Utente: Dan/Elettromagnetismo/Correnti elettriche stazionarie/Corrente elettrica e densità di corrente

Tratteremo correnti stazionarie e continue, senza addentrarci nella teoria delle correnti alternate o, in generale, dei circuiti elettrici. Ai moti ordinati di carica, inoltre, sono associati, come vedremo, effetti dissipativi dovuti agli urti tra le particelle e i portatori di carica. Come abbiamo già annunciato nella precedente sezione, siamo interessati a studiare cosa accade anche nei 10^{-15} s in cui un conduttore raggiunge l'equilibrio.

1 Intensità di corrente elettrica

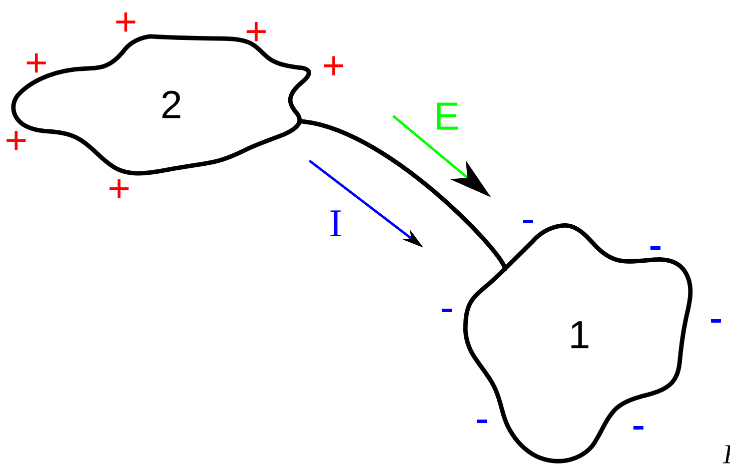

Fig. 5.1

Prendiamo allora due conduttori, in origine neutri, e portiamo una certa quantità di elettroni dal conduttore 2 al conduttore 1 (figura 5.1); in questo caso, avremo $V_2 > V_1$. Quando colleghiamo i due conduttori con un filo conduttore, in brevissimo tempo si raggiunge l'equilibrio e, quindi, sarà $V_2 = V_1$. Tuttavia, nell'istante in cui chiudiamo il "circuito", ai capi del filo è presente una differenza di potenziale $\Delta V = V_2 - V_1$ e, quindi, *si crea un campo elettrico nel filo*, diverso da punto a punto e diretto dal conduttore 2 al conduttore 1. Gli elettroni in eccesso sul conduttore 1 (quelli che avevamo portato all'inizio) risentono di una forza $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ *opposta* al campo elettrico e quindi **risaliranno il filo** fino ad avere l'equilibrio elettrostatico tra cariche. Mano a mano che gli elettroni si spostano verso il conduttore 2, annullano la differenza di potenziale (e quindi il campo elettrico) finché non sia $\mathbf{E}_{\text{int}} = 0$ su tutto il sistema.

Questo moto ordinato di cariche da un punto all'altro di un conduttore lo chiamiamo **corrente elettrica** e si definisce come:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

Questa grandezza è chiamata **intensità di corrente** e si misura in **ampere** A , ovvero un'unità di misura fondamentale nel Sistema Internazionale. Da questa, ricaviamo anche com'è definito il coulomb e tutte le unità derivate:

$$\text{A} = \frac{\text{C}}{\text{s}} \rightarrow 1\text{C} = 1\text{A} \cdot 1\text{s}$$

Tuttavia, *l'ampere non è definito come coulomb al secondo*: per poter definire operativamente l'ampere si sfruttano le forze magnetiche e, quindi, rinviamo a posteriori questo discorso.

La corrente elettrica è uno scalare, ma indica un fluire da un punto a un altro di cariche, quindi si accompagna con un segno. Questo segno è **del tutto arbitrario**. Per convenzione storica, si indica con il segno positivo il fluire delle cariche dal potenziale più alto al potenziale più basso, ovvero il segno positivo è indicato dal movimento delle cariche positive, anche se a muoversi sono le cariche negative e lo fanno nel verso opposto. Questo problema "storico" nasce dalla convenzione di Franklin, che risale addirittura al XVIII secolo: fu lui a chiamare i protoni "+" e gli elettroni "-". Da allora, ci portiamo dietro il problema che la corrente ha il segno dei protoni anche se a muoversi sono gli elettroni: se avessimo chiamato i protoni "-" e gli elettroni "+" adesso non avremmo un problema in più di cui discutere. E che non si dica che i fisici non ci tengono alle convenzioni.

