Meccanica del punto materiale

28 giugno 2022

Indice

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Cos'è la meccanica newtoniana

La meccanica newtoniana, o meccanica classica, descrive le interazioni che avvengono tra corpi a livello macroscopico, osservabili direttamente nella vita quotidiana. Tra le grandezze studiate dalla meccanica classica ci sono velocità, accelerazione, energia meccanica, lavoro.

Tutto quello che sappiamo sul moto dei corpi lo dobbiamo a Galileo Galilei (1564-1642) e a Isaac Newton (1642-1727). Galileo fu il primo a mettere in discussione le teorie di Aristotele, ritenute da secoli verità inconfutabili. Newton riprese gli studi di Galileo ed enunciò le tre leggi fondamentali della dinamica, che descrivono l'interazione fra corpi, oltre a trovare un'espressione per la forza gravitazionale.

La meccanica classica però non è applicabile in tutte le situazioni. Se le velocità dei corpi che interagiscono sono molto alte, cioè prossime alla velocità della luce, dobbiamo sostituire la meccanica newtoniana con la teoria della relatività speciale di Einstein. Ancora, se le interazioni avvengono a livello subatomico, dobbiamo prendere in considerazione la meccanica quantistica. La meccanica newtoniana è un caso particolare di queste due grandi teorie della fisica moderna. Ed è tuttavia un caso molto importante, in quanto ci permette di studiare sia fenomeni che riguardano oggetti della vita quotidiana (come il moto di un pallone da calcio, una macchina in frenata, una ruota che gira...) sia fenomeni astronomici (come il moto dei pianeti intorno al Sole, o il comportamento delle galassie).

Gli argomenti del corso saranno: meccanica del punto materiale, meccanica dei sistemi di punti, meccanica del corpo rigido, meccanica dei fluidi.

Capitolo 2

Cinematica del punto materiale

2.1 Cinematica del Punto

La *cinematica* è quella parte della meccanica che si occupa di descrivere il moto di un corpo, senza analizzarne le cause.

A prima vista studiare il moto di un corpo che si muove nello spazio può sembrare complicato. Basti pensare a un aereo, costituito dalle ali, dalla fusoliera, o a una persona che corre, con tutti quei muscoli e articolazioni, movimenti della braccia ecc. Però, a pensarci bene, un aereo percorre di norma moltissimi chilometri. E alzando lo sguardo al cielo lo vediamo come un puntino lontano. Lo stesso vale per il corridore, da lontano non ci preoccupiamo dei movimenti delle braccia, ma siamo interessati a misurare quanto tempo percorre 100 metri, per esempio. Queste considerazioni ci portano a dire che se lo spazio percorso da un corpo è molto maggiore delle sue dimensioni, possiamo trattare quest'ultimo come se fosse un punto.

Un *punto materiale* è un oggetto privo di dimensioni che permette di semplificare l'osservazione del moto, in quanto vengono così eliminate le complicazioni derivanti dall'estensione stessa del corpo.

Bisogna però ricordare che questa assunzione funziona solo per il moto di traslazione. Come vedremo nel capitolo sul corpo rigido, se vogliamo studiare il moto di una ruota che gira non possiamo certo considerarla un punto.

La cinematica è usata dai produttori di automobili, quando devono determinare le performance delle loro macchine prima e durante una corsa. I geologi usano questa fisica per misurare il moto delle placche tettoniche e predirre i terremoti. O ancora, i ricercatori medici usano la cinematica per mappare il flusso di sangue attraverso l'arteria di un paziente, allo scopo di determinare l'eventuale ostruzione dell'arteria. Ci sono innumerevoli altri esempi. Noi inizieremo con il moto rettilineo, per poi studiare il moto di un corpo in due dimensioni.

2.2 Moto rettilineo

Definizione (traiettoria)

luogo geometrico dei punti occupati dal punto materiale in movimento.

Il moto rettilineo si svolge su una traiettoria rettilinea. Il punto si muove dunque lungo una retta, su cui vengono arbitrariamente fissati origine e verso, e il moto di questo è descrivibile tramite la sola coordinata $x = x(t)$ (moto a una dimensione).

attraverso lo studio delle *variazioni* della posizione del punto nel tempo è possibile definire la velocità del punto; mentre una variazione di velocità nel tempo fa acquisire al punto un'accelerazione.

2.2.1 Velocità

Definizione (velocità media)

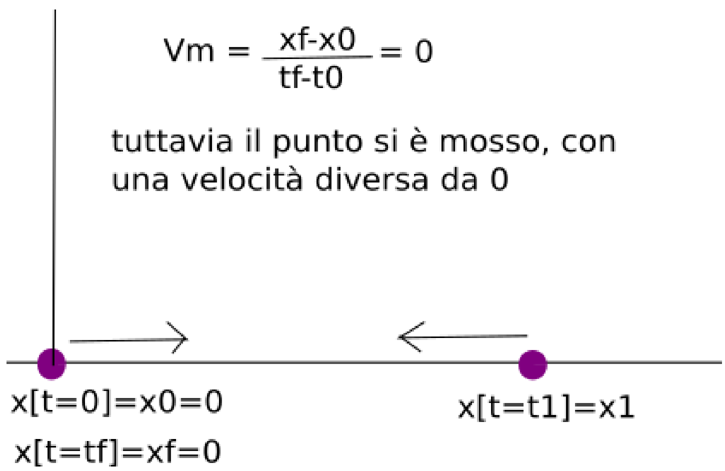
Si definisce *velocità media* il rapporto tra lo spostamento e l'intervallo di tempo in cui esso si verifica:

$$v_m(t_1, t_2) = \frac{\Delta x_{12}}{\Delta t_{12}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \ .$$

Questo dato è però insufficiente a descrivere il moto di un punto:

Esempio

Un punto che parte dalla posizione x_0 con velocità v e nella posizione x_1 inverte il verso del moto per poi fermarsi in x_0 , ha $\langle v \rangle = 0$ poiché posizione iniziale e finale coincidono.



Per definire le caratteristiche effettive del moto è quindi necessario ridurre l'intervallo di tempo considerato, facendolo tendere a zero. Si calcola cioè la *derivata dello spazio in funzione del tempo*

Definizione (velocità istantanea)

Si definisce *velocità istantanea* il seguente limite:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_m(t, t+\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \ .$$

Nota la velocità istantanea, si può ricavare la funzione $x(t)$ (**legge oraria** o **equazione del moto**) attraverso l'operazione inversa della derivazione, *l'integrazione.*

Se la velocità non è costante ma varia nel tempo, il punto possiede un'accelerazione.

2.2.2 Accelerazione

Definizione (accelerazione media)

Si definisce come accelerazione media il rapporto tra la variazione di velocità in un intervallo di tempo e l'intervallo di tempo stesso:

$$a_m(v_1, v_2) = \frac{\Delta v_{12}}{\Delta t_{12}} \ .$$

anche in questo caso l'accelerazione media non è sufficiente a descrivere accuratamente il moto, pertanto è opportuno calcolare tale variazione in un intervallo di tempo tendente a zero.

Definizione (accelerazione istantanea)

Si definisce come accelerazione istantanea la quantità:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \ .$$

2.2.3 Velocità e accelerazione a "confronto"

	v	**a**
0	quiete	moto uniforme
costante	moto uniforme	moto uniformemente accelerato
+	il punto si muove nello stesso verso dell'asse	la velocità cresce
-	il punto si muove nel verso opposto dell'asse	la velocità decresce

Posso correlare tra loro spostamento, velocità iniziale, velocità finale e accelerazione tramite il seguente procedimento:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad a = \frac{dv}{dx} v \quad a \cdot dx = dv \cdot v$$
$$\int_{x_0}^{x} a dx = \int_{v_0}^{v} v dv \quad \int_{x_0}^{x} a dx = [\frac{v^2}{2}]_{v_0}^{v}$$
$$\int_{x_0}^{x} a dx = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \quad 2 \int_{x_0}^{x} a dx = v^2 - v_0^2$$

Se a è costante (moto rettilineo uniformemente accelerato) si ha $a_0 = a(x)$, quindi:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

2.2.4 Tipi di moto

Moto rettilineo uniforme

Con $v_0 = \langle v \rangle = v(t)$, cioè con velocità costante.

In questo caso la **Legge oraria** è:

$$v = v_0 \; ; \quad \frac{dX}{dt} = v_0 \; ; \quad dx = v_0 \cdot dt \; ;$$
$$\int_{x_0}^{x_t} dx = \int_{0}^{t} v_0 dt \; ; \quad \int_{x_0}^{x_t} dX = v_0 \int_{0}^{t} dt \; ;$$
$$[x]_{x_0}^{x(t)} = v_0 [t]_0^t \; ; \quad x(t) - x_0 = v_0 (t - 0) \; ;$$
$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 \cdot t$$

Moto uniformente accelerato

Se l'accelerazione è costante ($\langle a \rangle = a(t)$), il moto è detto **uniformemente accelerato**.

l'equazione di tale moto è ricavabile attraverso una doppia integrazione dell'accelerazione istantanea: **Legge oraria**

$$a_0 = a \quad a_0 = \frac{dv}{dt} \quad dv = a_0 \cdot dt$$
$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{0}^{t} a_0 dt \quad \int_{v_0}^{v(t)} dv = a_0 \int_{0}^{t} dt$$
$$[v]_{v_0}^{v(t)} = a_0 \, [t]_0^t \quad v(t) - v_0 = a_0 \cdot (t - 0)$$
$$v(t) = v_0 + a_0 \cdot t$$
$$v(t) = \frac{dx}{dt} \quad v_0 + a_0 \cdot t = \frac{dx}{dt} \quad dx = (v_0 + a_0 \cdot t) \, dt$$
$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{0}^{t} (v_0 + a_0 \cdot t) \, dt \quad \int_{x_0}^{x(t)} dx = v_0 \int_{0}^{t} dt + a_0 \int_{0}^{t} t \cdot dt$$

$$[x]_{x_0}^{x(t)} = v_0 [t]^{t_0} + a_0 \left[\frac{t^2}{2}\right]^{t_0}$$

$$x(t) - x_0 = v_0 \cdot t + a_0 \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + a_0 \frac{t^2}{2}$$

Moto di un grave in 1 dimensione

$$|\vec{a}| = 9,8 \frac{m}{s^2} = g$$

Lascio cadere un corpo dall'altezza h (trascuro la resistenza dell'aria):

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Si considerino $y_0 = h$ in cui h è l'altezza da cui si lascia cadere il corpo, $v_0 = 0$ e $a = g$. Si ottiene in tal modo:

$$y = h - \frac{g}{2} t^2$$

Per ricavare il tempo d'impatto t_i pongo $y = 0$:

$$y = 0 \quad h - \frac{g}{2} t^2 = 0 \quad t^2 = \frac{2h}{g}$$

$$t_i = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Per ricavare la velocità d'impatto v_i pongo $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ nell'equazione $v = v_0 + a_0 t$. Considero inoltre $v_0 = 0$ e $a = g$:

$$v = -gt = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2hg}\ .$$

Moto in 1 dimensione con attrito viscoso

Nel moto in 1-D con attrito viscoso agisce una forza $k > 0$ che frena il moto, causando una diminuzione dell'accelerazione a che quindi è direttamente proporzionale alla costante -k: più è grande k, più sarà frenato il moto.

$$a = -kv \quad k > 0$$

Sapendo anche che $a = \frac{dv}{dt}$, si può dedurre la seguente equazione:

$$\frac{dv}{dt} = -kv \quad \frac{dv}{v} = -kdt$$

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{1}{v} dv = -k \int_0^t dt \quad [lnv]_{v_0}^{v(t)} = -k[t]_0^t$$

$$\ln v(t) - \ln v_0 = -k(t-0) \quad \ln \frac{v(t)}{v_0} = -kt$$

$$e^{\ln \frac{v(t)}{v_0}} = e^{-kt} \quad \frac{v(t)}{v_0} = e^{-kt}$$

$$v(t) = e^{-kt} \cdot v_0$$

Diagramma orario della funzione $v(t)$: $e^{-kt} = \frac{1}{e^{kt}}$, quindi $\lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{kt}} = 0$. Posso dedurre da ciò che il grafico della funzione $v(t)$ è una curva esponenziale, con $v(t)$ che tende a 0 al tendere di t all'infinito.

La velocità a un tempo $t = \tau = \frac{1}{k}$ è:

$$v(\tau) = \frac{1}{e^{\frac{1}{k}k}} \cdot v_0 \simeq \frac{1}{2,7} v_0$$

Quindi $v(\tau)$ è pari a circa $\frac{1}{3}$ della velocità iniziale v_0

Legge oraria:Sapendo che $v(t) = \frac{dx}{dt}$, si ricava che:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \quad dx = v_0 e^{-kt} dt$$

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_0^t v_0 \cdot \frac{1}{e^{kt}} dt$$

$$x(t) = v_0 \cdot (1 - e^{-kt})$$

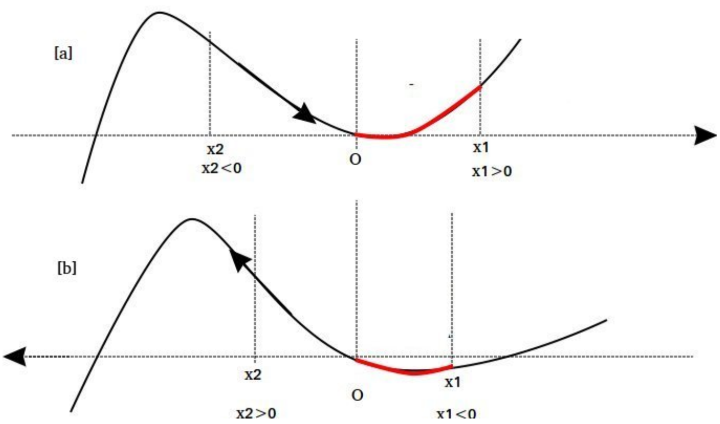
2.3 Moto circolare

2.3.1 Moto generico in due dimensioni

Considerata una traiettoria curvilinea su cui viene fissata arbitrariamente un'origine O e il verso di percorrenza:

Definizione (Ascissa curvilinea (l))

Si definisce *ascissa curvilinea* la lunghezza del tratto di curva che congiunge x_1 ad O . Se x_1 si trova verso x positive secondo il verso di percorrenza stabilito l'ascissa curvilinea x_1O o Ox_1 è positiva, se x_1 si trova verso x negative l'ascissa curvilinea è negativa. La velocità del punto definisce la concordanza tra il verso fissato e il verso di percorrenza della curva: velocità positive sono quelle che fanno muovere il punto secondo il verso fissato, negative quelle che lo fanno muovere nel verso opposto



La **velocità media**

$$V_m(t_1, t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

è rappresentata dal vettore che ha stessa direzione del segmento x_1x_2 e verso coincidente con quello del moto. Si può quindi notare come, ancor meno che nel moto a una dimensione, la velocità media dia informazioni poco dettagliate riguardo al moto del punto.

Applicando l'operazione di limite si ottiene la **velocità istantanea**

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} V_m(t, t + \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{dX}{dt}$$

il cui vettore è tangente alla traiettoria nella posizione x_1 in cui si trova il punto nell'istante t considerando.

Derivando una seconda volta si ottiene l'accelerazione istantanea

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

il cui vettore è parallelo al raggio di curvatura in x_1 , dunque perpendicolare al vettore $v(t)$.

2.3.2 Scomposizione generica del moto in 3 dimensioni

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ sono versori, e sono quindi costanti in tutto lo spazio. $\vec{x}(t)$ è il versore posizione. Scomponendolo sui tre assi x, y e z si ottiene:

$$\vec{x}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j} + z(t) \cdot \hat{k}$$

Ricavo, a partire dalla scomposizione di $\vec{x}(t)$, la scomposizione sui tre assi del vettore velocità $\vec{v}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

Sapendo inoltre che

$$\vec{v}(t) = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k}$$

Deduco la seguente uguaglianza

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \qquad v_y = \frac{dy}{dt}; \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

Si può inoltre ricavare la scomposizione sui tre assi del vettore accelerazione $\vec{a}(t)$:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

Analogamente a quanto mostrato nel paragrafo sovrastante riguardante la velocità, dimostro che dato che

$$\vec{a}(t) = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

allora si deduce che

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt}; \qquad a_y = \frac{dv_y}{dy} = \frac{d^2y}{dt}; \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt}.$$

2.3.3 Moto circolare

Definizione (Moto circolare)

Si definisce *moto circolare* il caso particolare di moto curvilineo che abbia traiettoria circolare di centro O e raggio R

Definizione (Coordinata curvilinea)

Si definisce *coordinata curvilinea* (e si indica con s) la lunghezza orientata dell'arco

- **Legge oraria**:

$$\theta = \theta(t)$$

Se il moto è circolare uniforme, la velocità angolare è costante: $\omega = \omega_0$, quindi si ha che:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0; \quad d\theta = \omega_0 dt;$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta(t)} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt;$$

$$[\theta]_{\theta_0}^{\theta(t)} = \omega_0[t]_{t_0}^{t}; \quad \theta(t) - \theta_0 = \omega_0 t - \omega_0 t_0;$$

Dato che $t_0 = 0s, \quad \omega_0 t_0 = 0$, perciò:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$$

ponendo $\theta_0 = 0_{\text{rad}}$,

$$\theta = \omega t$$

- **Scomposizione del moto:**Applicando quanto appreso nel caso generale del moto curvilineo in due dimensioni sulle componenti dei vettori **v(t)** e **a(t)** a quello specifico del moto circolare, ottengo:

$$\begin{cases} x(t) = r\cos\theta = r\cos(\omega t) \\ y(t) = r\sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = -\omega r\sin(\omega t) \\ V_y(t) = \omega r\cos(\omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x(t) = \dfrac{dV_x}{dt} = -\omega^2 r\cos(\omega t) \\ a_y(t) = \dfrac{dV_y}{dt} = -\omega^2 r\sin(\omega t) \end{cases}$$

dove a è detta *accelerazione centripeta*

Definizione (Accelerazione centripeta)

accelerazione che causa il curvamento della traiettoria, senza modificare il modulo della velocità angolare ω

→ Per questo si parla di moto *uniforme* nonostante sia presente un'accelerazione!

