Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Unificazione della meccanica quantistica e della relatività/Equazione di Dirac

Tale problema condusse P.A.M. Dirac nel 1928 a formulare la sua equazione, che fra l'altro porta alla predizione dell'esistenza delle antiparticelle. La situazione in cui il numero delle particelle è una variabile viene detto seconda quantizzazione.

L'equazione che Dirac cercava doveva soddisfare i seguenti requisiti:

1. Deve essere lineare (per conservare il principio di sovrapposizione proprio dell'equazione di Schrödinger);
2. Deve rispettare la condizione relativistica fra E e p , comprendere le derivate di spazio e tempo sullo stesso piano (per avere una formulazione relativistica);
3. Deve contenere solo le derivate prime (per non incorrere nel problema dell'equazione di Klein-Gordon);
4. Deve tuttavia soddisfare l'equazione di Klein-Gordon $[\Box - m^2c^2/\hbar^2]\psi = 0$ (per contenere in sé la relazione relativistica $E^2 = p^2 + m^2$);
5. Deve essere covariante a vista (per conservare l'invarianza per trasformazioni)

Impostiamo quindi una relazione lineare con le derivate prime, imponendo in tal modo i requisiti (1) e (3):

$$E = [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta mc]\psi \Rightarrow [p_4 - \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \alpha_3 p_3 - \beta mc]\psi = 0$$

I coefficienti α_i e β sono calcolati imponendo le altre condizioni. Moltiplichiamo infatti la relazione precedente per la sua coniugata $[p_4+\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\alpha_3 p_3+\beta mc]$ per imporre le condizioni (2) e (4). Si ottiene allora:

$$\left[p_4^2 - p_4 \sum_i \alpha_i p_i - p_4 \beta mc + \sum_i \alpha_i p_i \cdot p_4 - \sum_i \sum_j \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} p_i p_j + \right.$$
$$\left. - \sum_i \alpha_i \beta mc p_i + \beta mc p_4 - \beta mc \sum_i \alpha_i p_i - \beta^2 m^2 c^2 \right] \psi = 0$$

e tenendo presente che α_i e β commutano con p (sono in effetti dei coefficienti), si ricava:

$$\left[p_4^2 - \sum_i \sum_j \frac{\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i}{2} p_i p_j - \sum_i (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i) mcp_i - \beta^2 m^2 c^2\right] \psi = 0$$

Siamo giunti quindi ad un'equazione del II ° ordine, che deve corrispondere alla relazione relativistica della condizione(4). Esplicitando la componente p_4 :

$$\left[-\frac{E^2}{c^2} + \sum_i \sum_j \frac{\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i}{2} p_i p_j + \sum_i (\alpha_i\beta + \beta\alpha_i) mcp_i + \beta^2 m^2 c^2\right] \psi = 0$$

Per ottenere ora la relazione $E^2 = p^2 + m^2$ a partire da questa equazione, dobbiamo ritrovare il termine p^2 e i termini misti in mcp_i devono essere nulli. I coefficienti devono quindi sottostare alle condizioni:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i}{2} &= \delta_{ij} \\ \alpha_i\beta + \beta\alpha_i &= 0 \\ \beta^2 &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

ed in questo caso la relazione diventa:

$$p_4\psi = \left[\sum_i \alpha_i p_i + \beta mc\right] \psi$$

Bisogna ora explicitare i coefficienti da inserire nell'equazione. I coefficienti α_i soddisfano la proprietà di *anticommutazione* e quelle delle matrici. Questo implica immediatamente che ψ non può essere uno scalare, ma un vettore sul quale queste matrici possono operare. La seconda proprietà ci permette di dedurre:

$$\alpha_i\beta = -\beta\alpha_i \qquad \Rightarrow \qquad \det\alpha_i \cdot \det\beta = (-1)^N \det\beta \cdot \det\alpha_i$$

in N dimensioni. Ma il determinante e' un numero, quindi **N deve essere pari**. Essendo anche il determinante diverso da 0, possiamo prendere le matrici inverse e dalla stessa relazione ricavare le condizioni:

$$\alpha_i^{-1}\alpha_i\beta = -\alpha_i^{-1}\beta\alpha_i \quad \Rightarrow \quad \beta = -\alpha_i^{-1}\beta\alpha_i$$

e prendendone le tracce:

$$\mathrm{Tr}\beta = -\mathrm{Tr}\beta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tr}\beta = 0$$

moltiplicando invece per β^{-1} si ricava:

$$\beta^{-1}\alpha_i\beta = -\beta^{-1}\beta\alpha_i \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = -\beta^{-1}\alpha_i\beta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tr}\alpha_i = \mathrm{Tr} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Tr}\alpha_i = 0$$

le 3 matrici α_i e la β sono quindi matrici non unitarie a traccia nulla di dimensione pari. La matrice β , per via della traccia nulla e della terza condizione sul suo quadrato, deve avere la forma:

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

La dimensione minima che soddisfa tutte queste richieste e' 4 in quanto a causa della particolare forma della terza matrice σ_3 non e' possibile soddisfare queste condizioni in uno spazio a dimensione 2, in quanto una base e' composta dalle tre matrici di Pauli piu' la matrice unitaria. Si noti tuttavia che questo numero non ha alcuna relazione con le dimensioni dello spazio-tempo.