2 Generatori di forza elettromotrice e generatore di Van de Graaf

Tutto il nostro discorso spiega cosa accade nel filo in 10^{-15} s , poi tutto va all'equilibrio e il fenomeno si ferma. La cosa non è proprio pratica per studiare al meglio le correnti, quindi necessitiamo di un qualcuno o qualcosa che riesca a **mantenere costante la differenza di potenziale**: in questo modo, ci sarà sempre un campo elettrico nel filo che farà fluire gli elettroni. Per far ciò, bisogna riportare gli elettroni dal conduttore 2 al conduttore 1, e questo processo non è gratis: c'è bisogno di compiere lavoro per poter fare ciò. Questo processo viene solitamente compiuto dai **generatori di forza elettromotrice**: questi sistemi trasformano energia e lavoro di natura non elettrostatica in energia elettrostatica, mantenendo costante la differenza di potenziale ai capi di un circuito. Un esempio di generatore di forza elettromotrice che trasforma *lavoro meccanico* in energia elettrostatica è il **generatore di Van de Graaf**, schematizzato in figura 5.2.

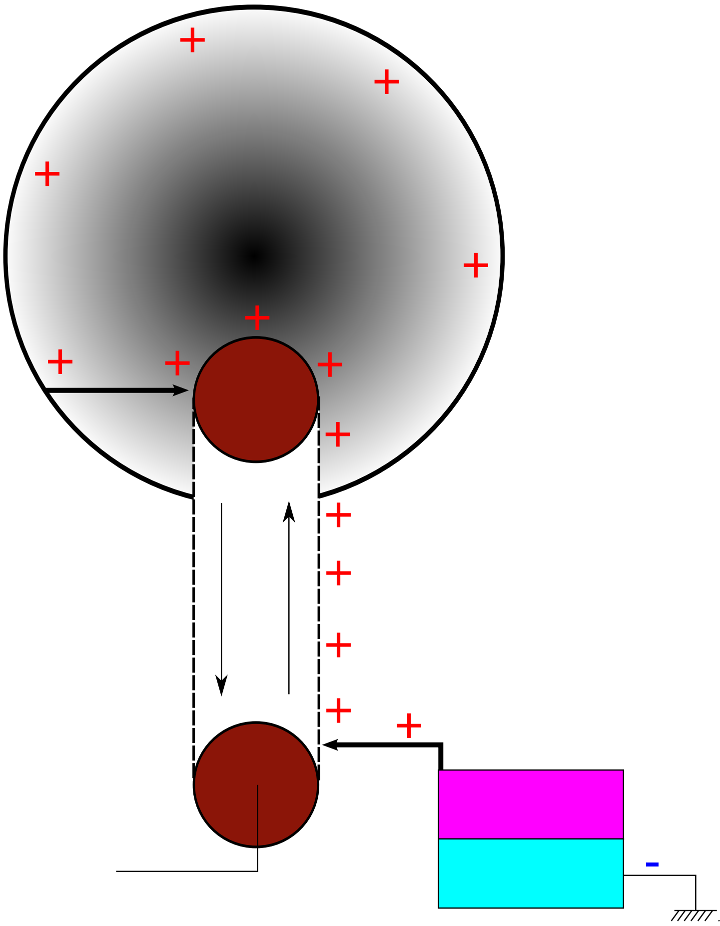

Fig. 5.2: schematizzazione del generatore di Van de Graaf.

Il funzionamento del generatore di Van de Graaf è molto semplice, e sfrutta appieno il potere delle punte. Preso un conduttore carico, o una batteria (come nello schema), questo ha una terminazione a punta, che ionizza l'aria. Un nastro di gomma (o un materiale isolante, di solito caucciù) si trova *in prossimità*, non a contatto, con questa punta: il risultato è che, a causa del forte campo elettrico locale generato dalla punta, sul nastro si posa un eccesso di carica. Il nastro è teso tra due pulegge, di cui una collegata a una manovella: girandola, si fa scorrere il nastro, che entra in una *sfera conduttrice*, anche questa con una terminazione a punta: le cariche che si posizionano sul nastro verranno trasportate fino alla punta della sfera, e da questa si distribuiranno uniformemente sulla superficie della sfera stessa. Procedendo col caricare la sfera, si creerà una differenza di potenziale tra la sfera e il conduttore a cui abbiamo "strappato" le cariche; se il conduttore è collegato a terra come in figura, la differenza di potenziale sarà tra la sfera e la Terra. Potremo continuare a carica la sfera fino a quando la differenza di potenziale, e il campo elettrico generato, *non supera il limite di rigidità dell'aria*: superato questo limite, di circa 10^6 V , l'aria diventa un conduttore e, tramite una scarica elettrica, tutte le cariche accumulate sulla sfera si scaricano a Terra annullando la differenza di potenziale.