- **legame tra v,ω,a**

$$\theta = \frac{S}{R}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{R}$$

Dato che $V = \frac{dS}{dt}$ si può dedurre che

$$\omega = \frac{1}{R} \cdot \frac{dS}{dt}$$

.

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(\omega^2 R\cos(\omega t))^2 + (\omega^2 R\sin(\omega t))^2} = \omega^2 R\sqrt{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)}$$

Dato che $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ si deduce che $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$ e dunque

$$|\bar{a}| = \omega^2 R \cdot 1 = \omega^2 R$$

Tenendo inoltre conto del fatto che $\omega = \frac{V}{R}$, si può ricavare l'accelerazione in funzione della velocità istantanea

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

2.4 Moto armonico

Proiettando il moto circolare uniforme sugli assi cartesiani, è evidente come questo risulti essere la composizione di due moti armonici semplici. La legge oraria di questo particolare *moto vario* è: *[1]

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

dove:

A = ampiezza

ω = pulsazione

$\omega t + \phi$ = fase del moto

ϕ = fase iniziale

Essendo il moto descritto dalla funzione coseno o seno, ha delle caratteristiche spaziali ben precise:

1. Il coseno è una funzione limitata superiormente e inferiormente, dunque assume dei valori estremi (± 1). Un punto che si muove di moto armonico quindi **oscilla tra due posizioni limite** corrispondenti a ±A
2. La funzione coseno inoltre è periodica, pertanto anche il moto armonico **è un moto periodico**, e cioè:

Definizione (moto periodico)

il moto di un punto si dice periodico quando ad intervalli di tempo regolari il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità.

Per calcolare il periodo di un moto armonico, ovvero il tempo dopo cui il moto si ripete, basta ricordare che il periodo di $\sin x$ è 2π e sfruttare la definizione:

si considerino due istanti, t e $t' = t + T$, con T periodo del moto. Per definizione di moto periodico la posizione del punto in t è uguale alla posizione t' , per cui $x(t) = x(t')$. Essendo il periodo di $\cos\theta$ 2π , deve valere $\omega t + \phi = \omega t' + \phi + 2\pi$, quindi $\omega(t - t') = 2\pi$

Ecco quindi il **periodo**

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

L'inverso del periodo si definisce **frequenza**

$$\upsilon = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

La frequenza si misura come $[\upsilon] = [T^{-1}]$ ovvero $\frac{1}{s} = 1Hz = \frac{1ciclo}{s}$

Periodo e frequenza sono indipendenti dall'ampiezza e dalla fase iniziale, dipendono invece dalla pulsazione ω . In particolare possiamo fare le seguenti considerazioni : più la pulsazione è grande, più il moto è lento (T grande e ν piccolo), più la pulsazione è piccola, più il moto è veloce (T piccolo e ν grande)

Velocità e Accelerazione si ricavano per derivazione dalla legge oraria:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

Da qui si ricava che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con segno negativo:

$$a = -\omega^2 x$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{equazione del moto armonico}$$

Questa, definita **equazione del moto armonico**, è la *condizione necessaria e sufficiente affinché un moto sia armonico*. Soffermiamoci sul significato di questa affermazione. Se nello studio di un moto si trova un'accelerazione proporzionale allo spostamento con segno negativo e costante di proporzionalità C , si può immediatamente dedurre che la legge oraria del moto sarà quella di un moto armonico $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, con pulsazione $\omega = \sqrt{C}$. Un ottimo esempio è costituito dal moto di un corpo sottoposto ad una forza elastica. Viceversa se si conosce l'equazione di un moto ed essa rappresenta un moto armonico si può dire che l'accelerazione a cui il corpo è sottoposto è della forma $a = -\omega^2 x$.

Sovrapponendo i grafici di posizione,velocità e accelerazione, è possibile notare come questi differiscano tra loro solo per una differenza di fase:

- Posizione e velocità sono in quadratura di fase (cioè sfasate di T/4 quindi di $\pi/2$)
- Posizione e accelerazione in opposizione di fase (cioè sfasate di T/2 e quindi di π)

A e ϕ sono costanti, e una volta note permettono di calcolare le condizioni iniziali (t=0):

$$\begin{cases} x_0 = A\sin\Phi \\ v_0 = \omega A\sin\Phi \end{cases}$$

Viceversa tali costanti possono essere ricavate conoscendo le condizioni iniziali x_0 e v_0

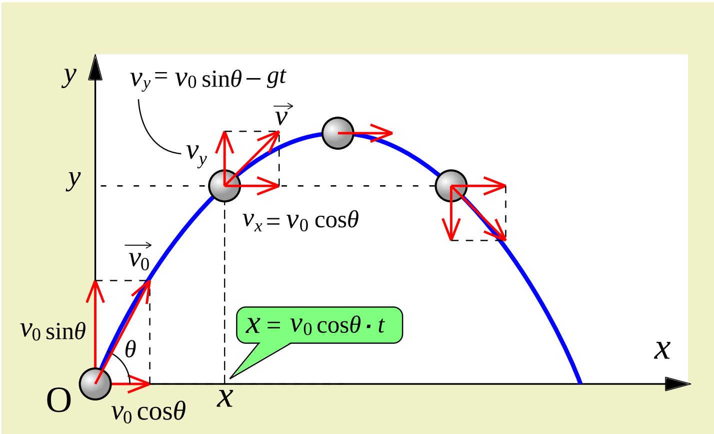
[1] è analogo esprimere il moto tramite un $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ o $x(t) = A\cos(\omega t + \phi')$. Infatti usando gli archi associati $\sin(\phi) = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi)$ e basta porre $\phi' = \frac{\pi}{2} - \phi$ per avere perfetta equivalenza. Le due funzioni differiscono solo per la fase iniziale.

2.5 Moto parabolico dei corpi

Il moto parabolico è un moto bidimensionale combinazione di due moti rettilinei simultanei ed indipendenti (non si influenzano), uno rettilineo uniforme ed uno uniformemente accelerato.

Moto di un proiettile lanciato con velocità V_0 *e angolo* θ *all'origine.*

In questo caso il proiettile subisce accelerazione costante lungo l'asse y per effetto della forza di gravità, mentre sull'asse x il moto è uniforme in quanto non agiscono forze e non vi è accelerazione. Vediamo dunque che si tratta di un esempio di moto parabolico.



Condizioni iniziali

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{0x} = V_0 \cos\theta \\ V_{0y} = V_0 \sin\theta \end{cases}$$

Scomposizione del moto

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + V_{0x}t \\ y(t) = V_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\theta \cdot t \qquad [1] \\ y(t) = V_0 sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad [2] \end{cases}$$

Traiettoria

Ricavo t dalla [1] e lo sostituisco nella [2] per avere $y(x)$:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\theta};$$

$$y(x) = V_0 \sin\theta \frac{x}{V_0 \cos\theta} - \frac{g}{2} \cdot \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta};$$

$$y(x) = \tan\theta x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta}$$

Gittata

Pongo $y(x) = 0$ per ricavare lo spazio totale percorso orizzontalmente (e, dunque, la gittata):

$$\tan\theta x - \frac{g}{2} \frac{x^2}{V_0^2 \cos^2\theta} = 0;$$

$$\frac{V_0 \sin\theta x}{V_0 \cos\theta} - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2\theta} = 0$$

$$\frac{2 \sin\theta \cos\theta V_0^2 x - gx^2}{2V_0^2 \cos^2\theta}$$

Dato che $2 \sin\theta \cos\theta = \sin 2\theta$:

$$x(V_0^2 \sin 2\theta - gx) = 0;$$

per la legge di annullamento del prodotto, ricavo:

$$x = 0$$

che è la posizione del punto di lancio, e

$$x = \frac{\sin 2\theta \cdot V_0^2}{g}$$

che rappresenta la gittata.

Quota massima

Per ricavare la massima quota y_{max} sostituisco t_{imp} nella [2]:

$$y_{max} = \frac{V_{0y}^2}{2g} = \frac{V_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

Capitolo 3

Dinamica del punto materiale

3.1 Primo e secondo principio della dinamica

Se la cinematica ha il compito di descrivere il moto, senza preoccuparsi delle cause che lo determinano, la dinamica si occupa invece di quest'ultimo problema. Vogliamo rispondere cioè a domande del genere: perché avviene il moto? Perché un corpo ha un certo moto piuttosto che un altro?

Il primo scienziato moderno a occuparsi di queste questioni fu Galileo, che fece i suoi esperimenti con un piano inclinato. Una biglia lanciata in salita diminuiva progressivamente la sua velocità, mentre per una in discesa la velocità aumentava. E tali accelerazioni o decelerazioni erano tanto maggiori o minori a seconda dell'inclinazione del piano. Allora formulò la seguente ipotesi: in assenza di inclinazione la velocità della biglia rimane costante, cioè essa si muove indefinitamente di moto rettilineo uniforme. Questo è ovviamente un esperimento mentale, perché servirebbe infatti un piano infinito per verificare che la biglia prosegue il suo moto rettilineo uniforme all'infinito. Usando però un piano liscio e abbastanza lungo, la condizione descritta può essere riprodotta con buona approssimazione, per un breve periodo di tempo. Galileo capì proprio questo: se potessimo togliere l'attrito della biglia con l'aria e con il piano, il corpo non si fermerebbe mai. Se un corpo si ferma è perché agisce una forza esterna. Questo concetto costituisce il primo principio della dinamica, detto *principio di inerzia* o *prima legge di Newton*. Esso afferma quanto segue:

Un corpo non soggetto a forze mantiene indefinitamente il suo stato di moto rettilineo uniforme.

E' importante osservare che lo stato di quiete (un corpo fermo) è un caso particolare di moto rettilineo uniforme con velocità nulla.

Ora, cos'è esattamente una forza? Una forza può essere una spinta, una trazione, ma non solo. Vedremo più avanti altri esempi. Diciamo però subito che una forza è una grandezza vettoriale, cioè ha un modulo, una direzione e un verso. D'altra parte questo sembra molto naturale. Possiamo infatti lanciare una pallina verticalmente verso l'alto o orizzontalmente in avanti. Il moto risultante dipende quindi dalla direzione della forza impressa alla pallina.

Torniamo ora al primo principio. Esso è in qualche modo contro-intuitivo, descrive una condizione ideale, quella di un corpo non soggetto a forze. Questo, come è noto dall'esperienza di tutti i giorni, non accade mai. In questo stesso momento siamo sottoposti alla forza di gravità, per esempio. Se siamo in macchina e affrontiamo una curva ci sentiremo tirare verso l'esterno della stessa. Il mondo è in definitiva dominato da forze esterne, dagli attriti ecc. Come possiamo dunque conciliare un qualcosa di ideale con qualcosa di reale e tangibile? Il problema si risolve considerando l'effetto complessivo delle forze. Possiamo allora formulare il primo principio delle dinamica nel modo seguente:

Se la risultante delle forze agenti su un corpo è nulla, il corpo si muove di moto rettilineo uniforme.

Al fine di dare una definizione operativa di forza, supponiamo di svolgere il seguente esperimento. Attacchiamo un oggetto a una molla e tiriamo allungando la molla. Il corpo, inizialmente fermo, si muove. Misuriamo quindi un'accelerazione a_0 . Attacchiamo un secondo oggetto di dimensioni diverse dal primo e tiriamo con la stessa forza: registreremo un'altra accelerazione a_1 .
Il rapporto delle accelerazioni sarà:

$$\frac{a_0}{a_1}$$

Se produco un allungamento maggiore, cioè se tiro con più forza e misuro le due accelerazioni a_0' e a_1' , il rapporto sarà uguale a quello precedente, cioè:

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_0'}{a_1'}$$

Deve esistere allora una proprietà intrinseca dei corpi, che chiamiamo massa. Scegliendo come massa campione m_0 la massa, pari a 1 kg, di un cilindro di platino iridio conservato all'Ufficio di Pesi e Misure di Sevres, vicino a Parigi, possiamo definire la massa di un corpo qualsiasi come:

$$m = m_0 \frac{a_0}{a}$$

E questa è la nostra definizione operativa di massa. Definiamo ora come forza unitaria F la forza necessaria per accelerare di 1 m/s^2 il corpo campione di massa 1kg. Dalla relazione precedente possiamo ricavare una legge generale

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Questa è la *seconda legge di Newton* o *seconda legge della dinamica*. E' importantissima perché ci permette di dare una descrizione dinamica di qualsiasi moto. Una forza è quindi la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici, cioè tra due o più corpi, o tra un corpo e l'ambiente.

Se una forza agisce su un punto materiale, tale forza sarà uguale in modulo al prodotto della variazione di velocità, cioè accelerazione del punto, per la sua *massa inerziale*. Usiamo il termine massa inerziale perché la massa esprime l'inerzia del punto, cioè la sua resistenza a a variare il proprio stato di moto. A parità di forza applicata un corpo di massa maggiore accelera di meno di un corpo di massa minore.

Se dunque possiamo trascurare le dimensioni di un corpo e considerarlo un punto, non possiamo tuttavia privarlo della sua massa. Una semplice formula esprime così un concetto molto importante: le forze producono accelerazioni. L'unità di misura della forza è il *Newton*, abbreviato con la lettera N.

In Fisica ci sono quattro forze fondamentali: la forza gravitazionale, esercitata tra corpi dotati di massa, la forza elettromagnetica, esercitata tra corpi carichi elettricamente, la forza debole e la forza forte, agenti su scala subatomica e responsabili per esempio della radioattività e della stabilità del nucleo atomico. La meccanica classica si occupa della forza gravitazionale e di leggi di forza empiriche come forza d'attrito, forza elastica, tensione di fili ecc (che in ultima analisi dipendono da forze elettriche).

Se su un punto materiale agiscono più forze, per conoscerne l'effetto complessivo dovremo sommarle vettorialmente, quindi la seconda legge di Newton diventa:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} = m\vec{a}$$

Se la risultante delle forze è nulla, anche l'accelerazione è nulla e il corpo o è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme. Abbiamo così ritrovato il primo principio della dinamica.

Viene ora spontaneo chiedersi quali sono i limiti di validità di questa legge sperimentale.

Essa è valida nei cosiddetti sistemi di riferimento inerziali, cioè quelli che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto a un punto fisso. Nei sistemi accelerati, detti non inerziali, la legge subirà delle correzioni. In un tale sistema di riferimento, infatti, un osservatore noterà delle forze a cui non saprà associare un origine. Esse vengono appunto chiamate forze apparenti.

In realtà non esiste un vero e proprio sistema di riferimento inerziale, in quanto l'universo stesso è in una condizione di espansione accelerata. Però possiamo considerare con ottima approssimazione un sistema solidale con le stelle fisse, cioè quei corpi celesti posti ad una distanza talmente elevata dalla Terra da sembrare immobili.

La legge di Newton è valida inoltre per corpi che si muovono a velocità molto inferiori a quelle della luce nel vuoto. Se vogliamo studiare fenomeni riguardo quest' ultimo aspetto, dovremo abbandonare la meccanica classica e far riferimento alla teoria della relatività speciale.

3.2 Forza peso e forze vincolari

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto il concetto di forza e abbiamo visto come essa causi un cambiamento del moto di un corpo. Iniziamo ora a parlare di due forze fondamentali, forze che sperimentiamo ogni giorno della nostra vita: la forza peso e la forza vincolare. Partiamo da un'esperienza comune: prendiamo una pallina e teniamola in mano. A un certo punto apriamo la mano: la pallina cade. Come intuì Galileo, il moto della pallina è uniformemente accelerato. Ma se c'è un'accelerazione c'è anche una forza che causa tale accelerazione. Nel nostro caso è la forza di gravità della Terra. La Terra attrae verso il suo centro tutti i corpi sulla e in prossimità della sua superficie. Il peso di una persona non è altro che la forza con cui la Terra la attrae. Si parla per questo di forza peso, e si dice che su un corpo agisce la sua forza peso. Per un corpo di massa m il suo peso vale:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

dove g è l'accelerazione di gravità. Se su un corpo agisce solo il suo peso, si dice che il corpo è in caduta libera. Nell'usare questa equazione in fenomeni fisici locali, cioè quei fenomeni che si svolgono su brevi distanze (una strada, una stanza, un tavolo ecc...) faremo le seguenti assunzioni:

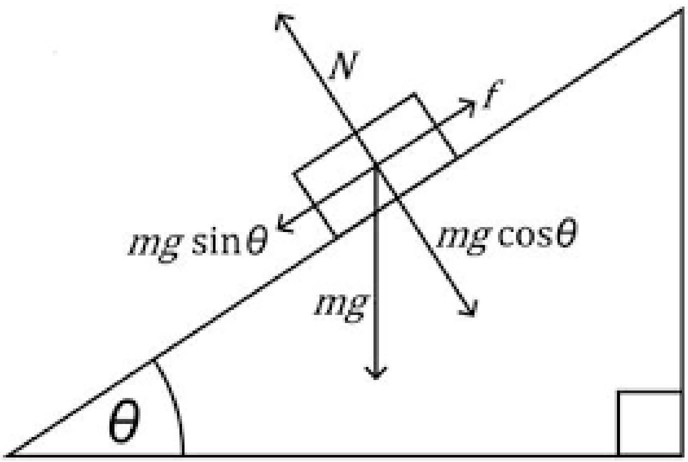
- useremo per g il suo valore medio, 9,8 m/s^2;

- la direzione della forza peso sarà sempre verticale, ovvero per noi la Terra sarà a tutti gli effetti piatta.