Notando che in uno spazio 2×2 una base matriciale è costituita dalla matrice identità e dalle tre matrici di Pauli σ_k :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e notando inoltre che le matrici di Pauli possono essere utilizzate a livello piu' generale come elementi di matrici a

blocchi, si puo' senz'altro scegliere come base:

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

Ovvero, esplicitamente:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Questa scelta costituisce la cosiddetta *rappresentazione standard* o *rappresentazione di Dirac*, altre due rappresentazioni possibili sono quella di Weyl e quella di Majorana.

L'equazione in forma operatoriale assume questo aspetto:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{c}{i}\sum_k \alpha_k \partial_k \psi + \frac{mc^2}{\hbar}\beta\psi$$

la cui complessa coniugata e':*[1]

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger = -\frac{c}{i}\sum_k \partial_k\psi^\dagger\alpha_k + \frac{mc^2}{\hbar}\psi^\dagger\beta$$

Seguendo il procedimento standard per trovare l'equazione di continuità, possiamo ora moltiplicare la prima per $\psi^\dagger$ a sinistra e la seconda per ψ a destra. Sottraendo poi la seconda dalla prima si ottiene:

$$i\left[\psi^\dagger\frac{\partial}{\partial t}\psi + \frac{\partial}{\partial t}\psi^\dagger\cdot\psi\right] = \frac{c}{i}\sum_k\left(\psi^\dagger\alpha_k\partial_k\psi + \partial_k\psi^\dagger\alpha_k\psi\right)$$

ovvero:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^\dagger\psi\right) = \frac{c}{i}\sum_k\partial_k\left(\psi^\dagger\alpha_k\psi\right)$$

È possibile quindi definire una densità di probabilità ed una densità di corrente di probabilità rispettivamente come:

$$\varrho = \psi^\dagger\psi$$
$$j_k = c\psi^\dagger\alpha_k\psi$$

ed ottenere infine l'equazione di continuità nella solita forma, dove il termine $c\vec{\alpha}$ risulta legato alla velocità ed in cui la densità di probabilità è effettivamente definita positiva:

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

Resta da soddisfare infine la condizione (5). L'equazione scritta qui è in realtà già covariante e si esplicita semplicemente moltiplicando a sinistra per β :

$$\frac{i\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t}\psi + i\beta\alpha_k\partial_k\psi - \frac{mc}{\hbar}\psi = 0$$

Introduciamo ora la notazione standard di Dirac, facendo le posizioni (*Matrici di Dirac*):

$$i\beta \equiv \gamma_4 \qquad\qquad \beta\alpha_i \equiv \gamma_i$$

Questo permette di riscrivere l'equazione in forma più compatta:

$$\begin{aligned} i\gamma_4\partial_4\psi + i\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\psi - \frac{mc}{\hbar}\psi = 0 \rightarrow \\ -\gamma_4\frac{\hbar}{i}\partial_4\psi - \frac{\hbar}{i}\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla}\psi - mc\psi = 0 \rightarrow \\ \left(\gamma_4 p_4 + \vec{\gamma}\cdot\vec{p} + mc\right)\psi = 0 \end{aligned}$$

La covarianza a vista è ormai già evidente. Riscrivendo l'equazione in termini di quadrivettori si trova la forma definitiva per l'equazione di Dirac:

$$(\gamma_\mu \cdot \hat{p}_\mu + mc)\psi = 0$$

Si può introdurre anche la notazione $\not{\hat{P}} \equiv \gamma_\mu \cdot \hat{p}_\mu$,*[2] che permette di scrivere l'equazione di Dirac nella forma eccezionalmente compatta:

$$(\not{\hat{P}} + mc)\psi = 0$$

Evidenziamo ora alcune proprieta' delle matrici γ_μ . In primo luogo:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_4^\dagger = -i\beta^\dagger = -\gamma_4 \\ \gamma_i^\dagger = \alpha_1^\dagger \beta^\dagger = \alpha_i\beta = -\beta\alpha_i = -\gamma_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma_\mu^\dagger = -\gamma_\mu$$

Dall'equazione di Dirac si ricava invece:

$$\alpha_i\beta^2\alpha_j + \alpha_j\beta^2\alpha_i = 2\delta_{ij} \Rightarrow -\beta\alpha_i\beta\alpha_j - \beta\alpha_j\beta\alpha_i = 2\delta ij \Rightarrow \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = -2\delta_{ij}$$

ed in particolare, se $i = j$, $\gamma_i^2 = -\mathbb{I}$. Inoltre, per la quarta componente:

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \Rightarrow -i\gamma_i\gamma_4 - i\gamma_4\gamma_i = 0$$

e dunque in definitiva vale l'importante relazione:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = -2\delta_{\mu\nu}$$

1. Siccome si ha a che fare con vettori, con la notazione $\psi^\dagger$ si indica l'operazione di coniugazione complessa degli elementi più quella di inversione righe/colonne. In pratica, se $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ allora $\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*)$.
2. Questa notazione si usa per snellire le formule in cui compare il prodotto della matrice γ_μ , quindi in generale $\not{\hat{A}} \equiv \gamma_\mu \cdot \hat{A}^\mu$.

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Corso:Meccanica Quantistica Relativistica/Unificazione della meccanica quantistica e della relatività/Equazione di Dirac** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_Quantistica_Relativistica/Unificazione_della_meccanica_quantistica_e_della_relativit%C3%A0/Equazione_di_Dirac?oldid=47275 *Contributori:* Valsdav e Valeb

1.2 Immagini

1.3 Licenza dell'opera

- [Project:Copyright Creative Commons Attribution Share Alike 3.0 & GNU FDL]
- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0