Utente:Dan/Elettromagnetismo/Introduzione al corso e elementi di analisi vettoriale/La delta di Dirac

Partiamo dalla funzione vettoriale:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Il vettore è scritto in coordinate sferiche; questo è un campo *radiale* che decresce come $\frac{1}{r^2}$; da come abbiamo parlato della divergenza, un campo simile *deve* avere divergenza positiva. Tuttavia, se andiamo a calcolarla ne otteniamo un risultato non proprio aspettato (la divergenza è calcolata in coordinate sferiche):

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(1) = 0$$

Insomma, che fosse nulla non era così scontato. Il problema sorge quando applichiamo il teorema di Gauss; consideriamo una sfera centrata nell'origine di raggio R , il flusso del vettore attraverso questa sarà:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{sfera}}(\mathbf{v}) &= \int_{\text{sfera}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = \int \left(\frac{1}{R^2}\hat{\mathbf{r}}\right) \cdot (R^2 \sin\theta\, d\theta d\phi\, \hat{\mathbf{r}}) = \\ &= \left(\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right) = 4\pi\end{aligned}$$

Tuttavia, applicando il teorema di Gauss, l'integrale sul volume della divergenza $\int_\tau \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} d\tau = 0$ è nullo in quanto è nulla la divergenza. Sbam, cervello spappolato sul muro.

In realtà, il teorema della divergenza è sempre valido. Il calcolo del valore della divergenza anche lo è. Ma, nel calcolare la divergenza, *abbiamo supposto di non trovarci nell'origine*, perché non ha senso dividere per lo 0 . Questo vuol dire che proprio nell'origine accadono cose strane, e ciò che accade permette al flusso di assumere valore 4π ; il campo vettoriale $\mathbf{v}$ con il quale ci stiamo muovendo, allora, presenta divergenza nulla in tutto lo spazio, tranne che nell'origine, dove esplode a un valore tale che il flusso dia risultato 4π . Ci troviamo a che fare con una funzione nota come **delta di Dirac**, che si presenta in molte teorie fisiche e, anche, nell'elettromagnetismo, in quanto i campi vettoriali che andremo a studiare, il campo elettrico in particolare, *diverge* proprio come $\frac{1}{r^2}$ in direzione radiale.

La **delta di Dirac** è definita come:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

In realtà, non è propriamente una funzione, in quanto il valore che assume nell'origine non è finito; si parla quindi di *distribuzione*. La particolarità di questa funzione è che l'integrale su tutto lo spazio è unitario:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

Caratteristica delle distribuzioni di probabilità, in cui rientra anche questa funzione. Inoltre, potremmo anche dire che, essendo la probabilità una misura, la delta di Dirac è anch'essa una misura, se vogliamo essere pignoli.

Andiamo adesso a studiare il comportamento della delta di Dirac. Presa una qualsiasi funzione $f(x)$ arbitraria, per comodità che sia *continua*, il prodotto tra la funzione e la delta di Dirac è nullo ovunque eccetto che nell'origine; se ciò è vero, possiamo scrivere senza ambiguità:

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$$

Considerato questo, segue immediatamente, dalla definizione della delta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = f(0)$$

Osserviamo che l'integrale non deve necessariamente coprire tutto lo spazio, anche se fosse limitato a un intervallo piccolo a piacere $(-\varepsilon;\varepsilon)$, l'integrale avrebbe avuto lo stesso risultato.

Così come è definita, la funzione può essere "shiftata" a un valore a come:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq a \\ \infty & \text{se } x = a \end{cases}$$

E valgono le considerazioni già fatte nel punto origine, quindi $f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$, e l'integrale del prodotto $f(x)\delta(x-a)$ risulta essere $f(a)$. Sebbene la delta di Dirac non è una funzione nel senso stretto del termine, gli integrali in cui compare *sono vere e proprie funzioni* che riportano valori finiti; vedere la delta di Dirac come qualcosa da utilizzare sotto il segno di integrale è un buon modo per capire al meglio come questa funziona.

Questo è il caso della delta in una sola dimensione; allo stesso modo possiamo parlare della **delta di Dirac in tre dimensioni**, ovvero:

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

Questa funzione ha valore nullo ovunque tranne che nell'origine dove esplode all'infinito. L'integrale su tutto lo spazio, come ci aspetta, è unitario:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\delta(y)\delta(z)\,dxdydz = 1$$

Parlando allora di campi scalari $f(\mathbf{r})$, se consideriamo la delta di Dirac tridimensionale trasposta al punto $\mathbf{a} = (x_a, y_a, z_a)$ sempre scrivibile come $\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{a})$ vale ancora ciò che abbiamo detto nel caso unidimensionale:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{r})\,\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{a})d\tau = f(\mathbf{a})$$

Possiamo adesso riprendere l'esempio iniziale; la divergenza di $\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ risulta, come abbiamo discusso, zero ovunque tranne che nell'origine, e l'integrale su ogni volume che contiene l'origine (abbiamo preso come caso particolare la sfera per comodità di calcolo, ma è generalizzabile a qualsiasi volume nello spazio) è costante pari a 4π . Allora possiamo comodamente sfruttare la delta di Dirac e quindi esprimere in funzione di questa la divergenza di $\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r})$$

Generalizzata a qualsiasi punto nello spazio, possiamo scriverla come:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

In seguito vedremo le applicazioni della delta di Dirac nel caso dell'elettromagnetismo.

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Introduzione al corso e elementi di analisi vettoriale/La delta di Dirac** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Introduzione_al_corso_e_elementi_di_analisi_vettoriale/La_delta_di_Dirac?oldid=46146 *Contributori:* Dan

1.2 Immagini

1.3 Licenza dell'opera