Ora raccogliamo la pallina caduta e mettiamola sul tavolo. Notiamo che rimane ferma. Dobbiamo allora concludere, in virtù del secondo principio della dinamica, che sulla pallina agisce un'altra forza, oltre al suo peso. In generale, quando un corpo preme contro una superficie, quest'ultima, anche se rigida, si deforma seppur lievemente e preme sul corpo con una forza detta normale, in quanto perpendicolare alla superficie di contatto.

Non esiste un'espressione generale per la forza normale: a seconda della particolare situazione fisica avrà un certo valore. Nel caso del tavolo orizzontale la normale ha lo stesso modulo della forza peso ma verso opposto. Supponiamo però di avere un corpo fermo su un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale. Adottiamo un sistema di riferimento con assi x,y, uno in direzione perpendicolare al piano e l'altro parallelo a quest'ultimo. In direzione perpendicolare al piano agiscono due forze: la componente della forza peso diretta in questa direzione e la normale. Poiché il corpo è fermo, le due forze devono essere uguali in modulo, quindi la forza normale in questa situazione vale (vedi figura):

$$\vec{N} = m\vec{g}\cos\theta$$



Quando ci pesiamo su una bilancia, la bilancia non misura il nostro peso, ma la forza normale. Se salissimo su un ascensore che accelera verso l'alto, la bilancia segnerebbe un valore più alto. Aumenta infatti la forza normale, mentre la forza peso è sempre la stessa.

Dunque se siamo fermi in piedi sul pavimento, o seduti da qualche parte, su di noi agiscono solo due forze: la forza peso e la forza normale esercitata dalla superficie su cui ci troviamo. In realtà ciò è vero solo se consideriamo la Terra come un sistema di riferimento inerziale. Essa infatti ruota su sè stessa e come abbiamo visto nel relativo capitolo, un moto circolare uniforme è un moto accelerato. La Terra non è quindi un sistema di riferimento inerziale. Di conseguenza ogni corpo sulla sua superficie è soggetto a una forza apparente, detta forza centrifuga. Tuttavia il contributo di questa forza è completamente trascurabile (solo all'Equatore si sente di più: ci fa sentire un po' più leggeri) e quindi, quando consideriamo situazioni fisiche locali, che riguardano corpi che si muovono per brevi distanze, ha senso considerare la Terra come se fosse ferma.

Continuiamo ora con l'analisi delle forze. La forza normale è solo un esempio di *forza vincolare*. Ogni volta che esiste un vincolo che impedisce il moto di un corpo in una data direzione, esiste una forza esercitata dal vincolo stesso sul corpo. Nel caso della pallina ferma sul tavolo, il vincolo è costituito appunto dal tavolo.

Vediamo ora un altro esempio di forza vincolare. Prendiamo un filo, attacchiamo un estremità al soffito, e all'estremità libera attacchiamo una massa. Poichè la massa è ferma, oltre alla forza peso agisce un'altra forza. Essendo la massa a contatto solo con il filo, tale forza è esercitata dal filo stesso ed è chiamata tensione. Più in generale, ogni volta che una corda o una fune è attaccata a un corpo ed è tirata, essa tira il corpo con una forza $\vec{T}$, diretta lungo la corda e in verso concorde al moto del corpo.
Nella maggior parte dei casi possiamo fare le seguenti due assunzioni: la corda è inestensibile e ha massa trascurabile. Il fatto che la corda sia inestensibile ci dice che, se due corpi sono legati dalla stessa corda, le loro accelerazioni sono uguali. Cosa comporta il fatto che la massa sia trascurabile? Che il filo sviluppa alle sue estremità due forze uguali e contrarie, pari alla tensione. Vediamo perché.
Ogni pezzetto di filo è tirato da una parte e dall'altra da tutti gli altri pezzi di filo. In particolare, su ogni estremità libera del filo agisce una forza esterna. Queste forze esterne devono essere uguali alla tensione del filo. Infatti, se la massa è nulla, allora la risultante delle forze deve essere nulla, altrimenti per F=ma il filo avrebbe un accelerazione infinita. Quindi la tensione è la stessa in tutto il filo, e se il filo collega due corpi tirerà entrambi con la stessa forza di modulo pari alla tensione.

Concludiamo con qualche osservazione. Se la forza normale agente su un corpo diminuisce fino a diventare nulla, significa che il corpo e la superficie si toccano ma la superficie non esercita nessuna forza. Se la forza normale diventa negativa, allora il corpo si stacca dalla superficie. E' questo il caso, per esempio, di un corpo che percorre il giro della morte. Se la sua velocità iniziale non è sufficientemente alta, il corpo nel punto più alto si stacca. Ancora, se la tensione diventa negativa, significa che la corda non è più tesa e il corpo si stacca della corda.

3.3 Terzo principio della dinamica

Può capitare che a volte, durante uno scatto di rabbia, battiamo un pugno contro un tavolo. E' evidente che se il pugno è forte sentiremo un po' di dolore. Cos'è successo di preciso? Noi abbiamo applicato una forza al tavolo, e il tavolo ha esercitato sul nostro pugno una forza di uguale intensità, ma in verso opposto alla nostra. E' come se fossimo rimasti fermi e qualcuno ci avesse pestato la mano.

Più in generale, quando due corpi si spingono o si tirano, si dice che interagiscono, cioè ciascun corpo sperimenta la forza esercitata dall'altro. Questo è quanto afferma la *terza legge di Newton*, anche nota come principio di azione e reazione:

Se un corpo A esercita una forza sul corpo B, il corpo B contemporaneamente esercita una forza su A uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso. Cioè

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

Le due forze hanno inoltre la stessa retta d'azione.

Vediamo un esempio. Una formica di massa m è attratta dalla Terra con una forza $\vec{F} = m\vec{g}$. Per la terza legge di Newton, la Terra è attratta dalla formica con una forza $\vec{F} = -m\vec{g}$. Ovviamente, data l'enorme massa della Terra, l'accelerazione subita dal nostro pianeta è a tutti gli effetti uguale a zero.

A questo punto non bisogna confondere la terza legge della dinamica con la seconda legge. Se un libro è posato su un tavolo, la forza normale del tavolo non è la reazione al peso. Infatti, come detto prima, se la Terra esercita una forza verso il basso sul libro (il suo peso), allora il libro esercita una forza verso l'alto sulla Terra, e questa è la forza di reazione. Il motivo per cui la normale è uguale al peso del libro segue dal fatto che la sua accelerazione è nulla, il che richiede che le forze siano uguali e opposte (secondo principio).

La terza legge di Newton spiega perché possiamo camminare. Quando facciamo un passo in avanti, la nostra gamba spinge il pavimento all'indietro, il quale ci spinge in avanti con la stessa forza, permettendoci quindi di camminare. O ancora, immaginiamo di essere su una barca a remi e di voler seguire il corso di un fiume. Se non c'è corrente,per spostarci dobbiamo necessariamente remare. A ogni remata i remi spingono l'acqua all'indietro, cioè si esercita una forza sull'acqua. Per la terza legge di Newton, si esercita una forza anche sulla barca, che ci permette proprio di spostarci in avanti.

3.4 Forza d'attrito radente

Quando cerchiamo di spostare un mobile facciamo abbastanza fatica. E' come se ci fosse una forza che si oppone alla nostra e che ci impedisce di spostare il mobile. Questa forza effettivamente esiste, è esercitata dal pavimento e si chiama forza di attrito radente. Essa contrasta lo scivolamento di una superficie sull'altra: si manifesta sia su un corpo fermo su cui è applicata una forza, sia su un corpo in movimento. Per tornare al mobile, immaginiamo di applicare una certa forza. Il mobile non si sposta. Applichiamo una forza più intensa. Il mobile ancora non si sposta. Spingiamo con tutte le nostre forze: il mobile inizia a muoversi. Quello che è successo è che siamo riusciti a vincere la cosiddetta forza di attrito statico massima. Più in generale, se una forza è applicata a un corpo inizialmente fermo, si osserva sperimentalmente che il corpo non si muove fino a quando la componente della forza parallela alla direzione dello spostamento desiderato non supera il valore critico:

$$f_{as} = \mu_s N$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico e N è la forza normale che agisce sul corpo. Quindi la forza di attrito statico non ha un valore fisso, ma assume di volta in volta lo stesso valore, in modulo, della forza applicata, fino al suo valore massimo. Una volta superato tale valore il corpo si muove e subentra la forza di attrito dinamico, che è costante per tutto il moto e vale:

$$f_{ad} = \mu_d N$$

dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico e N è sempre la forza normale che agisce sul corpo.
Il valore dei coefficienti dipende dalla natura delle superfici a contatto e sperimentalmente si verifica sempre la condizione:

$$\mu_d \leq \mu_s$$

Dunque una volta che abbiamo messo in moto il corpo, se vogliamo che si muova a velocità costante dovremo ridurre la forza che agisce su di esso, in modo che la risultante delle forze sia nulla.
Abbiamo detto prima che l'attrito è generato dal pavimento. Per la terza legge di Newton, anche il corpo in movimento esercita un forza sul pavimento uguale e contraria. Se il corpo si muove sul pavimento non ci interessa più di tanto questa forza di reazione, ma se il corpo si muove su una superficie mobile allora bisogna tenerne conto.

Per quanto detto finora, sembra che la forza di attrito radente sia sempre diretta in verso opposto alla direzione del moto del corpo. In realtà non è sempre così. Certo, se su un corpo in movimento agisce solo l'attrito radente dinamico, il corpo frenerà fino a fermarsi, e quindi qui l'attrito è una forza resistente. D'altro canto però, se vogliamo sollevare dal tavolo una bottiglia, priva di sporgenze o rientranze, è solo grazie all'attrito che riusciamo nell'intento. Se non ci fosse l'attrito la bottiglia ci scivolerebbe tra le dita. In questo caso l'attrito ha il ruolo di forza motrice. Questi esempi danno un'idea di quanto le forze di attrito siano presenti nella nostra vita quotidiana. E' la forza di attrito che ci permette di camminare. Senza l'attrito infatti, le suole delle nostre scarpe scivolerebbero e non potremmo fare un singolo passo. O ancora, è grazie all'attrito che possiamo effettuare una curva quando stiamo guidando. L'attrito radente permette anche ai corpi di rotolare. Se una biglia rotola fino a fermarsi, ciò non è dovuto all'attrito radente, ma al cosiddetto attrito volvente. Ne parleremo approfonditamente nel relativo capitolo sulla dinamica rotazionale.
Ci sono situazioni in cui un forte attrito è desiderabile e altre in cui si cerca di minimizzarlo. Per esempio, le scarpe di un arrampicatore sono costruite in modo

da creare il più attrito possibile tra le suole e la roccia. Dall'altra parte, le forme aerodinamiche degli aerei sono progettate proprio per fendere l'aria e ridurre l'attrito con quest'ultima. E' esperienza comune infatti che è ben più difficile lanciare in avanti un foglio piuttosto che un aeroplanino.

L'attrito ha un'origine microscopica: è da ricercare nelle forze di coesione dei materiali. Anche una superficie apparentemente liscia presenta a livello microscopico innumerevoli asperità, che rendono appunto difficile lo scorrimento delle due superfici. Vincere la forza di attrito significa vincere le forze, di natura elettrostatica, esistenti tra gli atomi delle due superfici. L'attrito è quindi un fenomeno complesso, è la manifestazione macroscopica di fenomeni microscopici non prevedibili individualmente. Le due equazioni di cui abbiamo discusso sopra non hanno la pretesa di spiegare la complessità di tale fenomeno, ma semplicemente descrivono bene quello che osserviamo sperimentalmente.

Riassumendo, possiamo affermare che quando un corpo si muove su una superficie, la superficie interagisce con il corpo esercitando su di esso due forze: la forza normale e la forza di attrito.

3.5 Forza d'attrito viscoso

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto la forza di attrito radente. Questo però non è l'unico modo con cui l'attrito può manifestarsi. Per esempio, quando un corpo si muove in fluido, cioè un liquido o un gas, è sottoposto a una forza che tende a frenarlo. In ogni istante le particelle di fluido a contatto con il corpo sono in moto con il corpo. Questo perché il corpo esercita una forza sulle particelle di fluido, che, inizialmente ferme, si mettono in moto. Per la terza legge di Newton le particelle di fluido esercitano una forza sul corpo in verso opposto alla sua velocità. Se questa non è troppo elevata, allora la forza di attrito viscoso si può scrivere come:

$$\vec{F} = -b\vec{v}$$

dove b è un coefficiente che dipende dalla viscosità del fluido e dalla superficie del corpo.

Supponiamo ora di lasciar cadere verticalmente con velocità iniziale nulla un corpo di massa m in un tubo contenente del fluido. Vogliamo analizzare in dettaglio il moto del corpo. Assumendo che su di esso agiscono due forze, il suo peso e l'attrito viscoso (in realtà c'è anche una terza forza, la forza di Archimede, trascurabile se il volume del corpo è piccolo e la sua densità è molto più grande di quella del fluido), la seconda legge della dinamica di scrive come:

$$m\frac{dv}{dt} + bv = mg$$

ponendo $k = \frac{b}{m}$ l'equazione diventa

$$\frac{dv}{dt} + kv = g$$

Risolvendo per il tempo abbiamo:

$$t = \int_0^v \frac{1}{g - kv}\, dv = -\frac{1}{k}\left[ln(g - kv) - ln(g)\right] = -\frac{1}{k}\left[ln\left(\frac{g - kv}{g}\right)\right]$$

quindi

$$e^{-kt} = \frac{g - kv}{g}$$

e infine

$$v(t) = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

Per $t \to +\infty$ la velocità diventa costante e pari a $v = \frac{mg}{b}$. Significa che a questo punto c'è equilibrio tra forza peso e forza d'attrito e il corpo si muove a velocità costante. Teoricamente quindi il corpo non si muove mai a velocità costante. In pratica però, dopo un certo tempo $t >> \frac{1}{k}$ le variazioni di velocità diventano così piccole che non sono registrate né dagli strumenti di misura né dalla calcolatrice. A quel punto possiamo certamente affermare che il corpo si muove a velocità costante.

3.6 Forza elastica

Se comprimiamo una molla, un pallone, allunghiamo un elastico, avvertiamo una forza che tende ad annullare la deformazione del corpo e a riportarlo nello stato iniziale. Questa forza, esercitata dal corpo stesso, è detta *forza elastica*.

Per studiare gli effetti di questa forza consideriamo una molla, di lunghezza l_0 . Fissiamo un estremo della molla a un gancio e applichiamo una forza all'estremo libero, allungando la molla, che avrà ora una lunghezza l . Poiché la molla è ferma, ci deve essere una forza uguale e opposta alla forza esterna applicata. Questa forza, esercitata dalla molla stessa, è proporzionale alla deformazione $\Delta l = x$ subita. Infatti, allungando la molla ancora di più, dovremo applicare una forza maggiore per tenerla ferma. Se la forza agisce lungo un asse orizzontale x, con l'origine in corrispondenza dell'estremità libera della molla a riposo e con verso positivo nel verso di allungamento, si ha:

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

Questa equazione è nota come *legge di Hooke*. La costante di proporzionalità k è detta costante elastica della molla, ed è una misura della durezza di una molla. Più grande è k , più è difficile deformare la molla.

Il segno meno della forza è dovuto al fatto che è il suo verso è sempre opposto a quello dello spostamento dell'estremo libero. Infatti

- se allunghiamo la molla, lo spostamento è positivo, ma la forza elastica è diretta nel verso opposto al verso scelto come positivo, quindi avrà un segno meno.

- se comprimiamo la molla, la forza elastica sarà positiva, ma lo spostamento è negativo, quindi anche in questo caso i due vettori avranno segno opposto.

Tali considerazioni sono indipendenti dal verso positivo che scegliamo per il sistema di riferimento. La forza elastica è dunque una forza di richiamo, perché tende a riportare la molla alla condizione iniziale.

Supponiamo ora di attaccare un punto materiale di massa m all'estremità di libera della molla. Se la molla viene deformata e poi rilasciata, oscillerà avanti e indietro. Trascurando gli attriti il moto del punto sarà armonico semplice. L'accelerazione è data da:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

La soluzione di questa equazione differenziale ci fornisce la legge oraria del moto:

$$x(t) = Asin(\omega t + \varphi)$$

dove A e φ sono determinate dalle condizioni iniziali $x(0)$ e $v(0)$. Per esempio, se $\varphi = \pm\pi/2$, cioè prendendo come posizione iniziale per il punto la posizione che occupa durante la massima deformazione, l'equazione del moto diventa $x(t) = \pm Acos\omega t$. E se la massa viene rilasciata con velocità nulla l'ampiezza delle oscillazioni è uguale alla deformazione.

