Utente: Dan/Elettromagnetismo/Campo elettromagnetico e onde/Onde piane

1 Soluzione all'equazione di d'Alambert: onde piane

Come abbiamo visto, nel vuoto le equazioni di Maxwell possono essere riscritte in modo che i campi **E** e **B** rispettino l'equazione delle onde di d'Alambert:

$$\Box \mathbf{E} = 0$$
$$\Box \mathbf{B} = 0$$

Con la velocità di propagazione $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$. Nei mezzi omogenei, isotropi e lineari la velocità diminuisce, vale infatti:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$$

Abbiamo approssimato $\sqrt{\mu_r\epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$ in quanto nei mezzi omogenei e lineari $\mu_r \sim 1$ e, come vedremo, non influisce sulla rifrazione dell'onda; n si chiama proprio **indice di rifrazione del mezzo** e ci fornisce la velocità dell'onda. La soluzione generale all'equazione di d'Alambert dovrebbe essere nota al lettore: può essere scritta come somma di due funzioni, un'onda progressiva e un'onda regressiva, con $f(x,t) = f(x \mp vt)$ le variabili spaziali e temporali non indipendenti tra loro.

La forma generale della funzione che si propaga nello spazio dipende dall'impulso con cui abbia costruito l'onda, ovvero da come abbiamo preso nello spazio le sorgenti con cui abbiamo generato la perturbazione. Una soluzione più comoda delle onde progressive e regressive è data dalla soluzione sinusoidale:

$$f(x \mp vt) = A\sin(x \mp vt + \phi)$$

Dove ϕ indica la fase dell'onda rispetto al nostro sistema di riferimento. Questo tipo di onde presenta una sola frequenza e per questo viene chiamata **monocromatica**. Questa formulazione generale può essere scritta in forma adimensionale, ricordando le caratteristiche fondamentali delle onde:

$$\text{pulsazione } \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$
$$\text{frequenza } \nu = \frac{1}{T}$$
$$\text{velocita } v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$$
$$\text{numero d'onda } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Ricordiamo che T è il periodo dell'onda e λ è la lunghezza d'onda. Usando queste relazioni, la funzione può essere scritta come:

$$f = A\sin\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{vt}{\lambda}\right) + \phi\right)$$

Considerando $\phi = \frac{\pi}{2}$, otteniamo la nostra forma generale che useremo d'ora in avanti:

$$f = A\cos(kx - \omega t)$$

Questa è un'onda che si propaga nella direzione $\hat{\mathbf{x}}$. Nel caso generale, si propagherà in una direzione generica $\hat{\mathbf{n}}$; possiamo esprimere il numero d'onda come un vettore, $\mathbf{k} = k\,\hat{\mathbf{n}}$ con il modulo pari al numero d'onda e la direzione di propagazione dell'onda. Così facendo, otterremo:

$$f = A\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$$

Questa è la forma più generale delle onde sinusoidali. Per il nostro studio, conviene riscriverla ancora in un altro modo, ovvero in forma esponenziale:

$$f = \mathbf{A}e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$$

Per avere la nostra soluzione prenderemo ovviamente la parte reale di questa espressione; j indica l'unità immaginaria $j = (0, 1)$ e $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ è un vettore le cui componenti dipendono dalle componenti del campo elettrico (o magnetico) E_x, E_y, E_z , le quali a loro volta dipendono dalla posizione $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Tratteremo solo onde monocromatiche, sinusoidali e **piane**, ovvero funzioni d'onda il cui valore è uniforme su piani ortogonali alla direzione di propagazione dell'onda. Questa è un'approssimazione che funziona solo molto lontano dalle sorgenti generatrici dell'onda e in piccole zone di spazio. Per semplificare ancora di più le cose, considereremo le onde dipendenti solo dalla variabile x , per cui l'equazione di d'Alambert diventa:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0$$

Questa schematizzazione ha un problema principale e angusto: **non conserva l'energia**. Un esempio di onde in cui vale la conservazione dell'energia sono le onde sferiche, la cui ampiezza decresce con la distanza. In ogni caso, onde piane e onde sferiche sono solo modelli teorici, in quanto irrealizzabili nella realtà.

2 Onde polarizzate

Visto che ci siamo, possiamo semplificarci ancora di più la vita considerando onde **polarizzate**. I campi $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ hanno entrambi tre componenti spaziali: nelle onde polarizzate questi due campi oscillano solo una direzione specifica (che può essere uno dei tre assi o anche una direzione scelta da ubriachi a caso). Sebbene questa sia una semplificazione, la trattazione non perde di generalità: anche per le onde vale il principio di sovrapposizione, e un'onda polarizzata può sempre essere vista come somma di altre onde non polarizzate.

