Utente:Dan/Elettromagnetismo/ Elettrostatica nei dielettrici/Come variano le equazioni di Maxwell nella materia

Dopo tutto quello che è successo con i dielettrici, come variano le equazioni di Maxwell? Risponderemo presto a questa domanda, prima però subiamoci un po' di notazioni.

1 Suscettività, notazioni, scelte libere e indipendenti

Il campo polarizzazione dipende da una costante (**attenzione**: può non essere costante, dipende anche dalla temperatura), perché $\langle \mathbf{p} \rangle = \alpha \mathbf{E}_l$, da cui deriva $\mathbf{P} = n \langle \mathbf{p} \rangle = n\alpha\mathbf{E}$. Per tutto il discorso che abbiamo fatto nella scorsa sezione, possiamo riassumere come segue la polarizzazione di un dielettrico:

$$\mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E}_l = \begin{cases} n\alpha\mathbf{E} \text{ gas} \\ n\alpha\left(\mathbf{E} + \dfrac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}\right) \text{ altri materiali} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{P} = n\alpha\mathbf{E} \text{ gas} \\ \mathbf{P} = \left(\dfrac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}}\right)\mathbf{E} \text{ altri materiali} \end{cases}$$

In fin dei conti, ciò a cui siamo davvero interessati è che $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$, quindi quale sia la costante davanti poco ci importa. Per questo, in **struttura della materia** spesso si utilizza un'altra notazione, ponendo $\mathbf{P} = \epsilon_0 \mathrm{X}_E \mathbf{E}$; X_E si chiama **suscettività elettrica del materiale** e vale:

$$\mathrm{X}_E = \frac{|\mathbf{P}|}{\epsilon_0 |\mathbf{E}|} = \begin{cases} n\alpha \text{ gas} \\ \left(\dfrac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}}\right) \text{ altri materiali} \end{cases}$$

Poiché in generale la costante α è il realtà un tensore, anche la suscettività risulta esserlo. Per lo studio dell'elettostatica si utilizza ancora un'altra notazione, e si preferisce scrivere $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$; la costante (che può non essere costante) $\epsilon_r = \mathrm{X}_E + 1$ si chiama **costante dielettrica relativa del materiale** e, come per X_E dipende in genere dal materiale considerato. Nel vuoto o nell'aria valgono $\mathrm{X}_E = 0$ e quindi $\epsilon_r = 1$, poi sono valori *positivi* e possono arrivare al centinaio; per l'acqua, ad esempio, vale $\mathrm{X}_E \approx 79$ e $\epsilon_r \approx 80$

Quindi, ci sono tre diverse notazioni possibili per esprimere la polarizzazione di un materiale. A seconda del problema considerato, delle informazioni che si hanno a riguardo o della branca che si sta studiando si preferisce usarne una piuttosto che un'altra. Per i nostri interessi, l'utilizzo di ϵ_r risulta essere *molto* comodo, quindi sarà la notazione principale, fermo restando che resta una **scelta libera e indipendente di chiunque voglia studiare elettrodinamica**.

2 Le equazioni di Maxwell nei mezzi

Per polarizzazione, come abbiamo visto nella scorsa sezione, si formano delle densità di carica:

$$\rho_p = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P}$$
$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

Vediamo come, con il dielettrico polarizzato, variano le equazioni di Maxwell riguardo il campo elettrico (quindi la prima e la terza). La terza equazione *non deve cambiare*: in tutto quello che abbiamo detto e fatto *abbiamo sempre dato per scontato che il campo elettrico fosse conservativo*, quindi vale ancora $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$. La prima, invece, varia, in quanto è presente nello spazio, oltre alla carica libera ρ , la carica di polarizzazione ρ_p (per cariche libere si intendono quelle cariche o densità di carica che generano un campo elettrico e non sono soggette a polarizzazione se immesse in un campo esterno), quindi avremo $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = (\rho + \rho_p)\frac{1}{\epsilon_0}$. Andando a sostituire l'espressione di ρ_p :

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= \rho - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) &= \rho \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} &= \rho\end{aligned}$$

Il campo $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ si chiama **campo spostamento elettrico** e descrive *lo spostamento* (lo shifting, di quanto è variato) il campo elettrico in presenza di un dielettrico nello spazio. Osservano che, *esteticamente*, questa equazione è esattamente uguale (a meno di una costante) alla prima equazione di Maxwell nel vuoto: la divergenza dello spostamento elettrico è uguale alla densità di *carica libera* nello spazio. inoltre, in questa *non appare nulla del dielettrico*: non dipende minimamente dalle cariche polarizzate. Quindi, il teorema di Gauss applicato a questo campo ha come conseguenza che $\Phi_S(\mathbf{D}) = Q_{\text{int}}^{\text{libera}}$.

Il set di equazioni così ottenuto è

$$\begin{cases}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0\end{cases}$$

Funzionano queste equazioni? Ovviamente no. Abbiamo la divergenza di un campo e il rotore di un altro, a meno che non siano presenti simmetrie tali che il teorema di Gauss ci permetta di risolvere tutto, questo sistema *non ha un'unica soluzione*, anzi, ne ha infinite; dal teorema di Helmholtz, necessitiamo sia del rotore che della divergenza di un campo per poter conoscere il campo, quindi, con questo sistema, non ci risolviamo che un piccolo insieme di problemi. Inoltre, per come è definito, $\mathbf{D}$ in generale *non è neanche conservativo*; però, per avere il rotore nullo devono verificarsi dell condizioni particolari; ricordando che $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$, possiamo esplicitare il rotore dello spostamento:

$$\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \epsilon_0 \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{P} = \nabla \times \big(\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}\big)$$