La pulsazione e il periodo del moto sono dati rispettivamente da:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Infine facciamo due osservazioni.

La legge di Hooke ha un limite di validità. Se la molla viene allungata troppo si osserva sperimentalmente che essa perde la sua elasticità, acquisendo una deformazione permanente. Da questo punto in poi il suo comportamento non potrà più essere descritto da questa equazione.

E' poi importante notare che se la molla ha massa trascurabile, eserciterà ai sui estremi forze uguali in modulo e opposte in direzione. Per esempio, se attacchiamo una massa all'estremità di una molla, mentre all'estremo libero la tiriamo verso l'alto, la molla eserciterà due forze: una applicata alla nostra mano, diretta verso il basso, e una applicata alla massa, diretta verso l'alto. Questo perché la massa della molla è zero, quindi la risultante delle forze agenti sulla molla (forza della massa e forza della mano, applicate agli estremi della molla) deve essere zero, altrimenti la molla avrebbe un'accelerazione infinita.

3.7 Forza centripeta

Abbiamo visto che il moto di un punto materiale che percorre una traiettoria circolare è accelerato, in quanto la direzione del vettore velocità cambia continuamente. Per la seconda legge di Newton, deve esistere una forza che causa tale accelerazione. Si tratta della *forza centripeta*, che vale in modulo:

$$F = m\frac{v^2}{R}$$

dove v è la velocità tangenziale di un punto di massa m che percorre una circonferenza di raggio R . Come visto nel relativo capitolo, $a = v^2/R$ è l'accelerazione centripeta del corpo.

La forza centripeta quindi impedisce a un corpo di muoversi in linea retta, piegando la sua traiettoria. Ovviamente la direzione della forza è la stessa dell'accelerazione, è cioè diretta verso il centro della circonferenza su cui si muove il corpo. A questo punto bisogna fare attenzione: il fatto che la forza centripeta sia diretta verso il centro della circonferenza non significa che il corpo accelera verso il centro. Se non ci fosse questa forza il corpo partirebbe per la tangente in linea retta. La forza centripeta, ripetiamo, serve solo a curvare la traiettoria del corpo. Se è presente anche un'accelerazione tangenziale l'accelerazione risultante non sarà diretta verso il centro, in quanto sarà somma vettoriale di due accelerazioni fra di loro ortogonali. Inoltre non è necessario che la traiettoria sia perfettamente circolare, basta che sia curva. In questo caso possiamo considerare la circonferenza tangente alla traiettoria in ogni punto.

Notare come la forza centripeta non è una forza a sé stante. Forze centripete posso essere infatti la forza d'attrito, la forza gravitazionale, la tensione di un filo, o qualsiasi altra forza. Il nome ci dice solo che la risultante di certe forze ha direzione radiale. Vediamo alcuni esempi.

- Supponiamo di essere sul sedile posteriore di una macchina che a un certo punto affronta una curva. L'unica forza agente sulla macchina diretta verso il centro è la forza di attrito tra strada e pneumatici. Poiché la macchina non si muove in direzione radiale la forza di attrito è di tipo statico, e questa è la forza centripeta agente sulla macchina. Ma se ci muoviamo di moto circolare solidali con la macchina ci deve essere una forza centripeta anche su di noi. Se l'attrito fornito dal sedile è basso, durante la curva slitteremo fino ad andare addosso alla portiera esterna alla curva. La forza normale della portiera fornisce dunque la forza centripeta necessaria per farci seguire il moto circolare della macchina.

- Consideriamo una stazione orbitante attorno alla Terra. In questo caso la forza centripeta agente sugli astronauti e sulla stazione è data dalla forza di gravità della Terra, diretta verso il centro della stessa. Gli astronauti fluttuano perché sono in caduta libera. Sulla stazione e sul suo contenuto agisce la forza peso e non c'è accelerazione relativa fra astronauti e stazione: non è possibile per gli astronauti premere contro il suolo della stazione, in quanto essa sta cadendo con loro. Difatti sulla Terra quello che ci da il senso di "peso" è in realtà la reazione vincolare del suolo, che ci impedisce di sprofondare ,trasmessa attraverso le nostre ossa al resto del corpo. Se saltiamo quindi da una certa altezza (non troppo alta), durante i brevi secondi di caduta l'unica forza agente su di noi è la forza di gravità (siamo cioè in caduta libera, proprio come gli astronauti). Se mentre cadiamo mettiamo sotto i nostri piedi una bilancia, questa non segnerà nessun peso. Ovviamente la stazione orbitante non precipita sulla Terra, in quanto quando è stata lanciata le è stata conferita una certa velocità tangenziale. La forza di gravità quindi si limita a piegare la sua traiettoria impedendo che la stazione se ne parta per la tangente nelle profondità dello spazio.

- Prendiamo un secchio pieno d'acqua e facciamolo girare in un piano verticale. Se nel punto più alto della traiettoria la velocità del secchio è abbastanza alta, l'acqua non uscirà. Infatti, con una giusta velocità, il secchio esercita una forza normale sull'acqua, che, combinata con il peso della stessa, fornisce la giusta forza centripeta perché il moto sia circolare. Quindi, nonostante l'intuito ci porti erroneamente a credere che l'acqua debba per forza cadere (in fondo le forze sono dirette verso il basso, quindi l'acqua dovrebbe accelerare verso il basso), questo non succede perché la risultante di peso e normale è una forza centripeta, che serve solo a curvare la traiettoria e non fa accelerare i corpi vero l'interno. Il caso limite è quando la forza normale è zero. In questo caso è solo il peso ad avere il ruolo di forza centripeta. Se la velocità è bassa, la forza normale è negativa. Significa che l'acqua perde contatto con il secchio e ci cade addosso! Sarebbe quindi necessaria avere un'altra forza affinché l'acqua si muova di moto circolare. Vediamo quindi di determinare la velocità minima nel punto più alto. Proiettando la seconda legge di Newton in direzione verticale, abbiamo:

$$mg + N = m\frac{v^2}{R}$$

dove m è la massa dell'acqua e R è il raggio della circonferenza, cioè la lunghezza del nostro braccio. Imponendo $N \geq 0$ abbiamo:

$$v \geq \sqrt{gR}$$

3.8 Quantità di moto e impulso

Abbiamo visto che una delle grandezze fisiche fondamentali della cinematica è la velocità. In dinamica facciamo un passo avanti, considerando anche la massa di un punto materiale in movimento. In questo capitolo introduciamo un grandezza che lega tra loro queste due quantità. Consideriamo dunque un punto materiale di massa m che si muove nello spazio con velocità $\vec{v}$.

Definizione (quantità di moto)

Si definisce *quantità di moto* il vettore:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Possiamo allora scrivere la seconda legge della dinamica come:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Questa è in realtà la formula più generale della seconda legge di Newton, valida anche quando la massa non è costante. L'azione di una forza modifica dunque una o più di queste quantità: massa, modulo, direzione e verso della velocità.

Dall'equazione precedente abbiamo:

$$\vec{F}dt = d\vec{p}$$

Definizione (impulso)

Si definisce *impulso* l'integrale della forza rispetto al tempo:

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)dt$$

In generale non conosciamo la legge di dipendenza della forza col tempo. Tuttavia, è possibile considerare il valore medio di tale forza, ed essendo questo costante, lo si può portare fuori dall'integrale, ottenendo la semplice relazione $\vec{J} = \vec{F_m}\Delta t$.

Integrando anche il secondo membro dell'equazione otteniamo

$$\vec{J} = \Delta\vec{p}$$

che rappresenta il *teorema dell'impulso*: l'azione di una forza su un punto per un certo intervallo di tempo causa una variazione della quantità di moto dello stesso.

Gli airbag delle auto vengono costruiti a partire da questo principio. Il loro scopo è di aumentare il tempo di impatto, in modo da minimizzare la forza dell'urto. Dall'altro lato un karateka riesce a spezzare un mattone poiché esercita una forza molto intensa in un intervallo di tempo molto piccolo (il colpo è secco).

3.9 Momento angolare

Introduciamo ora una nuova grandezza fisica che avrà grande importanza nel moto di rotazione, il *momento angolare*. Supponiamo che un punto materiale di massa m si muova nello spazio. Consideriamo un punto O , detto polo, che può essere fermo o in moto. Sia $\vec{v}$ la velocità del punto rispetto al sistema di riferimento in cui studiamo il moto.

Definizione (momento angolare)

Definiamo momento angolare del punto materiale il prodotto vettoriale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

dove $\vec{r}$ è il raggio vettore che indica la posizione del punto rispetto al polo.

Sottolineiamo che il polo non coincide necessariamente con l'origine del sistema di riferimento scelto. Vediamo ora un esempio di calcolo di momento angolare. Supponiamo che il moto sia curvilineo e che avvenga su un piano. Sappiamo già che in coordinate polari la velocità si può scrivere come

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

dove $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_\theta$ sono rispettivamente le velocità radiale e trasversale. Dalla definizione di momento angolare abbiamo che

$$\vec{L} = \vec{r} \times m(\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \vec{r} \times m\vec{v}_\theta$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il prodotto vettoriale tra due vettori paralleli è nullo. Il momento angolare è quindi perpendicolare al piano su cui avviene il moto e vale in modulo

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$$

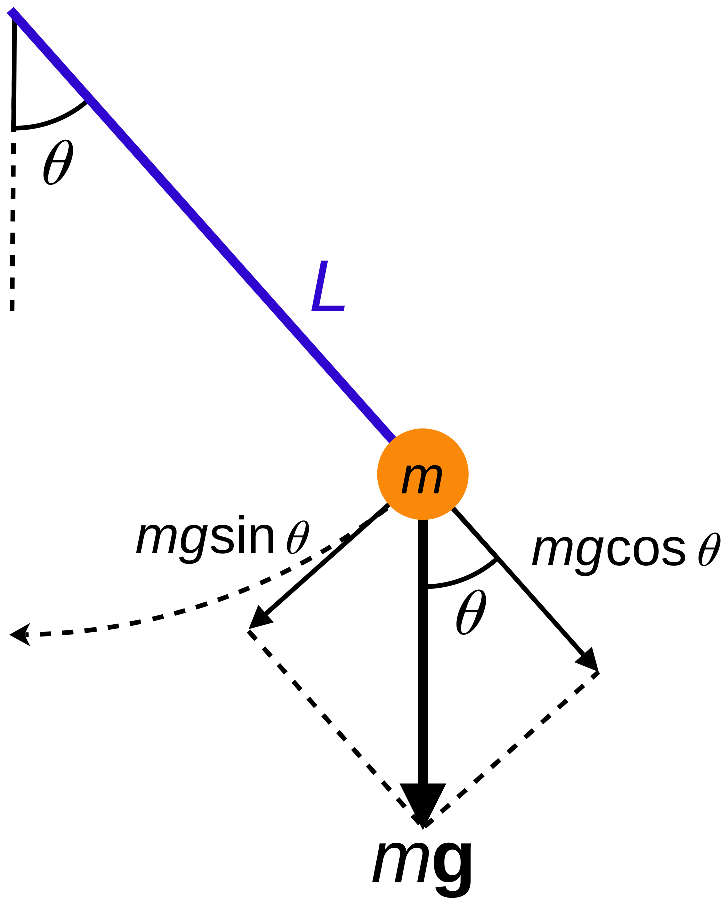
In particolare, se il moto è circolare uniforme con velocità angolare ω , allora $L = mr^2\omega$.

3.10 Pendolo semplice

In questo capitolo vediamo come possiamo applicare la seconda legge di Newton per studiare il moto di un pendolo semplice.

Il pendolo semplice è un sistema fisico costituito da una massa puntiforme attaccata all'estremità di un filo inestensibile. Se spostiamo il filo dalla verticale la massa sarà soggetta a un moto oscillatorio, che, trascurando ogni attrito, continuerà fino a una nuova interazione col sistema.

Il moto di un pendolo è un moto circolare il cui raggio R è uguale alla lunghezza L del filo. Le forze agenti sulla massa sono il suo peso e la tensione del filo. Per determinare la legge oraria del moto, consideriamo innanzitutto un sistema di riferimento con due assi in direzione tangenziale (tangente alla traiettoria) e centripeta (diretta lungo il filo). Chiamiamo θ l'angolo formato dal filo con la verticale. Conveniamo che per spostamenti a destra della verticale gli angoli saranno positivi, mentre per spostamenti a sinistra della verticale saranno negativi.



Scomponendo le forze abbiamo:

$$\begin{cases} T - mgcos\theta = ma_c \\ -mg\sin\theta = ma_t \end{cases}$$

Il segno meno è dovuto al fatto che la direzione della componente della forza peso lungo la traiettoria è opposta alla direzione dello spostamento del punto. Se il punto si trova a destra della verticale, la forza è negativa perché opposta al verso definito positivo. Se il punto si trova a sinistra della verticale la forza è positiva, ma gli angoli negativi, quindi anche il loro seno sarà negativo. E' evidente quindi l'analogia con la forza elastica.

Ricordando che l'accelerazione angolare è data da:

$$\alpha = \frac{a_t}{R}$$

possiamo ricavare l'accelerazione del punto:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

Per angoli qualunque la soluzione di questa equazione differenziale è piuttosto complicata. Consideriamo dunque piccoli valori di θ . Sviluppando in serie:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + ...$$

Quindi per angoli piccoli, in genere minori di 13°, possiamo approssimare $\sin\theta$ a θ . L'equazione differenziale del moto diventa:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

che coincide con quella del moto armonico semplice. La legge oraria del moto è allora:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Poiché la funzione seno oscilla tra valori compresi nell'intervallo $[-1, +1]$, l'angolo assumerà valori compresi tra $[-\theta_0, +\theta_0]$. Quindi θ_0 corrisponde al massimo angolo di oscillazione, ovvero $\theta_0 = \theta_{\max}$.

La pulsazione e il periodo del moto (cioè il tempo impiegato a compiere un'oscillazione completa) sono dati rispettivamente da

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Un'importante considerazione da fare è che il periodo non dipende dalla massa, né dall'angolo iniziale del punto materiale (isocronismo delle piccole oscillazioni).

Ricordando ora la definizione di angolo in radianti, ovvero: $\theta = \frac{s}{L}$, dove s rappresenta lo spostamento lungo la traiettoria, possiamo ricavare le leggi orarie dello spostamento e della velocità tangenziale (si noti che $\dot{\theta}$ rappresenta la velocità angolare):

$$s(t) = L\theta_0 \sin(\omega t + \varphi), \qquad v(t) = L\dot{\theta} = L\omega\theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Concludiamo con un'osservazione di carattere sperimentale. Finora abbiamo trattato la massa attaccata al filo alla stregua di un punto materiale, privo di dimensioni. Nella realtà, però, se volessimo fare esperimenti con un pendolo dovremmo ricorrere a piccoli oggetti sferici, i quali hanno un diametro, seppur piccolo. Di conseguenza come raggio della circonferenza dovremo considerare la lunghezza del filo più il raggio della pallina. Il non accorgersi di questo particolare comporta un errore sistematico nelle misure.

3.10.1 Pendolo a cono

Un pendolo a cono è un pendolo semplice che, invece di oscillare attorno alla verticale, ruota attorno ad essa, restando fermo su una quota e mantenendo l'angolo θ con la verticale costante. Le caratteristiche di questo tipo di moto sono:

- l'angolo θ con la verticale aumenta con l'aumentare della velocità;

- esiste una traiettoria stabile circolare a una certa quota;
- esiste una relazione tra θ e la velocità di rotazione ω .

Per un punto materiale, vale:

$$m\vec{a} = \vec{f}^{tot} = \vec{T} + m\vec{g}$$

Inoltre, poiché mantiene la sua quota stabile, avremo che la componente $a_z = 0$; quindi sull'asse verticale è vera la relazione:

$$T\cos\theta - mg = 0$$

Il punto materiale compie una traiettoria circolare, ovvero possiede un'accelerazione centripeta. La forza centripeta che fornisce questa accelerazione è la componente orizzontale della tensione (infatti la forza peso non ha componenti orizzontali):

$$f_c = ma_c = T\sin\theta \;\Rightarrow\; m\omega^2 r = T\sin\theta$$

Ricordiamo che il raggio della circonferenza è dato da $r = l\sin\theta$, dove l è la lunghezza del filo.

Ricavando la tensione dalla prima espressione, ovvero $T = \frac{mg}{\cos\theta}$, la sostituiamo in questa, ricavando una relazione tra θ e ω :

$$m\omega^2 r = \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta \;\Rightarrow\; \omega^2 = \frac{g}{l\cos\theta}$$

Passiamo ora a studiare i momenti del problema. Consideriamo due poli: il polo O è l'estremo opposto al punto materiale del filo, quello fisso, mentre O' è il centro della circonferenza tracciata dal punto, che si trova sulla stessa verticale di O . Calcoliamo prima il momento angolare e delle forze rispetto a O' :

$$\vec{J}_{O'} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$|\vec{J}_{O'}| = rmv \text{ diretto lungo } z$$

$$\Rightarrow\; \vec{\tau} = \frac{d\vec{J}}{dt} = 0$$

Poiché il momento angolare è costante, il momento delle forze totali rispetto a O' è nullo, quindi:

$$\vec{\tau} = (\vec{r}_1 \wedge \vec{T} + \vec{r}_2 \wedge m\vec{g}) = \vec{r} \wedge (\vec{t} + m\vec{g}) = \vec{r} \wedge \vec{F}_c = 0$$

Calcoliamo i momenti rispetto al punto O :

$$\vec{J} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \;\Rightarrow\; |\vec{J}| = lmv$$

A tal proposito, ricordiamo che v è *sempre* perpendicolare al filo. Il momento delle forze esterne sarà uguale a:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge (\vec{T} \sin\theta) \Rightarrow |\vec{\tau}| = T \sin\theta \, l \cos\theta$$

La direzione del momento angolare $\vec{J}$ quindi varia e non si mantiene costante durante il moto.