Consideriamo allora che $\mathbf{E}$ oscilli in una sola direzione; i due campi possono essere scritti come:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

Per le onde polarizzate, possiamo dimostrare sfruttando le equazioni di Maxwell due proprietà:

1. $\hat{\mathbf{E}} \perp \hat{\mathbf{B}} \perp \hat{\mathbf{k}}$
2. $\dfrac{E_0}{B_0} = v$

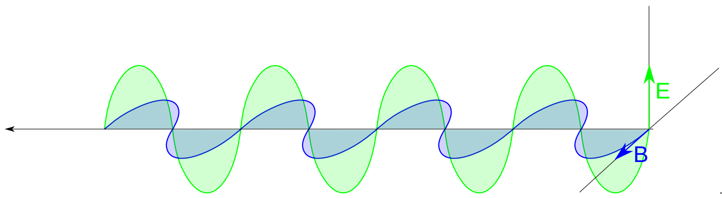

Fig. 9.9: schematizzazione di come si propaga l'onda elettromagnetica rispetto alle oscillazioni dei campi.

Queste due proprietà valgono *per tutti i tipi di onde sinusoidali e monocromatiche*, non solo quelle piane e polarizzate. Dalla proprietà 1 otteniamo un'informazione interessante: le onde elettromagnetiche sono onde trasversali. In figura 9.9 vediamo come si propagano rispetto alle oscillazioni dei campi.

Come possiamo dimostrare le due proprietà? Applichiamo le equazioni di Maxwell ai campi scritti in forma esponenziale; la scrittura esponenziale risulta molto comoda in questi casi, soprattutto per le derivate temporali:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}_0 e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right) = -j\omega\,\mathbf{E}$$
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -j\omega\,\mathbf{B}$$

Le divergenze:

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\mathbf{E}_0 e^{j(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right) = jk_x\mathbf{E} + jk_y\mathbf{E} + jk_z\mathbf{E} = j\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} \\
&\nabla \cdot \mathbf{B} = j\mathbf{k}\cdot\mathbf{B}
\end{aligned}$$

Il rotore è simile alla divergenza (si dimostra facendo il semplice prodotto vettoriale):

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} = j\mathbf{k} \times \mathbf{E} \\
\nabla \times \mathbf{B} = j\mathbf{k} \times \mathbf{B}
\end{aligned}$$

Riscriviamo allora le equazioni di Maxwell; ricordiamo che ci troviamo nel vuoto in assenza di sorgenti:

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \ \rightarrow\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0 \ \rightarrow\ \mathbf{k}\perp\mathbf{E} \\
&\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \ \rightarrow\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} = 0 \ \rightarrow\ \mathbf{k}\perp\mathbf{B} \\
&\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ \rightarrow\ j\mathbf{k}\times\mathbf{E} = j\omega\mathbf{B} \ \rightarrow\ \mathbf{B}\perp\{\mathbf{k},\mathbf{E}\}
\end{aligned}$$

Concludiamo quindi che la proprietà 1 è dimostrata. Per la 2 riscriviamo l'ultima uguaglianza come $\frac{k}{\omega}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = \mathbf{B}$; a questo punto, ricordando le relazioni tra le grandezze delle onde, possiamo esprimere:

$$\frac{k}{\omega} = \frac{\frac{2\pi}{\lambda}}{2\pi\nu} = \frac{1}{\lambda\nu} = \frac{1}{v}$$

Ricordando che la direzione di propagazione è uguale alla direzione della velocità $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{v}}$, otteniamo:

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{v}} \times \mathbf{E}\frac{1}{v} = \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}}{v^2}$$

A questo punto sfruttiamo la quarta equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \ \rightarrow\ j\mathbf{k}\times\mathbf{B} = -\mu_0\epsilon_0(-j\omega\mathbf{E}) \ \rightarrow\ \frac{\mathbf{k}}{\omega}\times\mathbf{B} = \mu_0\epsilon_0\mathbf{E}$$

Come prima ricordiamo $\frac{\mathbf{k}}{\omega} = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{v}$, quindi:

$$\mathbf{E} = -\frac{\hat{\mathbf{v}}\times\mathbf{B}}{\mu_0\epsilon_0\, v} = \frac{\mathbf{B}\times\hat{\mathbf{v}}}{\mu_0\epsilon_0\, v} = \frac{\mathbf{B}\times\hat{\mathbf{v}}}{\frac{v}{v^2}} = \mathbf{B}\times\mathbf{v}$$

Poiché vale la proprietà 1, avremo $E = Bv$ in modulo; concludiamo che $\frac{E_0}{B_0} = v$.

