi e le rispettiva sorgenti, quando sono in movimento e dipendenti dal tempo. Prima di fare questo, occorre dare delle nozioni generali di invarianza relativistica.

Innanzitutto, avremo a che fare con **quadrivettori**: questi sono vettori a quattro componenti *che rispettano le trasformazioni di Lorentz*; non è vero che tutti i vettori a quattro componenti sono quadrivettori, ma è vero che tutti i quadrivettori sono vettori a quattro componenti (ma dai?). Un quadrivettore rappresenta un evento nel quadrispazio di Minkowsky; le componenti del quadrivettore sono divise in parte temporale e parte spaziale, e si contano da 0 a 3. A riguardo, ci sono due diversi tipi di notazioni: una prevede che la componente a^0 di un quadrivettore sia la parte temporale, mentre l'altra preferisce la parte temporale come ultima componente, a^3 . Noi scegliamo la prima di queste due.

Un esempio di quadrivettore è la **quadriposizione** (anche detta quadridistanza) che indica la posizione di un evento nello spazio di Minkowsky, ed è definita come:

$$\underline{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$$

La costante c (velocità della luce) viene introdotta per far sì che tutte le componenti del quadrivettore abbiano le stesse dimensioni fisiche.

Spesso, per poter determinare se un vettore sia o meno un quadrivettore si cercano delle analogie con altri quadrivettori, di cui è appurato essere quadrivettori, e li si confronta, determinando o meno l'essere quadrivettore del nostro vettore incognito (sarà più chiaro nella prossima sezione). Un quadrivettore che rispetta le trasformazioni di Lorentz si dice **controvariante**: parlare di controvariante o quadrivettore è la stessa cosa. Un controvariante si indica con le componenti "in alto":

$$\underline{x} = x^\mu$$

Presi due vettori, si definisce il prodotto scalare come:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$$

Secondo la **notazione di Einstein**, quando c'è un indice ripetuto si sottintende una sommatoria. Nel nostro caso, allora, il prodotto scalare sarà:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} q_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu}$$

Il termine $g_{\mu\nu}$ sta a indicare un **tensore** che ci definisce la metrica del nostro spazio; questa può essere differente a seconda della notazione scelta (ovvero se abbiamo scelto di mettere la componente temporale prima o dopo quelle spaziali). Le diverse scelte possibili sono quindi due e sono equivalenti dal punto di vista fisico. Questo tensore si trova moltiplicando scalarmente la quadridistanza con se stessa:

$$\underline{x} \cdot \underline{x} = (\underline{x})^2$$

Questa grandezza è **invariante relativistica**, ovvero non cambia sotto trasformazioni di Lorentz. Uguagliando questa espressione e quella del prodotto scalare generico si ottiene il tensore cercato, nel nostro caso pari a:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La differenza tra un tensore e una matrice è la stessa che intercorre tra un vettore e un quadrivettore: i tensori si trasformano in un determinato modo sotto trasformazioni di Lorentz.

Dato un quadrivettore controvariante, si può applicare un'operazione il cui risultato è una rappresentazione **covariante** dello stesso; l'operazione è detta **abbassamento (o alzamento) dell'indice** e vale:

$$a_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu}$$

In questo modo si ridefinisce il vettore, cambiando segno alle sue componenti spaziali. Un vettore covariante tuttavia *non si trasforma come un controvariante* sotto le trasformazioni di Lorentz, ma si trasforma **come la derivata di uno scalare**. Se s è uno scalare, le trasformazioni di $\frac{ds}{dx_{\mu}}$ sono uguali a quelle di un quadrivettore covariante, ovvero hanno la stessa "rotazione" nello spazio (nel quadrispazio parlare di rotazioni può confondere in quanto non avviene come negli spazi euclidei che ruotano gli assi, ma le rotazioni sono contrazioni o dilatazioni del cono di luce).

La comodità del covariante sta nel poter scrivere il prodotto scalare più comodamente:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} = a_{\nu} b^{\nu}$$

Così facendo si dimostra molto facilmente che **il prodotto scalare è invariante sotto trasformazioni di Lorentz**. La trasformazione di Lorentz è quella rispettata da un controvariante. Passando da un sistema di riferimento inerziale all'altro, i quadrivettori variano linearmente con l'applicazione λ^μ_ν che indica la trasformazione di Lorentz, ovvero:

$$a'^\mu = \lambda^\mu_\nu a^\nu$$

Posto $\beta = \frac{v}{c}$, con v velocità del sistema di riferimento considerato, e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, se i due sistemi di riferimento sono in moto relativo solo lungo l'asse $\hat{\mathbf{x}}$ (chiameremo questo un *boost di Lorentz lungo* x) la trasformazione è:

$$\lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questo **non è un tensore**. Come possiamo notare, la trasformazione di Lorentz dipende da β , da γ e anche dalla direzione in cui la si compie.

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Induzione elettromagnetica/Invarianza relativistica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Induzione_elettromagnetica/Invarianza_relativistica?oldid=44034 *Contributori:* Dan

1.2 Immagini

1.3 Licenza dell'opera