Capitolo 4

Moti relativi

4.1 Teorema delle velocità relative

Il concetto stesso di moto è un concetto relativo. Se una mamma porta il figlio nel passeggino, il bambino avrà per esempio una velocità di 2 m/s rispetto al marciapiede, ma avrà velocità nulla rispetto al passeggino. In generale, in due sistemi di riferimento in moto relativo il moto di un punto materiale viene descritto con leggi diverse. Consideriamo dunque due sistemi di riferimento, uno *fisso*, costituito da una terna cartesiana xyz con centro in O , e uno *mobile*, con centro in O' e assi $x'y'z'$. Il sistema mobile si sposta con velocità $\vec{v}_{O'}$ rispetto al sistema fisso, e i suoi assi possono ruotare, cosa che non avviene per il sistema fisso. I due sistemi di riferimento osservano il moto di un punto P. Dalla regola di somma tra vettori otteniamo la relazione tra le posizioni del punto P, misurate rispetto ai due sistemi di riferimento:

$$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}' \qquad (1)$$

con

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}; \quad \vec{r}' = x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'; \quad \vec{OO'} = x_{O'}\hat{i} + y_{O'}\hat{j} + z_{O'}\hat{k}$$

La velocità di P rispetto al sistema fisso è

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

La velocità di P misurata dal sistema mobile è

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\hat{i}' + \frac{dy'}{dt}\hat{j}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'$$

Infine, la velocità dell'origine O' rispetto al sistema fisso è

$$\vec{v}_{O'} = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{i} + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{j} + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{k}$$

Andiamo ora a derivare la (1) rispetto al tempo. Otteniamo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{k} + \frac{dx'}{dt}\hat{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}' +$$
$$+ x'\frac{d\hat{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

ovvero

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_{O'} + x'\frac{d\hat{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt} \qquad (2)$$

I versori, per definizione, hanno modulo costante. Nel nostro caso possono ruotare, diciamo con velocità angolare ω . Quindi possiamo scrivere le loro derivate come

$$\frac{d\hat{\imath}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\imath}'; \quad \frac{d\hat{\jmath}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\jmath}'; \quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{k}'$$

Gli ultimi tre termini della (2) diventano allora

$$x'(\vec{\omega} \times \hat{\imath}') + y'(\vec{\omega} \times \hat{\jmath}') + z'(\vec{\omega} \times \hat{k}') = \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

In definitiva abbiamo ottenuto la seguente equazione

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$$

nota come *teorema delle velocità relative*: le misure di velocità compiute in sistemi di riferimento in moto rispetto all'altro sono diverse.

4.2 Teorema delle accelerazioni relative

Nel capitolo precedente abbiamo visto come varia la descrizione della velocità di un punto osservato in diversi sistemi di riferimento. Il passo successivo è naturalmente osservare cosa accade per l'accelerazione. L'accelerazione del punto P rispetto al sistema fisso è

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

l'accelerazione di P misurata dal sistema mobile è

$$\vec{a'} = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{k}'$$

Infine, l'accelerazione dell'origine O' rispetto a O è

$$\vec{a}_{O'} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt}$$

Andiamo ora a derivare rispetto al tempo il teorema delle velocità relative

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

Calcoliamo $d\vec{v}'/dt$:

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\hat{\imath}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\jmath}' + \frac{dz'}{dt}\hat{k}'\right) = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{\imath}' + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{\jmath}' + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{k}' +$$

$$+ \frac{dx'}{dt}\frac{d\hat{\imath}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\hat{\jmath}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

Ricordando ora che la derivata del versore si può scrivere come prodotto vettoriale tra </omega> e il versore possiamo scrivere

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Dal capitolo precedente sappiamo poi che

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v} - \vec{v}_{O'} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

quindi

$$\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$$

Pertanto l'equazione che lega le accelerazioni misurate in due sistemi di riferimento in moto relativo è:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

che esprime il *teorema delle accelerazioni relative*.

Quindi l'accelerazione che misura un osservatore del sistema mobile è

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{O'} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

Il termine

$$\vec{a}_t = \vec{a}_{O'} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$$

si chiama *accelerazione di trascinamento*, mentre l'ultimo termine

$$\vec{a}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

si chiama *accelerazione di Coriolis*, di cui parleremo ampiamente nel capitolo sulle forze apparenti.

4.3 Relatività galileiana

Abbiamo visto nei precedenti capitoli come cambiano velocità e accelerazione in sistemi di riferimento qualsiasi. Tuttavia ci sono sistemi di riferimento speciali per cui le equazioni di passaggio da un sistema all'altro assumono una forma molto semplice: sono i sistemi di riferimento inerziali.
Definiamo sistema di riferimento inerziale un sistema di riferimento in cui vale il primo principio della dinamica. In qualsiasi istante, se un corpo si sta muovendo continua a muoversi di moto rettilineo uniforme, mentre se è in quiete rimane in quiete. Consideriamo ora due sistemi di riferimento. Uno è inerziale, l'altro si muove in moto rettilineo uniforme rispetto al primo. I loro assi sono paralleli ed il sistema di origine O' si muove con velocità costante $\vec{v}_{o'}$ parallela all'asse x. All'istante iniziale le due origini coincidono cosicché

$$\vec{OO'} = \vec{v}_{O'}t$$

Proiettando sugli assi la relazione

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{OO'}$$

otteniamo

$$\begin{cases} x' = x - v_{o'}t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

e per le velocità

$$\begin{cases} v'_x = v_x - v_{o'} \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

Queste equazioni si chiamano trasformazioni di Galileo tra sistemi di riferimento.

Infine per le accelerazioni si ha $\vec{a} = \vec{a}'$. Osservatori che in questi due sistemi di riferimento studiano il moto di un punto materiale concordano sul valore della forza che agisce sul punto. In particolare, se $\vec{a} = 0$, anche $\vec{a}' = 0$, e quindi anche il secondo sistema di riferimento è inerziale.
Da ciò derivano due conseguenze importanti. In primo luogo, definito un sistema di riferimento inerziale, tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso sono inerziali. In secondo luogo, essendo la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi sistemi di riferimento se uno di essi è in quiete o in moto: tutti i sistemi inerziali sono equivalenti. Non ha cioè senso in concetto di moto assoluto. Questo risultato è noto con il termine di *relatività galileiana*.

Se il moto del secondo sistema è accelerato rispetto al sistema inerziale, quello che accade è che la legge di Newton non è più valida. Se $\vec{F} = m\vec{a}$ nel sistema inerziale, nel sistema accelerato non può essere $\vec{F} = m\vec{a}'$, perché $\vec{a} \neq \vec{a}'$. Ricordando ora l'espressione del teorema delle accelerazioni relative, se moltiplichiamo ciascun termine per la massa del punto otteniamo

$$\vec{F} - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c = m\vec{a}'$$

Questa è una forma modificata del secondo principio della dinamica. In un sistema di riferimento accelerato (non inerziale) il prodotto della massa del punto per l'accelerazione misurata in quel sistema è uguale alla forza, o più probabilmente alla somma delle forze, che agiscono sul punto misurate nel sistema inerziale (dette forze vere), più le cosiddette forze apparenti. Queste forze, dette anche forze d'inerzia, appaiono agenti solo nei sistemi non inerziali. Esse non derivano dalle interazioni fondamentali e non esistono in un sistema inerziale, dove invece si misurano le forze vere.

4.4 Trasformazioni di Galileo

Abbiamo visto nei precedenti capitoli come cambiano velocità e accelerazione in sistemi di riferimento qualsiasi. Tuttavia ci sono sistemi di riferimento speciali per cui le equazioni di passaggio da un sistema all'altro assumono una forma molto semplice: sono i sistemi di riferimento inerziali.
Definiamo sistema di riferimento inerziale un sistema di riferimento in cui vale il primo principio della dinamica. In qualsiasi istante, se un corpo si sta muovendo continua a muoversi di moto rettilineo uniforme, mentre se è in quiete rimane in quiete. Consideriamo ora due sistemi di riferimento. Uno è inerziale, l'altro si muove in moto rettilineo uniforme rispetto al primo. I loro assi sono paralleli ed il sistema di origine O' si muove con velocità costante $\vec{v}_{o'}$ parallela all'asse x. All'istante iniziale le due origini coincidono cosicché

$$\vec{OO'} = \vec{v}_{O'}t$$

Proiettando sugli assi la relazione

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{OO'}$$

otteniamo

$$\begin{cases} x' = x - v_{o'}t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

e per le velocità

$$\begin{cases} v'_x = v_x - v_{o'} \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

Queste equazioni si chiamano trasformazioni di Galileo tra sistemi di riferimento.

Infine per le accelerazioni si ha $\vec{a} = \vec{a}'$. Osservatori che in questi due sistemi di riferimento studiano il moto di un punto materiale concordano sul valore della forza che agisce sul punto. In particolare, se $\vec{a} = 0$, anche $\vec{a}' = 0$, e quindi anche il secondo sistema di riferimento è inerziale.
Da ciò derivano due conseguenze importanti. In primo luogo, definito un sistema di riferimento inerziale, tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso sono inerziali. In secondo luogo, essendo la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi sistemi di riferimento se uno di essi è in quiete o in moto: tutti i sistemi inerziali sono equivalenti. Non ha cioè senso in concetto di moto assoluto. Questo risultato è noto con il termine di *relatività galileiana*.

Se il moto del secondo sistema è accelerato rispetto al sistema inerziale, quello che accade è che la legge di Newton non è più valida. Se $\vec{F} = m\vec{a}$ nel sistema inerziale, nel sistema accelerato non può essere $\vec{F} = m\vec{a}'$, perché $\vec{a} \neq \vec{a}'$. Ricordando ora l'espressione del teorema delle accelerazioni relative, se moltiplichiamo ciascun termine per la massa del punto otteniamo

$$\vec{F} - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c = m\vec{a}'$$

Questa è una forma modificata del secondo principio della dinamica. In un sistema di riferimento accelerato (non inerziale) il prodotto della massa del punto per l'accelerazione misurata in quel sistema è uguale alla forza, o più probabilmente alla somma delle forze, che agiscono sul punto misurate nel sistema inerziale (dette forze vere), più le cosiddette forze apparenti. Queste forze, dette anche forze d'inerzia, appaiono agenti solo nei sistemi non inerziali. Esse non derivano dalle interazioni fondamentali e non esistono in un sistema inerziale, dove invece si misurano le forze vere.

Capitolo 5

Lavoro ed energia

5.1 Energia cinetica e lavoro

Da sempre l'uomo ha cercato di capire come produrre e usare in modo efficiente l'energia. Uno dei compiti principali della fisica è studiare i vari tipi di energia esistenti in natura, i loro effetti, e capire come i sistemi fisici scambiano tra loro questa quantità. Il XX secolo ha visto un grande avanzamento in questo campo, con la scoperta dell'energia nucleare.

Innanzitutto cosa significa il termine energia? Il concetto, apparentemente, è vasto. Basta pensare alle forme di energia che conosciamo: energia eolica, nucleare, elettrica... Vedremo però che in realtà tutte queste forme di energia si possono ricondurre a solo due tipi fondamentali, e che l'energia si può definire in modo molto semplice. Anticipiamo innanzitutto che l'energia è una quantità scalare, un numero che associamo a un sistema fisico. Ogni qualvolta il sistema interagisce con un altro sistema, il numero associato al primo sistema può, ad esempio, diminuire, mentre aumenta quello associato al secondo sistema. In altre parole non si perde né si crea dal nulla energia. Il principio di conservazione dell'energia non è stato finora mai confutato dall'esperimento e rappresenta una proprietà notevole del nostro universo. E' come quando andiamo a prelevare i soldi: essi passano dal bancomat alla nostra tasca, senza che si perdano (si spera).

Tutti i corpi in movimento posseggono energia. D'altra parte ciò sembra molto naturale: se siamo ammalati difficilmente ci alziamo dal letto. O ancora, un atleta professionista ci batte sicuramente nei 100 metri piani perché ha più "energia" di noi. Quindi, intuitivamente, maggiore è la velocità di un corpo, maggiore è al sua energia. Vediamo ora come possiamo quantificare questa energia.

Supponiamo che su un punto materiale agisca un forza costante $\vec{F}$ che forma un angolo θ con l'orizzontale (un asse x orientato). Durante uno spostamento Δx la forza cambia la velocità del punto da v_0 a v_1 . Detta F_x la componente orizzontale della forza si ha:

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a_x \Delta x$$

D'altra parte per la seconda legge di Newton:

$$F_x = ma_x$$

risolvendo la prima equazione per a_x e inserendola nella seconda abbiamo:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_x\Delta x$$

Definiamo la quantità $\frac{1}{2}mv^2$ come l' *energia cinetica* di un corpo di massa m che si muove con velocità v .

Quando una forza sposta un corpo, si dice che la forza ha compiuto un *lavoro*. Se la forza non è bilanciata, come nell'esempio precedente, allora causa anche una variazione di energia cinetica del corpo. Il lavoro di una forza costante durante uno spostamento Δx vale:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{x} = Fcos\theta\Delta x = F_x\Delta x$$

Dunque a compiere lavoro è solo la componente della forza parallela allo spostamento, e non la componente perpendicolare.

Supponiamo ora che un punto materiale si muova, lungo una traiettoria qualsiasi, sotto l'azione di una forza variabile in modulo e direzione. Vogliamo trovare il lavoro compiuto dalla forza durante uno spostamento del punto dalla posizione A a quella B. Dividiamo dunque la traiettoria in segmenti Δs , abbastanza piccoli cosicché la forza si possa considerare costante durante questi spostamenti. Il lavoro totale sarà la somma dei lavori parziali compiuti durante questi piccoli spostamenti. Ovviamente il risultato ottenuto sarà solo un'approssimazione dell'effettivo valore del lavoro, tanto migliore quanto più piccoli sono i segmenti. Mediante un passaggio al limite abbiamo:

$$W = \lim_{\Delta s \to \infty} \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Il lavoro è dunque l'integrale di linea della forza. E' una grandezza scalare, in quanto definito da un prodotto scalare, e la sua unità di misura è il Joule (J).

Nel caso più generale il punto materiale si muove nello spazio. Usando gli assi cartesiani come sistema di riferimento possiamo scrivere uno spostamento infinitesimo come:

$$d\vec{s} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}$$

Se il punto si sposta da una posizione di coordinate (x_0, y_0, z_0) a una di coordinate (x_f, y_f, z_f) , possiamo allora scrivere il lavoro come:

$$W = \int_{x_0}^{x_f} F_x dx + \int_{y_0}^{y_f} F_y dy + \int_{z_0}^{z_f} F_z dz$$

Facciamo ora alcune considerazioni.

- Se su un corpo agiscono più forze il lavoro totale è la somma dei lavori compiuti da ogni singola forza.

- Solo le componenti della forza parallele allo spostamento compiono lavoro. Questo significa che le forze centripete non compiono mai lavoro.

- Affinché ci sia lavoro deve esserci uno spostamento. Se spingiamo forte contro una parete sentiamo una certa fatica, a causa delle continue contrazioni dei muscoli. Tuttavia non c'è lavoro compiuto sulla parere, dato che questa non si sposta.

Oltre alla definizione mediante un integrale che abbiamo appena dato, ne possiamo dare una equivalente, ma forse più intuitiva, che mette in risalto il significato fisico del lavoro.
Una forza compie lavoro quando agisce su un corpo (un punto materiale, un corpo esteso..) che si sposta percorrendo una traiettoria qualsiasi, purché tale traiettoria non sia perpendicolare alla direzione della forza.
Per esempio compiamo lavoro quando spostiamo un mobile, alziamo un bicchiere, trituriamo il cibo per mangiarlo. O ancora, l'attrito compie lavoro quando frena i corpi in movimento, compie lavoro un gas che si espande, e gli esempi sono innumerevoli.

Consideriamo ora un lavoro infinitesimo lungo una traiettoria. Indicata con F la forza parallela allo spostamento abbiamo che:

$$dW = Fds = m\frac{dv}{dt}ds = mvdv$$

integrando abbiamo:

$$W = \int_{v_0}^{v_f} mv\,dv = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

indicando con E_k l'energia cinetica del punto materiale possiamo scrivere la seguente relazione:

$$W = \Delta E_k$$

che rappresenta il *teorema dell'energia cinetica*. Quando una forza compie lavoro su un punto materiale può aumentare l'energia cinetica del punto (compiendo lavoro positivo), oppure diminuirla (in questo caso il lavoro è negativo). Questo ci suggerisce un'altra definizione di energia cinetica. L'energia cinetica di un corpo che si muove con velocità v è il lavoro che le forze esterne applicate al corpo hanno dovuto compiere per portare la sua velocità da 0 a v . Un lavoro positivo indica una forza motrice, un lavoro negativo è associato a una forza resistente che si oppone al moto del punto.
E' importante poi notare che nel teorema dell'energia cinetica W rappresenta la somma dei lavori di ciascuna forza che agisce sul punto materiale nel tratto considerato. Questo perché la nostra F è in generale una risultante di più forze. Quindi se una persona sposta una cassa a velocità costante, sta compiendo un lavoro non nullo. Invece, se consideriamo la risultante tra forza applicata e forza d'attrito dinamico, il lavoro è nullo, perché non c'è variazione di energia cinetica.