In questo processo sono fondamentali alcuni particolari, riguardanti soprattutto i materiali e le geometrie in gioco. Prima di tutto, il nastro deve essere di un buon materiale isolante: gran parte dell'efficienza di questo generatore sta proprio nel materiale del nastro. Infatti, le cariche si accumulano su questo devono essere trasportate fin dentro la sfera, quindi la rigidità del materiale deve essere elevata. Poi, è importante che la sfera *sia una sfera*: infatti la forma geometrica con meno punte, cioè senza spigoli, è la sfera. Se avesse un qualsiasi tipo di terminazioni come spigoli, vertici o punte (per esempio un cubo) in questi punti si accumulerebbero le cariche secondo il principio del potere delle punte e, quindi, la scarica avverrebbe molto prima di aver raggiunto i 10^6 V . Inoltre, deve avere la maggior capacità possibile, così da massimizzare le cariche accumulabili.

Sebbene si possa creare un generatore di Van de Graaf funzionante anche a casa, è comunque sconsigliato l'utilizzo. Può essere molto pericoloso trovarsi sotto la sfera quando questa scarica: un milione di volt uccide. Non sarebbe neanche carino utilizzare dei criceti che girano sulle ruote per azionare la rotazione del nastro, in ogni caso.

3 Densità di corrente elettrica

Mantenere una ΔV costante corrisponde ad avere una corrente costante, dove con costante intendiamo globalmente in tutto il conduttore e non localmente. Per studiare il comportamento locale della corrente si introduce la grandezza **densità di corrente elettrica**, è un campo vettoriale, e si indica con

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$$

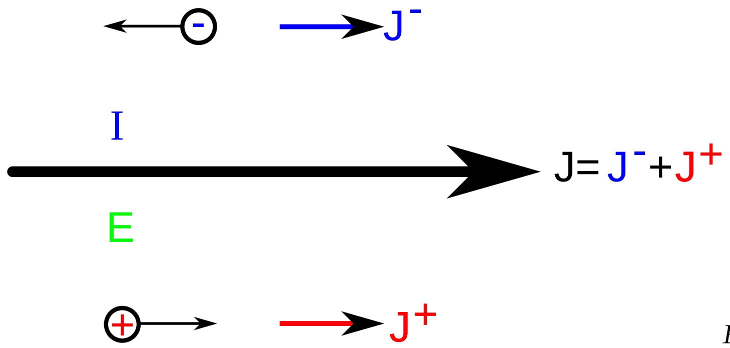

Fig. 5.3

Si misura in $\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ e definisce l'intensità di corrente che, in ogni punto del conduttore, passa attraverso una superficie unitaria ortogonale alla direzione di propagazione della corrente. Dipende quindi dal verso della corrente e dalla carica dei portatori: la direzione sarà quella della corrente e il verso dipenderà dai portatori di carica interessati. In figura 5.3 possiamo vedere come sia i portatori positivi che quelli negativi contribuiscano alla corrente elettrica.

Prendiamo un conduttore; le cariche elettriche hanno una propria velocità di deriva $\mathbf{v}_D$. Calcoliamo la carica che passa attraverso una superficie $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}}\, dS$ nel tempo dt ; avremo che la carica sarà $dq = nqd\tau$ dove n è la densità volumica di cariche nel conduttore; posto $d\mathbf{l} = \mathbf{v}_D dt$, il volumetto sarà $d\tau = d\mathbf{S} \cdot d\mathbf{l}$, avremo:

$$
\begin{aligned}
nq\,d\mathbf{S}\cdot d\mathbf{l} &= \underbrace{nq\mathbf{v}_D}_{\mathbf{J}}\cdot d\mathbf{S}\,dt = \\
&= \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}\,dt = J\,dS\cos\theta\,dt = dq \\
I &= \frac{dq}{dt} = \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} \\
dI &= \Phi_S(\mathbf{J}) \\
I &= \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}
$$

Quindi **la corrente elettrica è esprimibile come il flusso della densità di corrente attraverso una superficie** interna al volume del conduttore.