Quindi, affinché sia nullo il rotore di $\mathbf{D}$, deve essere ovunque nullo l'ultimo fattore: in sintesi, **deve esserci un dielettrico lineare, omogeneo e isotropo che riempia tutto lo spazio utile**, ovvero occupi tutto lo spazio in cui $\mathbf{E} \neq 0$; se abbiamo questo caso, allora il rotore dello spostamento è nullo, e otteniamo le equazioni di Maxwell in presenza di un dielettrico che occupa tutto lo spazio:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{D} = 0 \end{cases}$$

Queste, accoppiate con le equazioni di Maxwell nel vuoto, ci permettono di risolvere *qualsiasi* problema di elettrostatica. Possiamo passare la campo elettrico al campo spostamento in maniera semplice, esplicitando lo spostamento $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0\mathbf{E} + \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E}$; la costante $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$ si chiama **costante dielettrica del mezzo**. Quindi, possiamo passare da un campo all'altro considerando che $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ e $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon}$. Osserviamo come, nel caso di dielettrici, *il campo elettrico risulti scalato di un fattore* ϵ_r : infatti le cariche di polarizzazione creano delle densità di carica, che generano un campo elettrico; questo campo, come vedremo con un esempio, **si oppone al campo delle cariche libere**, che risulta quindi più debole.

Inoltre, dalle equazioni nella materia ricaviamo *tutte le informazioni* già ricavate per il campo elettrico: i problemi si possono risolvere *allo stesso identico modo*, tenendo conto di $\mathbf{D}$. Valgono quindi il teorema di Gauss, tutti i trucchetti visti finora e vale anche il teorema di Coulomb per cui, se abbiamo un conduttore immerso in un dielettrico, il campo spostamento nei pressi della superficie del conduttore varrà $\mathbf{D} = \sigma\,\hat{\mathbf{n}}$, da cui il campo elettrico varrà $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon}\hat{\mathbf{n}}$, ovvero vale $\frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r}$ rispetto *al campo nel vuoto*.

Ricapitolando tutto, possiamo ottenere anche un'importante informazione, collegando tra loro tutte le formule che abbiamo ricavato. Infatti, se $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathbf{E}$, sostituendo a $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon}$ otteniamo che $\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\mathbf{D}$. Da questa ricaviamo la densità di carica di polarizzazione volumica:

$$\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\mathbf{D}\right) = \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\right)\nabla \cdot \mathbf{D}$$
$$\rho_p = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\rho$$

Cioè, *per avere una* $\rho_p \neq 0$, **necessitiamo di avere delle cariche libere all'interno del dielettrico**. Inoltre, osserviamo come ρ_p ha il segno opposto di ρ (poiché $\epsilon_r \geq 1$, la frazione è sempre positiva, e c'è il meno davanti), **quindi si crea una carica opposta che indebolisce il campo elettrico**, che quindi viene scalato di ϵ_r .

Esempio (4.1)

Prendiamo un condensatore piano, carico e isolato, di cui sappiamo calcolare tutto, e lo riempiamo con un dielettrico omogeneo, lineare, isotropo. Vediamo come variano le grandezze che già conosciamo.

Nel vuoto, avremo $\mathbf{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{n}}$, $\Delta V_0 = \frac{\sigma h}{\epsilon_0}$, e la capacità $C_0 = \frac{Q_0}{\Delta V_0} = \frac{S\epsilon_0}{h}$. Nel caso c'è un dielettrico, avremo un campo di spostamento $\mathbf{D}$ e una polarizzazione $\mathbf{P}$; sfruttando il teorema di Coulomb per lo spostamento, avremo che $\mathbf{D} = \sigma\,\hat{\mathbf{n}}$; da questo possiamo calcolare tutto il resto: il campo elettrico sarà $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon}\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{E}_0}{\epsilon_r}$, mentre il potenziale, di conseguenza, diventa $\Delta V = \mathbf{E}h = \frac{\sigma h}{\epsilon} = \frac{\Delta V}{\epsilon_r}$. Quindi, sia il campo che la differenza di potenziale diventano più piccoli di un fattore ϵ_r , coerentemente con quanto detto finora nella teoria.

Situazione capovolta per la capacità: avremo infatti $C = \frac{Q_0}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{\Delta V_0}{\epsilon_r}} = C_0\epsilon_r$; la capacità *aumenta* se inseriamo del dielettrico tra le armature del condensatore. Il primo ad accorgersene fu Faraday, osservando quali variazioni comportasse la presenza di dielettrici nello spazio. In questo modo, inoltre, si possono ottenere condensatori a capacità relativamente alte: basterà riempirli di dielettrici a costante alta o, come vedremo, variabile.

Terminiamo studiando le cariche di polarizzazione; il vettore polarizzazione sarà $\mathbf{P} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\mathbf{D} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\sigma\,\hat{\mathbf{n}}$, che è *costante* tra le armature del condensatore. Quindi la densità volumica sarà nulla $\rho_p = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} = 0$, coerentemente con quanto detto finora, mentre la densità superficiale di carica polarizzata non sarà nulla, bensì:

$$\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \mp\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\sigma$$

Avrà segno negativo in corrispondenza dell'armatura positiva, mentre avrà segno positivo in corrispondenza dell'armatura negativa; così si spiega anche perché il campo elettrico diminuisce di intensità.

3 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

3.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Elettrostatica nei dielettrici/Come variano le equazioni di Maxwell nella materia** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Elettrostatica_nei_dielettrici/Come_variano_le_equazioni_di_Maxwell_nella_materia?oldid=46161 *Contributori:* Dan

3.2 Immagini

3.3 Licenza dell'opera