Osservazione: è possibile partire dalla definizione di lavoro come integrale e poi dimostrare comunque il teorema dell'energia cinetica, definendo quindi il valore trovato $\frac{1}{2}mv^2$ come *energia cinetica del punto materiale*. Non è l'unico caso della meccanica in cui si può dimostrare un teorema partendo da considerazioni e definizioni differenti.

Infine, in molte situazioni è utile considerare la velocità di erogazione del lavoro.

Definiamo potenza istantanea la derivata del lavoro rispetto al tempo:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

ricordando che $dW = Fcos\theta ds$, dove θ è l'angolo che la forza forma con lo spostamento, possiamo scrivere:

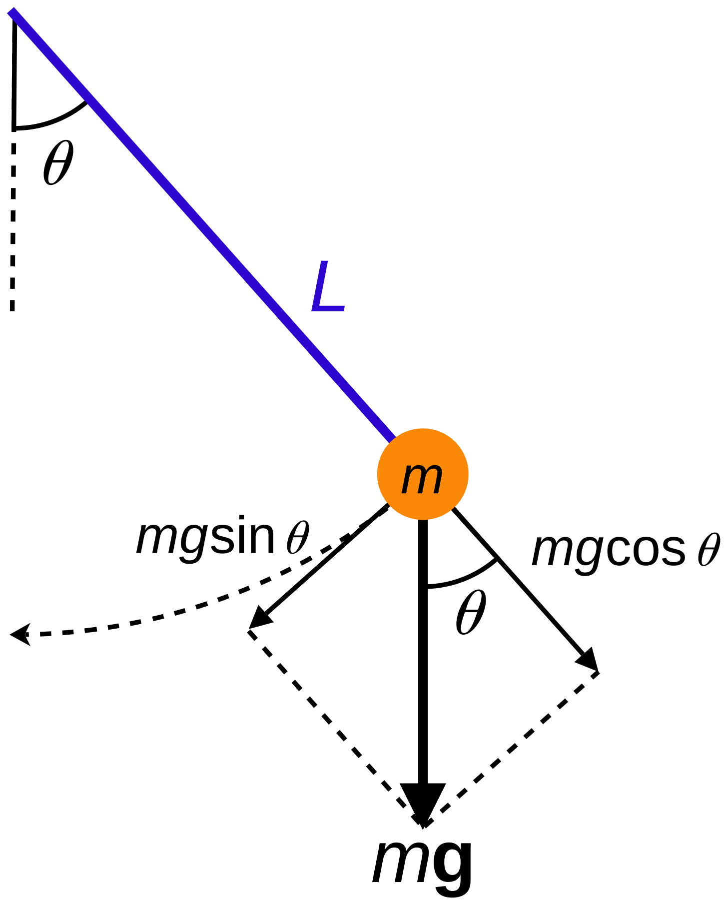
$$P = \frac{Fcos\theta ds}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

dove v è la velocità istantanea del punto materiale lungo la traiettoria. L'unità di misura della potenza è il Watt (W).

5.2 Energia del pendolo

Riprendiamo il discorso del pendolo semplice, stavolta studiandolo sfruttando le conoscenze sul lavoro e l'energia cinetica. Ricordiamo, prima di iniziare lo studio, le formule del lavoro che conosciamo e lo schema del pendolo:

$$L = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$
$$K = \frac{1}{2}mv^2$$
$$L = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2)$$



Prendiamo come esempio di riferimento l'immagine qui sopra. Consideriamo il punto iniziale del moto il punto in cui è disegnato il punto materiale, mentre l'estremo finale del moto sarà il centro di oscillazione. Dallo studio sul moto del pendolo abbiamo osservato che il punto ha velocità nulla agli estremi di oscillazione e velocità massima al centro; tuttavia, in quel caso abbiamo dovuto compiere un'approssimazione dell'angolo, ottenendo quindi un valore della velocità approssimato anch'esso. Sfruttiamo il lavoro e l'energia per calcolare con precisione la velocità massima del sistema. Abbiamo quindi:

$$v_i = 0$$
$$v_f = v_{\text{max}}$$

Poiché sappiamo che $L_{\text{tot}} = \Delta K$, avendo le velocità iniziali e finali possiamo calcolarci il lavoro della forza totale agente sul punto:

$$L_{\text{tot}} = \Delta K = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2$$

Quindi abbiamo che $L_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv_{\text{max}}^2$; tuttavia possiamo calcolare il lavoro partendo anche dalla definizione stessa:

$$L_{\text{tot}} = \int_i^f \vec{f_{\text{tot}}} \cdot d\vec{s} = \int_i^f (\vec{P} + \vec{T}) \cdot d\vec{s} =$$
$$\Leftrightarrow \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s} + \int_i^f \vec{T} \cdot d\vec{s} = \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s}$$

Questo perché sappiamo che $\vec{T}$ è perpendicolare allo spostamento lungo tutto il moto, per definizione di $\vec{T}$, quindi il prodotto scalare è nullo. Quindi:

$$L_{\text{tot}} = \int_i^f \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_i^f mg \cos\phi ds = \int_i^f mg \sin\theta ds$$

Questo perché il coseno di ϕ , cioè l'angolo formato tra il peso e lo spostamento, è equivalente al seno di θ . Prima di procedere con il calcolo finale, ricordiamo che possiamo scrivere ds come $Ld\theta$, questo per la definizione di angolo. Infine:

$$\begin{aligned} L_{\text{tot}} &= \int_i^f mg(\sin\theta) L d\theta = mgL \int_i^f \sin\theta \, d\theta \\ \Leftrightarrow mgL &\int_0^{\theta_0} \sin\theta \, d\theta = -mgL \cos\theta|_0^{\theta_0} \\ \Leftrightarrow &- Lmg(\cos\theta_0 - \cos 0) = Lmg(1 - \cos\theta_0) \end{aligned}$$

Siamo giunti a calcolare il lavoro compiuto dalle forze del sistema in due modi diversi; un'analisi immediata: i due risultati sono entrambi positivi perché la forza peso spinge lungo tutto il moto, con verso concorde allo spostamento stesso. Uguagliamo i due risultati ottenuti:

$$\begin{cases} L_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 \\ L_{\text{tot}} = Lmg(1 - \cos\theta_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 &= Lmg(1 - \cos\theta_0) \\ v_{\text{max}}^2 &= 2Lg(1 - \cos\theta_0) \end{aligned}$$

Dallo studio del moto che abbiamo compiuto in qualche capitolo fa, trovammo che $v_{\text{max}} = L\omega\theta_{\text{max}}$. Sostituendo a ω il suo valore, e ricordando che, in questo studio, $\theta_0 = \theta_{\text{max}}$ perché l'angolo di partenza del moto coincide all'angolo massimo, abbiamo ricavato che:

$$v_{\text{max}}^2 = \theta_0^2 Lg$$

Questo perché approssimammo $\sin\theta \approx \theta$. Tuttavia, partendo dal giusto risultato, ovvero quello ottenuto con lo studio delle forze, possiamo anche questa volta approssimare $\cos\theta_0$ con il suo sviluppo in serie di Taylor:

$$\cos\theta_0 = 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$$

Sostituendo nella formula:

$$v_{\text{max}}^2 = 2Lg(1 - \cos\theta_0) \approx 2Lg(1 - 1 + \frac{\theta_0^2}{2}) = \theta_0^2 Lg$$

Che è concorde con il risultato ottenuto nel precedente studio. L'idea di compiere approssimazioni per risolvere problemi che non hanno una soluzione analitica è, se l'approssimazione viene fatta con criterio, un ottimo modo per compiere gli studi necessari. Questo era solo un esempio di come sfruttare l'energia e il lavoro per calcolare moti particolarmente complicati.

5.3 Lavoro della forze di attrito, della forza peso e della forza elastica

Dopo aver definito il lavoro di una forza, è utile sfruttare questa definizione per calcolare i lavori di forze il cui modulo ci è noto, come la forza d'attrito e la forza peso.

5.3.1 Lavoro della forza d'attrito

Ricordiamo che il modulo della forza di attrito *dinamico* vale:

$$f_{att} = \mu_d N = \mu_d mg$$

Applichiamola nella formula del lavoro:

$$W = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B f ds \cos\phi = \int_A^B -\mu_d mg ds = -\mu_d mg \int_A^B ds = -\mu_d mg \Delta s$$

Abbiamo considerato in questo calcolo un moto rettilineo, in cui l'angolo ϕ tra la forza e lo spostamento è $\phi = \pi$, per cui vale $\cos\phi = -1$. Δs è l'effettiva traiettoria percorsa durante il moto: il lavoro della forza di attrito dipende dallo spostamento percorso.
E' bene ora fare una precisazione: questa formula rappresenta il lavoro compiuto dall'attrito su un punto materiale o su un corpo perfettamente rigido. Se consideriamo un oggetto esteso reale che viene lanciato lungo un pavimento con attrito, si nota che durante il moto esso si riscalda, il che sta a indicare la comparsa, nel blocco, di energia termica, cioè energia associata al moto disordinato delle molecole che lo compongono. Quindi l'energia (cinetica) iniziale del blocco non è stata del tutto azzerata. Una parte di energia viene convertita in energia termica, l'altra parte viene dissipata dall'attrito, cioè un po' viene trasferita dal blocco al pavimento e un po' diventa suono. Questa energia trasferita è il lavoro dell'attrito, che quindi risulta essere minore di quello che troveremmo usando la formula ricavata precedentemente. Il lavoro è in questo caso inferiore al prodotto forza per spostamento. Come mai?
Un oggetto reale non è mai perfettamente rigido. Questo implica che la forza di attrito agisce su punti del corpo il cui moto risulta ostacolato con effetti di deformazione locale. In altre parole, se il blocco nel complesso si muove di una certa distanza, le asperità microscopiche della superficie di contatto si spostano di una distanza minore, perché si deformano. Possiamo anche dire che l'attrito lavora su una distanza efficace minore di quella effettivamente percorsa dal blocco nel suo complesso.

Solo se il corpo è un punto materiale (privo di dimensioni) o un corpo perfettamente rigido, il lavoro dell'attrito è effettivamente $-\mu_d mg\Delta s$. In questo caso l'energia cinetica del corpo va nel pavimento e nell'aria, e il corpo non si scalda.

5.3.2 Lavoro della forza peso

Come fatto per la forza di attrito, sfruttiamo la definizione di lavoro. Ricordiamo il modulo della forza peso:

$$P = mg$$

Prendiamo un sistema di riferimento con asse z verticale, diretto verso l'alto; possiamo scrivere la forza peso in coordinate cartesiane, ovvero:

$$\vec{P} = (0,\, 0,\, -mg)$$

Ricordiamo che anche il vettore $d\vec{s}$ può essere scritto in coordinate:

$$d\vec{s} = (dx,\, dy,\, dz)$$

Per cui, per il lavoro, avremo che:

$$W = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (-mg)dz = -mg(z_B - z_A)$$

Nel caso della forza peso, a differenza della forza d'attrito, possiamo notare che il lavoro non dipende dal percorso compiuto ma dipende solo dagli estremi del percorso, in particolare solo dalle coordinate lungo l'asse verticale. Vedremo in seguito che le forze per cui vale ciò vengono definite *conservative*.

5.3.3 Lavoro della forza elastica

Come abbiamo visto qualche capitolo fa, un corpo attaccato a una molla può compiere un moto armonico oscillatorio. La forza elastica compie quindi un lavoro lungo tutto il moto, che possiamo calcolare.

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{f}_{el} \cdot d\vec{s} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx = -k \int_{x_i}^{x_f} xdx = -\frac{k}{2}(x_f^2 - x_i^2)$$

Notiamo che, esattamente come la forza peso, anche in questo caso il lavoro dipende solo dagli estremi dello spostamento.

5.4 Forze conservative ed energia potenziale

5.4.1 Forza conservativa

Diamo immediatamente la definizione di forza conservativa.

Definizione (Forza conservativa)

Si definisce *forza conservativa* una forza il cui lavoro non dipende dal percorso compiuto ma solo dalle posizioni iniziale e finale della traiettoria, ovvero:

$$W_{A,B} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = g(A,\, B)$$

Dove g è una funzione.

Un altro modo per definire le forze conservative è quello di dire che, su un qualsiasi percorso chiuso, il lavoro è nullo, ovvero:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Possiamo studiare meglio questo caso. Prendiamo un percorso chiuso, e dividiamolo in un percorsi diversi tra loro, uno che va nel verso $\overline{AB}$, l'altro che va nel verso opposto $\overline{BA}$. Per comodità, li indicheremo con (I) e (II) . Avremo quindi che:

$$\begin{aligned} \oint \vec{f} \cdot d\vec{s} = \text{(I)} \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} + \text{(II)} \int_B^A \vec{f} \cdot d\vec{s} = 0 \\ \text{(I)} \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\text{(II)} \int_B^A \vec{f} \cdot d\vec{s} \\ \text{(I)} \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \text{(II)} \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

Quindi è riconfermato che il lavoro dipende solo dagli estremi e non dal percorso compiuto.

5.4.2 Energia potenziale

Analizziamo il calcolo del lavoro di una forza conservativa. Nel caso in cui si volesse calcolare il lavoro da un punto P_0 a un punto B , preso un punto A qualsiasi, allora varrà la relazione:

$$W(P_0,\, B) =: W(P_0,\, A) + W(A,\, B)$$

Perché sappiamo che, per le forze conservative, il lavoro dipende solo dai punti estremi del percorso. Dall'espressione precedente si ricava immediatamente:

$$W(A,\, B) = W(P_0,\, B) - W(P_0,\, A) = g(A,\, B) = g(P_0,\, B) - g(P_0,\, A)$$

Dove g è una funzione, che chiameremo **funzione potenziale**. Dalla precedente ricaviamo che:

$$W(A,\, B) = g(B) - g(A)$$

Ovvero un altro modo di esprimere il lavoro solo in funzione degli estremi.

Definizione (Energia potenziale)

Si definisce energia potenziale E_p di una forza *conservativa*:

$$E_p = -g$$

Da questa definizione possiamo esprimere il lavoro di una forza conservativa come:

$$W(A,\, B) = -\Delta E_p = -[E_p(B) - E_p(A)]$$

Ovvero il lavoro equivale all'opposto della differenza di energia potenziale.
Adesso sfrutteremo la definizione di energia potenziale per calcolarla in caso di forze conservative note, ricordando che bisogna sempre definire un punto dove l'energia potenziale vale zero.

Energia potenziale della forza peso

Come abbiamo visto nel precedente capitolo, il lavoro della forza peso vale:

$$W = \int_A^B \vec{P} \cdot d\vec{s} = -mg(z_B - z_A) = -(mgz_B - mgz_A)$$

Abbiamo appena visto che il lavoro può essere anche scritto come:

$$W = -\Delta E_p$$

L'energia potenziale della forza peso è quindi:

$$E_p = mgz$$

dove abbiamo scelto il terreno come livello di riferimento in cui l'energia potenziale vale zero. Questa è una convenzione naturale, ma non è l'unica. Difatti il livello zero può essere scelto a piacimento, non influisce sul lavoro della forza peso perché esso è definito dalla variazione di energia potenziale, quindi la costante arbitraria scompare.

Energia potenziale elastica

Nel precedente capitolo abbiamo visto come anche il lavoro della forza elastica dipendesse solo dagli estremi; esso vale:

$$W = \int_A^B \vec{f}_{el} \cdot d\vec{s} = -\frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2)$$

È immediato definire l'energia potenziale della forza elastica come:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Anche qui conveniamo che l'energia potenziale della molla sia nulla nell'estremo libero di una molla a riposo. Nella precedente formula x indica quindi la distanza di un estremo dal punto di equilibrio della molla.

Alla luce di questi esempi possiamo dare una nuova definizione di energia potenziale. L'energia potenziale di un corpo è il lavoro eventuale delle forze conservative applicate al corpo, cioè il lavoro che le forze conservative compirebbero in relazione a un eventuale spostamento del corpo dalla posizione iniziale al livello zero di riferimento. Attenzione a non definire l'energia potenziale come il lavoro che le forze "devono" compiere per spostare il corpo nella posizione di riferimento. Se, per esempio, un ascensore si trova al piano terra, e noi scegliamo come livello zero di riferimento per l'energia potenziale il terzo piano, la definizione ci costringerebbe a dire che l'energia potenziale dell'ascensore è il lavoro che la forza di gravità deve compiere per sollevarlo fino al terzo piano, il che stona un po'.

5.4.3 Conservazione dell'energia meccanica

Abbiamo studiato due relazioni del lavoro, una volta come differenza di energia cinetica, adesso sfruttando l'energia potenziale. Si possono relazionare i due casi:

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p$$

cioé

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B}$$

da cui

$$E_{k,A} + E_{p,A} = E_{k,B} + E_{p,B}$$

dove A e B indicano due configurazioni diverse in cui si può trovare il punto materiale. Quindi se su un punto materiale agiscono solo forze conservative, o se le eventuali forze non conservative non compiono lavoro, la somma di energia cinetica ed energia potenziale, detta anche *energia meccanica* del punto, si conserva. Vediamo cosa succede invece se agiscono anche forze non conservative. Il lavoro totale è uguale alla somma delle forze conservative W_c e delle forze non conservative W_{nc} :

$$W = W_c + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} + W_{nc} = E_{k,B} - E_{k,A}$$

da cui, indicando con E_m l'energia meccanica del punto materiale

$$W_{nc} = E_{m,B} - E_{m,A}$$

Le forze non conservative causano una variazione di energia meccanica del punto materiale. Una classe particolare di forze non conservative sono le forze di attrito.