4 Equazione di continuità e teoremi di Kirchhoff

Qual è il vantaggio di usare $\mathbf{J}$ al posto di I ? Tutto sta nel principio di sovrapposizione che, legato al principio di conservazione della carica, ci permettono di poter esprimere proprio la conservazione della carica elettrica in termini matematici. Infatti, poiché abbiamo una corrente elettrica e quindi $\mathbf{J} \neq 0$, varierà anche la densità di carica nel tempo $\rho(\mathbf{r}, t)$ ma, in tutto l'universo, la carica deve sempre conservarsi.

L'unica ipotesi che abbiamo, quindi, è che la variazione di carica in uscita da un volumetto è uguale alla variazione di carica interna, in sintesi $dQ = -dQ_{\text{int}}$ (la carica che esce da una superficie va a discapito di quella che era contenuta al suo interno); vale sempre che $dQ = -\int_\tau \rho(t)d\tau$, collegando all'espressione della corrente:

$$
\begin{aligned}
&\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \frac{dQ}{dt} = -\frac{dQ_{\text{int}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_\tau \rho(t)d\tau \\
&\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = -\int_\tau \frac{\partial}{\partial t}\rho(t)d\tau \\
&\int_\tau (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J})\,d\tau = -\int_\tau \frac{\partial\rho(t)}{\partial t}d\tau \\
&\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = 0
\end{aligned}
$$

L'ultima espressione è detta **equazione di continuità** ed esprime matematicamente la conservazione della carica elettrica. Questa vale sempre, in qualsiasi tipo di regime. In particolare, nel nostro caso ci troviamo nel regime stazionario, in cui c'è dipendenza dal tempo ma le cose restano costanti, in sintesi $\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = 0$, quindi $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0$; quindi, in regime stazionario, **J è solenoidale**, ovvero:

$$\Phi_S(\mathbf{J}) = 0$$

Attraverso ogni superficie chiusa; questo è meglio noto come **primo teorema di Kirchhoff**: altrove si trova espresso come $\sum_i I_i = 0$ per tutte le correnti entranti o uscenti da un nodo, ma le due espressioni sono equivalenti (si considerino infatti i fili come dotati di una propria sezione: calcolare la somma delle correnti entranti o uscenti da un nodo equivale a calcolare il flusso di $\mathbf{J}$ attraverso la superficie che circonda il nodo).

Il **secondo teorema di Kirchhoff** deriva dalla conservatività del campo elettrico, $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$: in regime stazionario i campi *sono elettrostatici* e quindi è vera la conservatività. Da questa, come sappiamo, deriva che $\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, o anche scrivibile come $\sum_i V_i = 0$ percorrendo un circuito chiuso o, meglio, *una maglia*.

I due teoremi di Kirchhoff valgono anche per correnti alternate, dove siamo in regime quasi stazionario, l'importante è che la corrente sia *costante* in una determinata porzione di circuito (dove vogliamo applicare le due leggi). Le correnti alternate hanno un andamento sinusoidale definito da una frequenza di oscillazione e, finché questa resta bassa, la corrente si propaga in tutto il circuito a velocità paragonabili a quelle della luce, quindi è costante in tutti i tratti. Quando però le frequenze si alzano (o si alzano le distanze da percorrere), c'è il rischio di arrivare vicini alla frequenza di propagazione dell'informazione (circa 9 GHz), e quindi si potrà avere valori diversi della corrente in diversi tratti: iun questi casi, le leggi di Kirchhoff non si potranno applicare; questo pone un limite alla frequenza con cui è possibile costruire un circuito: infatti i moderni processori per computer non superano i 4 GHz di frequenza proprio per evitare effetti simili.

5 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

5.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Correnti elettriche stazionarie/Corrente elettrica e densità di corrente** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Correnti_elettriche_stazionarie/Corrente_elettrica_e_densit%C3%A0_di_corrente?oldid=46165 *Contributori:* Dan

5.2 Immagini

- **File:Figura5-1ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/2/2a/Figura5-1ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura5-2ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/3/3f/Figura5-2ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura5-3ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/9/9e/Figura5-3ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

5.3 Licenza dell'opera