3 Intensità d'onda e pressione di radiazione

Solo perché $\frac{E_0}{B_0} = c$ (nel vuoto), non vuol dire che domini il termine elettrico: per fare un confronto, bisogna avere a che fare con stesse dimensioni fisiche, e i due campi sicuramente non le hanno. Però possiamo confrontare le energie, e ricordando questa relazione tra i due campi vediamo che i due contribuiscono allo stesso modo nell'onda elettromagnetica:

$$
\begin{aligned}
\sqcap_E &= \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \\
\sqcap_M &= \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2\,\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{E^2}{\frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\mu_0} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \sqcap_E
\end{aligned}
$$

L'energia totale trasportata dall'onda sarà la somma delle due $\sqcap = \sqcap_E + \sqcap_M$. Abbiamo trattato il vettore di Poynting e abbiamo visto che questo ha direzione ortogonale ai due campi; è immediato verificare (con la regola della mano destra) che il vettore di Poynting ha la stessa direzione dell'onda e quindi:

$$
\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{EB}{\mu_0}\hat{\mathbf{v}} = \frac{E^2}{c\mu_0}\hat{\mathbf{v}} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0}\frac{E^2}{\mu_0 c}\hat{\mathbf{v}} = \sqcap c\,\hat{\mathbf{v}}
$$

Dove $\sqcap$ è la densità di energia volumica dell'onda. Sappiamo che il vettore di Poynting rappresenta la potenza erogata per unità di superficie; ricordiamo che per un'onda piana e polarizzata i campi li scriviamo come:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0\cos(kx-\omega t) \\
\mathbf{B} &= \mathbf{B}_0\cos(kx-\omega t)
\end{aligned}
$$

Definiamo **intensità istantanea dell'onda**:

$$
\tilde{I}(\mathbf{r},t) = S(\mathbf{r},t) = \frac{E_0 B_0}{\mu_0}\cos^2(kx-\omega t) = E_0 H_0\cos^2(kx-\omega t)
$$

Posto $\frac{E_0}{B_0} = c$, avremo $\frac{E_0}{H_0} = \frac{E_0}{B_0}\mu_0 = c\mu_0$. Questo possiamo esprimerlo:

$$
c\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}\mu_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377\Omega = Z_0
$$

Z_0 si chiama **impedenza caratteristica del vuoto** e ha le dimensioni di una resistenza. Nel caso generale $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$. Quindi possiamo esprimere l'intensità in funzione dell'impedenza caratteristica:

$$
\tilde{I} = E_0 H_0\cos^2(kx-\omega t) = \frac{E_0^2}{Z_0}\cos^2(kx-\omega t)
$$

Si definisce **intensità dell'onda** il valor medio su un periodo dell'intensità, ovvero:

$$
I = \langle S\rangle = \frac{E_0^2}{Z_0}\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(kx-\omega t)\,dt = \frac{E_0^2}{2Z_0}
$$

In sintesi, la coppia $\{\mathbf{S}, I\}$ ci fornisce tutte le informazioni necessarie riguardo la parte energetica dell'onda. Non solo, possiamo quantificare tramite l'intensità anche la quantità di moto trasportata dall'onda. Avevamo definito:

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{S} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S}$$

Il valor medio della densità di quantità di moto corrisponde quindi a:

$$\langle g \rangle = \frac{I}{v^2} = \frac{\langle S \rangle}{v^2} = \frac{\sqcap v}{v^2} = \frac{\sqcap}{v}$$

La quantità di moto media che l'onda trasporta in un volume $d\tau = dA\,dl = dA\,vdt$ sarà quindi:

$$\langle g \rangle \; v\,dAdt = \Delta G = \Delta p = Fdt$$

Si definisce allora **pressione di radiazione** causata da un'onda elettromagnetica:

$$P_{\mathrm{EM}} = \frac{F}{dA} = \langle g \rangle \, v = \frac{I}{v}$$

Se il materiale è 100% riflettente, la variazione di quantità di moto sarà due volte quella iniziale, quindi $P = \frac{2I}{v}$; se il mezzo è assorbente, sarà il valore scritto sopra e se invece il mezzo non assorbe nulla (è trasparente alle onde elettromagnetiche) questa sarà nulla. In ogni caso, questa ha sempre un valore molto piccolo, causato dalla velocità al denominatore. Per fare una stima: se consideriamo una lampadina che eroga 150 W , a 3 metri di distanza (considerando un'onda sferica) l'intensità dell'onda sarà:

$$I = \frac{W}{S} = \frac{150 \text{ W}}{4\pi 3^2 \text{ m}^2} \sim 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Di conseguenza la pressione di radiazione generata dalla lampadina sarà $P = \frac{I}{c} \sim 10^{-8}$ Pa , quasi insignificante.

4 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

4.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Campo elettromagnetico e onde/Onde piane** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Campo_elettromagnetico_e_onde/Onde_piane?oldid=46184 *Contributori:* Dan

4.2 Immagini

- **File:Figura9-9ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/9/9a/Figura9-9ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

4.3 Licenza dell'opera