In molti casi esse dissipano l'energia posseduta da un corpo. Per esempio, se un blocco scivola lungo un pavimento con attrito, una parte dell'energia cinetica del blocco rimane nel blocco, mentre una parte viene dissipata, cioè passa dal blocco al pavimento, diventando energia termica del pavimento, e dal blocco all'aria, propagandosi sotto forma di onde sonore (lo sentiamo il blocco che scivola). Tuttavia, non sempre l'attrito ha ruolo di forza dissipatrice. Se una sfera rotola senza strisciare è perché esiste una forza di attrito statico, che agisce sul punto di contatto, che le impedisce di slittare. Poiché il punto di contatto è istantaneamente fermo, la forza di attrito in questo caso non compie lavoro. Questo è il motivo per cui abbiamo sottolineato il fatto che l'energia meccanica si può conservare anche se agiscono forze non conservative.

Facciamo un ultima considerazione sul lavoro. Al compimento di lavoro si accompagnano due fenomeni: trasferimento e trasformazione di energia. Illustriamoli con degli esempi.
Se diamo un calcio a un pallone, una parte di energia che si trovava inizialmente nel nostro corpo, che abbiamo assunto col cibo, si trova ora sotto forma di energia cinetica nel pallone. In questo caso il lavoro è un trasferimento di energia dal nostro corpo al pallone.
Invece, quando la Terra fa cadere un corpo, certamente compie lavoro sul corpo, perché questo si sposta, ma non c'è nessun trasferimento di energia dalla Terra al corpo. E' vero sì che il corpo acquista energia cinetica che prima non aveva, ma perde la stessa quantità sotto forma di energia potenziale. Questa volta non c'è trasferimento ma trasformazione di energia potenziale in energia cinetica.
Il compimento di lavoro non implica quindi il trasferimento di energia, come erroneamente molti sostengono, definendo anzi il lavoro come energia in transito. Per noi la definizione di lavoro non è altro che la seguente, già introdotta nel capitolo precedente:

Definizione (Lavoro)

Una forza F compie lavoro quando agisce su un corpo (punto materiale, corpo esteso...) che si sposta percorrendo una traiettoria qualsiasi, purché tale traiettoria non sia perpendicolare alla direzione della forza. Per un percorso da A a B il lavoro vale:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

5.4.4 Dall'energia potenziale alla forza

Mettiamo caso di avere nota l'espressione dell'energia potenziale, e vogliamo ricavare la forza che l'ha generata. Ricordiamo un caso studiato nella definizione di lavoro:

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come $dW = -dE_p$, quindi possiamo scrivere:

$$\vec{f} \cdot d\vec{s} = -dE_p \quad \vec{f} = -\frac{dE_p}{d\vec{s}}$$

Attenzione: questo calcolo non è banale come sembra. L'energia potenziale è infatti uno *scalare*, mentre la forza è una grandezza *vettoriale*. Avremo quindi la derivata di uno scalare rispetto a un vettore. In questi casi, si usa la notazione di **gradiente** e **derivata parziali**. Una derivata parziale si usa quando è presente una funzione in più variabili e la si vuole derivare solo rispetto ad una di esse: si eseguirà la derivata rispetto a quella variabile considerando le altre variabili presenti come costanti. Per fare un esempio:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y 2\pi z) = 2xy2\pi z$$

Nulla di estraneo quindi. Il **gradiente** invece è un vettore dello spazio con coordinate le derivate parziali della funzione presa, ovvero:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right)$$

Riprendendo il discorso dell'energia potenziale, avremo quindi che:

$$\vec{f} = -\frac{dE_p}{d\vec{s}} = -\nabla E_p$$

Possiamo scrivere la forza in coordinate cartesiane, semplificando l'espressione precedente:

$$\vec{f} = \begin{cases} f_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \\ f_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \\ f_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}$$

Prendiamo l'esempio della forza peso: abbiamo che $U = mgz$, e vogliamo ricavarne la forza. Avremo quindi che:

$$\vec{P} = \begin{cases} f_x = -\frac{\partial (mgz)}{\partial x} = 0 \\ f_y = -\frac{\partial (mgz)}{\partial y} = 0 \\ f_z = -\frac{\partial (mgz)}{\partial z} = -mg \end{cases}$$

Da cui $\vec{P} = (0,\, 0,\, -mg)$, coerente con la formula della forza peso che conosciamo.

5.5 Considerazioni conclusive sull'energia

Alla luce di quanto abbiamo visto nei capitoli precedenti, vogliamo dare finalmente una definizione di energia. Si legge dappertutto (libri, enciclopedie...) che l'energia è la capacità di un corpo di compiere lavoro. Tale affermazione è falsa, perché, in generale, non esiste nessuna relazione tra l'energia posseduta da un corpo e il lavoro che esso può compiere. Se consideriamo poi il proliferare delle forme di energia (elettrica, termica, sonora), ci accorgiamo che in realtà esse non sono altro che energia cinetica ed energia potenziale. In Termodinamica vedremo che l'energia termica di un corpo non è altro che l'energia cinetica delle molecole che lo compongono, dovuta al loro moto disordinato in tutte le direzioni. L'energia sonora non è altro che energia cinetica delle molecole d'aria che vengono messe in vibrazione, l'energia elettrica è una forma di energia potenziale, come quella elastica e gravitazionale. Quindi esistono, in fisica classica, due sole forme di energia: l'energia cinetica e l'energia potenziale. Ricordiamo qui le loro definizioni.

Definizione (Energia cinetica)

L'energia cinetica E_k di un punto materiale di massa m che si muove con velocità v è

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Definizione (Energia potenziale)

L'energia potenziale di un punto materiale è il lavoro eventuale delle forze conservative, cioè il lavoro che le forze conservative applicate ad esso compirebbero qualora il punto si spostasse dalla sua posizione iniziale alla posizione zero di riferimento.

Questa è la nostra definizione di energia di un punto materiale, distinguendo tra le due forme con cui si può presentare. E se ci sono più punti? Nel capitolo su sistemi di punti vedremo che l'energia di molti punti materiali non è altro che la somma delle energia di ciascun punto.
Per il teorema dell'energia cinetica segue che l'energia cinetica di un punto materiale che si muove con velocità v è il lavoro che le forze esterne al punto hanno compiuto per portarlo dallo stato di quiete al moto con velocità v . Quindi entrambe le definizioni fanno riferimento al lavoro delle forze esterne al corpo, non al lavoro compiuto dal corpo. Ecco perché abbiamo detto all'inizio che in generale non c'è nessuna relazione tra l'energia posseduta da un corpo e il lavoro che esso può compiere.
Si noti poi che la definizione di energia e quella di lavoro sono indipendenti. Ricordiamo qui ancora una volta la definizione di lavoro.

Definizione (Lavoro)

Una forza $\vec{F}$ compie lavoro quando agisce su un corpo (punto materiale, corpo esteso...) che si sposta percorrendo una traiettoria qualsiasi, purché tale traiettoria non sia perpendicolare alla direzione della forza. Per un percorso da A a B il lavoro di $\vec{F}$ vale:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

L'energia quindi, almeno in fisica classica, non ha nulla di misterioso come molti sostengono. E' vero, si conserva, ma un mucchio di altre cose si conservano, la quantità di moto, il momento angolare (si veda il capitolo sulla dinamica rotazionale) ecc.

Capitolo 6

Oscillatori armonici

6.1 Oscillatore armonico

L'*oscillatore armonico semplice* è un sistema fisico il cui stato dinamico è descritto dall'equazione differenziale:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

dove x è una grandezza fisica che oscilla con legge armonica.

I fenomeni periodici sono frequentissimi in natura. Nei capitoli precedenti abbiamo visto alcuni esempi: il pendolo (semplice e composto) e il sistema molla-punto materiale. Per il pendolo, il moto è armonico semplice solo per piccoli spostamenti dalla verticale. Se gli angoli sono grandi il moto è ancora periodico, ma non armonico. Allo stesso modo, la legge di Hooke è un'approssimazione del comportamento di una molla, tanto migliore quanto gli allungamenti sono piccoli. E' quindi importante rendersi conto che la condizione di oscillatore armonico semplice si verifica per un sistema che si allontana di poco da una posizione di equilibrio.

Con i metodi dell'Analisi Matematica si può dimostrare che la soluzione più generale dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico semplice è:

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$

che può essere riscritta come

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

ponendo $a = A \cos \phi$ e $b = A \sin \phi$. L'ampiezza A e la fase ϕ sono determinate dalle condizioni iniziali del moto.

Può capitare che in alcune situazioni ci si trovi di fronte all'equazione differenziale non omogenea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = f(t)$$

dove $f(t)$ è una qualsiasi funzione del tempo. In questo caso la soluzione più generale è:

$$x(t) = a \sin \omega t + b \cos \omega t + x_p(t)$$

dove $x_p(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea. Un esempio chiarirà le idee. Consideriamo una molla appesa verticalmente al soffitto, a cui è appesa una massa m . La molla viene tirata leggermente e lasciata andare. Vogliamo trovare la legge oraria del moto. Per la seconda legge della dinamica abbiamo che:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx$$

ponendo $\omega^2 = k/m$ ci riconduciamo all'equazione differenziale non omogenea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = g$$

Una soluzione particolare di questa equazione è $x_p = \frac{mg}{k}$. Dalle condizioni iniziali abbiamo che:

$$x(0) = \frac{2mg}{k} = A \sin \phi + \frac{mg}{k}; \qquad v(0) = 0 = \omega A \cos \phi$$

Quindi la legge oraria è:

$$x(t) = \frac{mg}{k}(1 + \cos \omega t)$$

6.2 Oscillatore armonico smorzato e forzato

Nel precedente capitolo abbiamo studiato il caso di un oscillatore armonico *ideale*, ovvero senza alcun tipo di forzature o forza resistenti che ne alterino il comportamento. Studiamo qui questi due differenti casi.

6.2.1 Oscillatore armonico smorzato

Il caso di riferimento è una molla poggiata su un piano orizzontale, privo di attrito, a cui è connessa una massa che si muove di moto oscillatorio come visto in un precedente capitolo. Abbiamo studiato anche la forza di attrito viscoso, dovuta alla resistenza dell'aria. Questi due casi possono legarsi tra loro: una molla in orizzontale, senza attriti col piano, incontra nel suo moto una certa resistenza dell'aria. Una considerazione preliminare da fare è che la resistenza dell'aria lungo il moto orizzontale è *diversa* da quella lungo il moto verticale, e questo è dovuto alle caratteristiche dell'atmosfera. Possiamo tuttavia trattare i due casi come se fossero idealmente uguali, con la resistenza dell'aria descritta da $f_{\text{aria}} = -\mathrm{B}v$.

Per trattare quindi la molla smorzata dall'aria, studiamo le forze agenti sul punto materiale:

$$
\begin{aligned}
\vec{f}_{tot} &= \vec{f}_{\text{molla}} + \vec{f}_{\text{aria}} \\
f_{tot} &= -kx - \mathrm{B}v \\
ma &= -kx - \mathrm{B}v \\
m\frac{d^2x}{dt^2} &= -kx - \mathrm{B}\frac{dx}{dt} \\
m\ddot{x} + \mathrm{B}\dot{x} + kx &= 0
\end{aligned}
$$

Si ottiene quindi un'equazione differenziale del secondo ordine omogenea. Per un migliore studio del problema, applichiamo dei cambi di variabile:

$$
\begin{cases}
\gamma = \frac{\mathrm{B}}{2m} \\
\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}
\end{cases}
$$

Otteniamo quindi l'equazione di un oscillatore armonico smorzato, ovvero:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Si può studiare una soluzione al problema; sfruttando le conoscenze delle equazioni differenziali, si può dimostrare che la funzione:

$$x(t) = x_0\, e^{-\gamma t}\, \sin(\omega t)$$

È soluzione dell'equazione differenziale scritta sopra. Calcolando le derivate prime e seconde, sostituendole nell'equazione dell'oscillatore smorzato, otterremo che:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Ovvero:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Una breve analisi del risultato ottenuto. In primis, possiamo notare che $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ equivale alla *pulsazione assoluta* dell'oscillatore armonico, ovvero quella ottenuta nel caso in cui non è presente una qualsiasi resistenza da parte dell'aria. Inoltre, se poniamo $\gamma \to 0$, che equivale a porre $\mathrm{B} \to 0$, otteremo che $e^{-\gamma t} = 1$, quindi la soluzione del problema sarà:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t)$$

Concorde col caso in cui non è presente attrito nell'aria. Si noti che, in questo caso, quando $\gamma \to 0$ avremo che $\omega \to \omega_0$, ovvero la pulsazione tende alla pulsazione assoluta dell'oscillatore.

Calcolo della perdita di energia

Sappiamo che l'energia potenziale di una molla equivale a

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Nel nostro caso, però, la x è variabile, quindi in quella espressione andrebbe sostituita la funzione $x(t)$ a x . Quel che però vogliamo calcolare è la *perdita di energia* ad ogni ciclo, ovvero: quanta energia perde il sistema dopo ogni oscillazione completa? Per questo motivo, facciamo partire il punto materiale da uno degli estremi, e calcoliamo l'energia quando, dopo un'oscillazione completa, è tornato in quel punto. Agli estremi, il valore di $x(t)$ non risente del contributo della funzione seno, poiché, in quel punto, esso è uguale a 1 . Avremo quindi che:

$$x(t) = x_0\, e^{-\gamma t}$$

Valida *solo per i punti di estremo* dopo un'oscillazione completa. Possiamo sostituirla nella formula dell'energia potenziale, che, agli estremi di una molla, coincide con l'energia totale posseduta dal punto; avremo quindi che:

$$E(t) = \frac{1}{2}k\left(x_0\, e^{-\gamma t}\right)^2$$
$$E(t) = \frac{1}{2}kx_0^2\, e^{-2\gamma t}$$

Notiamo immediatamente che, l'energia del sistema, è una funzione del tempo. Chiamato T il periodo di oscillazione del sistema, avremo che:

$$\Delta E = E(t+T) - E(t)$$

Svogliamo i calcoli:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= E(t+T) - E(t) \\
&= \frac{1}{2}kx_0^2\left(e^{-2\gamma(t+T)} - e^{-2\gamma t}\right) \\
&= \frac{1}{2}kx_0^2\left(e^{-2\gamma t}\cdot e^{-2\gamma T} - e^{-2\gamma t}\right) \\
&= \frac{1}{2}kx_0^2\, e^{-2\gamma t}\left(e^{-2\gamma T} - 1\right) \\
\Delta E &= E(t)\left(e^{-2\gamma T} - 1\right)
\end{aligned}$$

Studiamo adesso un caso particolare, quello in cui $2\gamma << 1$; questo caso corrisponde ad una bassa resistenza dell'aria. Possiamo sviluppare in serie di Taylor per ottenere:

$$\Delta E = E(t)(1 - 2\gamma T - 1) = E(t)(-2\gamma T)$$

Il nostro obiettivo era calcolare l'energia persa ad ogni ciclo, quindi avremo che:

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = 2\gamma T$$

Che è la perdita di energia *percentuale* del sistema *ad ogni ciclo compiuto*. Un'importante considerazione che possiamo fare è che questa **non** dipende dal ciclo, ma è costante, ovvero **il sistema perde la stessa quantità di energia dopo ogni ciclo**. Questo risultato ci indica che, per esempio, un'onda sonora (che vedremo presto essere un'oscillatore) perde energia espandendosi nello spazio. È per questo motivo che un suono o un rumore vengono percepiti con più forza quando si è in prossimità della sorgente rispetto a quando si è ad una notevole distanza. Infatti, se il professore in aula urla, gli studenti seduti alle prime file sentiranno un suono molto forte e quasi insopportabile, mentre quelli seduti in piccionaia sentiranno un suono forte ma comunque sopportabile.

6.2.2 Oscillatore armonico forzato

Il caso dell'oscillatore armonico forzato è strettamente legato all'esempio delle onde sonore che si propagano nell'aria; queste, incontrando la resistenza dell'aria, vengono via via smorzate, fino ad affievolirsi ad opportune distanze. Il timpano umano, che si comporta da ricettore, funziona anch'esso da oscillatore armonico, solo che, invece di produrre l'onda, la riceve. Per riceverla, deve quindi essere stimolato da una forza esterna, che sia chiama comunemente **forzante**. Quando il ricettore, ovvero il timpano, oscilla alla stessa frequenza dell'onda esterna, ovvero è condizione di risonanza, possiamo percepire il suono, che viene elaborato dal cervello.

Studiamo un modello ideale che rappresenti questa situazione. Abbiamo una molla posta nelle stesse condizioni del paragrafo precedente, con l'aggiunta di una forza esterna di modulo $F\sin(\Omega t)$ che, ad ogni ciclo, agisce sulla molla, forzando l'oscillazione ad essere completa, cosa che, se non vi fosse alcuna forza esterna, non si presenterebbe, causando un'oscillazione *smorzata*. Lo studio dinamico delle forze agenti sul punto materiale all'estremo della molla è quindi:

$$\begin{aligned}\vec{f}_{tot} &= \vec{f}_{\text{molla}} + \vec{f}_{\text{aria}} + \vec{f}_{\text{esterna}}\\ m\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{B}\frac{dx}{dt} + kx &= F\sin(\Omega t)\end{aligned}$$

In questo caso, Ω rappresenta la pulsazione della forza esterna, diversa dalle due pulsazioni ω e ω_0 che rappresentano, rispettivamente, la pulsazione finale del sistema e quella assoluta del sistema in condizione ideali senza resistenze o forzanti. Riscriviamo l'equazione scegliendo il precedente cambio di variabili, con una aggiunta:

$$\begin{cases} \gamma = \frac{\mathrm{B}}{2m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ A = \frac{F}{m} \end{cases}$$

Otteniamo quindi l'equazione seguente, che è una equazione differenziale del secondo ordine non omogenea:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\sin(\Omega t)$$

La soluzione di questa equazione è fornita dalla soluzione generale, quando il termine a destra dello è nullo, che abbiamo ricavato sopra, aggiunta a una soluzione particolare del problema, che si può dimostrare essere:

$$x(t) = x_0 \,\sin(\Omega t - \delta)$$

Prima di parlare del cambio di variabili, è importante considerare questo termine; la soluzione generale presentava un termine $e^{-\gamma t}$ che, quando t raggiunge valori molto grandi, annulla il contributo del termine. Resta quindi solo la soluzione particolare, qui sopra scritta, a descrivere efficientemente il sistema dopo un dato periodo di tempo. In questa soluzione, i cambi di variabile eseguiti sono stati:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma\Omega^2}} \\ \delta = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right) \end{cases}$$

Il grafico di x_0 in funzione di t è una semplice sinusoide, con valori compresi tra $\pm x_0$. L'interessante è invece graficare x_0 in funzione di Ω : il grafico assumerà un andamento completamente diverso: presenterà un picco nel caso in cui $\Omega \to \omega_o$.

Come nel caso precedente, in cui abbiamo calcolato la perdita di energia, possiamo qui calcolare il diminuire della frequenza di pulsazione, che sarà uguale a (ci esoneriamo dai calcoli):

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{2\gamma}{\omega_0}$$

6.3 Oscillatori accoppiati

Un sistema di oscillatori accoppiati presenta due oscillatori armonici che sono soggetti anche a una forza di mutua interazione. L'esempio più semplice che possiamo fare è quello di due punti collegati attraverso due molle a dei supporti fermi, ad esempio un muro, che sono a loro volta collegati tra loro da un'altra molla. Per semplicità, consideriamo le due masse uguali, ovvero $m_1 = m_2 = m$, le costanti elastiche delle due molle agli estremi uguali, pari a k , e la costante della molla centrale k_{12} essere $k_{12} << k$.

Per definire le posizioni dei corpi sfruttiamo le lunghezze a riposo delle due molle: chiameremo x_1 la distanza del corpo 1 dalla lunghezza a riposo della molla 1, mentre x_2 è la distanza del corpo 2 dalla lunghezza a riposo della molla 2. Considerato l'effetto della molla centrale, avremo che il corpo di destra sarà spostato dalla lunghezza a riposo verso il centro, quindi verso destra, mentre il corpo di sinistra sarà spostato verso sinistra in direzione del centro. Preso un sistema di riferimento rettilineo e parallelo e al piano, crescente da sinistra verso destra, avremo che:

$$\begin{aligned} x_1 &\text{ allungamento corpo 1} \\ -x_2 &\text{ allungamento corpo 2} \end{aligned}$$

L'allungamento della molla centrale sarà quindi pari a $x_2 - x_1$. Il sistema che si ottiene è un sistema a due gradi di libertà.

Le forze che agiscono sui corpi sono invece:

$$
\begin{aligned}
&f = -kx_1 \text{ forza molla 1}\\
&f = -kx_2 \text{ forza molla 2}\\
&f = k_{12}(x_2 - x_1) \text{ forza molla centrale sul corpo 1}\\
&f = k_{12}(x_2 - x_1) \text{ forza molla centrale sul corpo 2}
\end{aligned}
$$

Otteniamo il seguente sistema di equazioni differenziali:

$$
\begin{cases}
m\frac{d^2x_1}{dt^2} = \underbrace{-kx_1}_{\substack{\text{forza di}\\ \text{richiamo}}} + \underbrace{k_{12}(x_2 - x_1)}_{\substack{\text{forza di}\\ \text{interazione}}}\\
m\frac{d^2x_2}{dt^2} = \overbrace{-kx_2} + \overbrace{k_{12}(x_2 - x_1)}
\end{cases}
$$

Esplicitando i termini otteniamo:

$$
\begin{cases}
\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k+k_{12}}{m}x_1 = \frac{k_{12}}{m}x_2 \; [1]\\
\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k+k_{12}}{m}x_2 = \frac{k_{12}}{m}x_1 \; [2]
\end{cases}
$$

In questo due sistema sono presenti due oscillatori *accoppiati*, in cui il moto di uno è in funzione del moto dell'altro. Un modo per disaccoppiarli è attraverso il *metodo dei moti normali*: si trovano due moti e si fa in modo che le equazioni degli oscillatori siano combinazione lineare dei moti normali. Per fare ciò definiamo due nuovi termini:

$$
x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad y = \frac{x_1 - x_2}{2}
$$

A questo punto, compiamo due operazioni. Prima sommiamo le equazioni [1] e [2] e le dividiamo per 2; dopo le sottraiamo e le dividiamo nuovamente per due, ottenendo le equazioni del moto di x e y :

$$
\begin{cases}
\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\\
\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k+2k_{12}}{m}y = 0
\end{cases}
$$

Notiamo immediatamente che sono due oscillatori *disaccoppiati*, e ne conosciamo la soluzione:

$$
\begin{aligned}
x = x_0 \sin(\omega_o t + \varphi_0) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\\
y = y_0 \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi}) \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}
\end{aligned}
$$

Ricordando le definizioni di x e y :

$$
\begin{aligned}
x_1 = x + y = x_0 \sin(\omega_o t + \varphi_0) + y_0 \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi})\\
x_2 = x - y = x_0 \sin(\omega_o t + \varphi_0) - y_0 \sin(\bar{\omega} t + \bar{\varphi})
\end{aligned}
$$

I moti $x(t)$ e $y(t)$ sono i due moti normali; come possiamo notare, x_1 e x_2 sono due combinazioni lineari dei moti normali.

Un'osservazione rapida che possiamo fare è che, se $y_0 = 0$ la molla centrale non si allunga, ma i due corpi oscillano parallelamente.

Finiamo di studiare il caso, semplificando il problema. Poniamo quindi: $\varphi = \bar{\varphi} = 0$ e $x_0 = y_0$, con $x_2 = 0$ al tempo $t = 0$. Le due equazioni diventano così:

$$
\begin{aligned}
x_1 = x + y = x_0 \sin(\omega_o t+) + x_0 \sin(\bar{\omega} t+) \\
x_2 = x - y = x_0 \sin(\omega_o t+) - x_0 \sin(\bar{\omega} t+)
\end{aligned}
$$

Utilizzando le regole di prostaferesi terminiamo finalmente lo studio ottenendo le due equazioni finali del moto:

$$
\begin{aligned}
x_1 = 2x_0 \sin\left(\frac{\omega_0 + \bar{\omega}}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - \bar{\omega}}{2} t\right) \\
x_2 = 2x_0 \sin\left(\frac{\omega_0 - \bar{\omega}}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 + \bar{\omega}}{2} t\right)
\end{aligned}
$$

Capitolo 7

Formulari

7.1 Formulario del punto materiale

7.1.1 Cinematica

Moto rettilineo

$$a(t) = \text{ cost}$$
$$v(t) = v_0 + at$$
$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Moto circolare

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$
$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Moto parabolico

$$x(t) = (v_0 \cos\theta_0)t$$
$$y(t) = (v_0 \sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$x_{\text{gittata}} = \sin(2\theta_0)\frac{v_0^2}{g}$$
$$y(x) = \tan\theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta_0}$$
$$y_{\text{quota max}} = \frac{3}{2}\sin^2\theta_0 \, \frac{v_0^2}{g}$$

Trasformazioni di Galileo

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - v_{0x}t \\ y' = y - v_{0y}t \\ z' = z - z_{0x}t \end{cases} \quad \begin{cases} v'_x = v_x - v_{0x} \\ v'_y = v_y - v_{0y} \\ v'_x = v_z - v_{0z} \end{cases} \quad \begin{cases} a'_x = a_x \\ a'_y = a_y \\ a'_z = a_z \end{cases}$$

7.1.2 Dinamica

$$\vec{f}_{tot} = \sum_i^n \vec{f}_i = ma$$

Piano inclinato

$$\begin{aligned} &a = g \sin\theta \\ &v = (g \sin\theta)t + v_0 \\ &s = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(g \sin\theta)t^2 \end{aligned} \quad L = \frac{h}{\sin\theta} \quad \begin{cases} v_0 = 0 \\ s_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &t = \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2\theta}} \\ &v = g \sin\theta \sqrt{\frac{2h}{g \sin^2\theta}} \end{aligned}$$

Quantità di moto e impulso

$$\vec{q} = m\vec{v}$$
$$\vec{f} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$
$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} f dt \qquad < \vec{f} > \Delta t = \Delta\vec{q}$$

Momento della forza e momento angolare

$$\vec{\tau} = \vec{r} \wedge \vec{f}$$
$$\vec{j} = \vec{r} \wedge \vec{q} = \vec{r} \wedge m\vec{v}$$
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{j}}{dt}$$

Pendolo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta(t)$$

$$\theta(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = \sqrt{\frac{l}{g}}2\pi$$

Attrito

$$F < \mu_s N \quad F = \mu_d N$$

Forza elastica

$$f = -kx$$

7.1.3 Energia e Lavoro

$$L = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad L = \Delta K$$

7.1.4 Pendolo con lavoro

$$v_{max}^2 = 2lg(1 - \cos\theta_0)$$

Moto di una molla

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v_{max} = \Delta\sqrt{\frac{k}{m}} = A\omega$$

Energia Potenziale

$$U_{peso} = mgh \quad U_{molla} = \frac{1}{2}kx^2 \quad U_{grav} = -G\frac{mM}{r}$$

$$\vec{f} = -\nabla U \quad \begin{cases} f_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ f_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ f_< = -\frac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$$

7.1.5 Oscillatori armonici

Smorzato

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\mathrm{B}}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$
$$\gamma = \frac{\mathrm{B}}{2m} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$
$$x(t) = x_0\, e^{-\gamma t}\sin(\omega t)$$
$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = 2\gamma T$$

Forzato

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A\sin(\Omega t)$$
$$x(t) = x_0\sin(\Omega t - \delta)$$
$$\begin{cases} x_0 = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma\Omega^2}} \\ \delta = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}\right) \end{cases}$$

Capitolo 8

Fonti per testo e immagini; autori; licenze

8.1 Testo

- **Corso:Meccanica del punto materiale/Introduzione/Cos'è la meccanica newtoniana** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Introduzione/Cos'{}%C3%A8_la_meccanica_newtoniana?oldid=29179 *Contributori:* Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Cinematica del punto materiale/Cinematica del Punto** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto_materiale/Cinematica_del_Punto?oldid=29135 *Contributori:* Sofia, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Cinematica del punto materiale/Moto rettilineo** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto_materiale/Moto_rettilineo?oldid=49408 *Contributori:* Roopi, Sofia, Toma.luca95, Ruben, FiammettaPagano, Bianca Pinolini, Davide Ghilardi, Dan, WikiToBot, Move page script, Hal9000, Albatro74 e Anonimo: 1
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Cinematica del punto materiale/Moto circolare** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto_materiale/Moto_circolare?oldid=47946 *Contributori:* Roopi, Sofia, Toma.luca95, FiammettaPagano, Bianca Pinolini, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Cinematica del punto materiale/Moto armonico** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto_materiale/Moto_armonico?oldid=47914 *Contributori:* Roopi, Sofia, Toma.luca95, V.e.padulano, FiammettaPagano, J.motta1, Linda, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Cinematica del punto materiale/Moto parabolico dei corpi** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto_materiale/Moto_parabolico_dei_corpi?oldid=29141 *Contributori:* Sofia, J.motta1, Bianca Pinolini, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Primo e secondo principio della dinamica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Primo_e_secondo_principio_della_dinamica?oldid=29163 *Contributori:* Roopi, Sofia, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Forza peso e forze vincolari** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Forza_peso_e_forze_vincolari?oldid=48767 *Contributori:* Sofia, Ruben, Dan, WikiToBot, Move page script e Axis96

- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Terzo principio della dinamica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Terzo_principio_della_dinamica?oldid=29167 *Contributori:* Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Forza d'attrito radente** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Forza_d'attrito_radente?oldid=29151 *Contributori:* Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Forza d'attrito viscoso** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Forza_d'attrito_viscoso?oldid=29153 *Contributori:* Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Forza elastica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Forza_elastica?oldid=29155 *Contributori:* Roopi, Sofia, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Forza centripeta** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Forza_centripeta?oldid=43890 *Contributori:* Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Quantità di moto e impulso** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Quantit%C3%A0_di_moto_e_impulso?oldid=47795 *Contributori:* Sofia, Toma.luca95, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Momento angolare** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Momento_angolare?oldid=47923 *Contributori:* Sofia, Toma.luca95, Ruben, FiammettaPagano, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Dinamica del punto materiale/Pendolo semplice** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Dinamica_del_punto_materiale/Pendolo_semplice?oldid=49451 *Contributori:* Valsdav, Sofia, Ruben, Lucieferr, Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Moti relativi/Teorema delle velocità relative** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Moti_relativi/Teorema_delle_velocit%C3%A0_relative?oldid=48761 *Contributori:* Ruben, WikiToBot, Move page script e Axis96
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Moti relativi/Teorema delle accelerazioni relative** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Moti_relativi/Teorema_delle_accelerazioni_relative?oldid=49452 *Contributori:* Ruben, WikiToBot, Move page script, MauroMastro, Rp60 e Anonimo: 1
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Moti relativi/Relatività galileiana** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Moti_relativi/Relativit%C3%A0_galileiana?oldid=39769 *Contributori:* Ruben, Dan e WikiToBot
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Moti relativi/Trasformazioni di Galileo** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Moti_relativi/Trasformazioni_di_Galileo?oldid=48748 *Contributori:* Dan
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Lavoro ed energia/Energia cinetica e lavoro** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Lavoro_ed_energia/Energia_cinetica_e_lavoro?oldid=29187 *Contributori:* Sofia, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Lavoro ed energia/Energia del pendolo** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Lavoro_ed_energia/Energia_del_pendolo?oldid=49453 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Lavoro ed energia/Lavoro della forze di attrito, della forza peso e della forza elastica** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Lavoro_ed_energia/Lavoro_della_forze_di_attrito%

2C_della_forza_peso_e_della_forza_elastica?oldid=29193 *Contributori:* Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script

- **Corso:Meccanica del punto materiale/Lavoro ed energia/Forze conservative ed energia potenziale** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Lavoro_ed_energia/Forze_conservative_ed_energia_potenziale?oldid=49455 *Contributori:* Toma.luca95, Ruben, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Lavoro ed energia/Considerazioni conclusive sull'energia** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Lavoro_ed_energia/Considerazioni_conclusive_sull'energia?oldid=47947 *Contributori:* Toma.luca95, Ruben, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Oscillatori armonici/Oscillatore armonico** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Oscillatori_armonici/Oscillatore_armonico?oldid=29203 *Contributori:* Roopi, Ruben, Dan, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Oscillatori armonici/Oscillatore armonico smorzato e forzato** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Oscillatori_armonici/Oscillatore_armonico_smorzato_e_forzato?oldid=49457 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Oscillatori armonici/Oscillatori accoppiati** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Oscillatori_armonici/Oscillatori_accoppiati?oldid=48771 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Axis96
- **Corso:Meccanica del punto materiale/Formulari/Formulario del punto materiale** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Formulari/Formulario_del_punto_materiale?oldid=49493 *Contributori:* Dan, WikiToBot, Move page script e Rp60

8.2 Immagini

- **File:A(t).jpg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/9/93/A%28t%29.jpg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Ascissa_curvilinea.jpg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/3/3a/Ascissa_curvilinea.jpg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Diagramma_v(t).jpeg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/6/65/Diagramma_v%28t%29.jpeg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Diagramma_x(t).jpeg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/c/cf/Diagramma_x%28t%29.jpeg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Piano_inclinato.png** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/a/a1/Piano_inclinato.png *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Simple_pendulum_generalized_coordinates.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/25/Simple_pendulum_generalized_coordinates.svg *Licenza:* CC0 *Contributori:* Own work *Artista originale:* This SVG version by Maschen, based on user: Gurjete Ukaj's File:Pendulum.gif.
- **File:Velmedia.png** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/0/07/Velmedia.png *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:⊠⊠⊠⊠⊠⊠⊠.svg** *Fonte:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/dd/%E6%96%9C%E6%96%B9%E6%8A%95%E5%B0%84%E3%81%AE%E9%81%8B%E5%8B%95.svg *Licenza:* CC0 *Contributori:* Own work *Artista originale:* ⊠⊠⊠⊠⊠⊠⊠

8.3 Licenza dell'opera