Utente: Dan/Elettromagnetismo/Induzione elettromagnetica/La legge di Faraday-Neumann-Lenz

Vediamo finalmente che $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ non sono altro che due facce della stessa medaglia, ovvero l'uno la sorgente dell'altro. Procediamo con calma: consideriamo variazioni temporali piccole e andiamo avanti per gradi. Ci approcciamo a studiare il fenomeno dell'**induzione elettromagnetica**, un fenomeno che, come tanti nella storia della fisica, è stato scoperto per caso, involutamente. Nell'anno 1831 Faraday pubblicò una serie di esperimenti che avevano tutt'altro scopo che rilevare ciò che vide: stava infatti studiando come due circuiti, in particolare due solenoidi coassiali e concentrici, si influenzassero a vicenda. Questo è esattamente ciò che è l'induzione elettromagnetica, *tuttavia* Faraday stava studiando i circuiti in corrente continua, e quindi, finché la corrente girava, non vedeva un tubo oltre quelli con cui lavorava. Le cose però si comportavano stranamente quando chiudeva la corrente nei circuiti: entrambi erano muniti di amperometro e, quando la corrente in uno veniva chiusa, per un breve tempo l'amperometro sull'altro risentiva di un qualcosa che gli facesse segnalare una corrente in più. Una persona qualsiasi se ne infischierebbe e andrebbe a mangiare un panino, Faraday però, che scemo non era, studiò più a fondo il fenomeno.

La sua bravura fu quella di capire che fenomeni apparentemente diversi avessero in realtà cause comuni. I diversi fenomeni sono riassumibili in due classi:

1. un circuito fermo con un campo magnetico $\mathbf{B}(t)$ variabile nel tempo;
2. il campo magnetico non varia nel tempo, ma varia nello spazio, e il circuito si muove nello spazio.

Si vide che in tutti i casi si creava una *corrente indotta* nei circuiti e Faraday intuì che questa avesse qualcosa a che fare col campo magnetico, in particolare **con la variazione di flusso del campo magnetico**:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Questo può variare sia se varia il campo, ma anche se varia la superficie concatenata al circuito o, addirittura, se varia l'angolo tra la normale e il campo. Se variano tutti e tre apriti cielo. In questi casi, in tutti questi casi, il circuito risente di una **forza elettromotrice indotta**; per forza elettromotrice si intende *forza per unità di carica* che permette ai portatori di carica di muoversi lungo il circuito:

$$f_{em} = \oint_l \frac{\mathbf{F}_i}{q} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$$

Con $\mathbf{E}_i$ si intende **campo elettromotore**. La forza elettromotrice *indotta* su un circuito è esprimibile secondo la **legge di Faraday-Neumann-Lenz**, di carattere puramente sperimentale (come il 90% di questa teoria: ricordiamo che il lavoro teorico di Maxwell è consistito nel mettere in ordine tutte le varie teorie sparse dei fenomeni elettrici e magnetici in un'unica formulazione sintetica e organica che è l'elettrodinamica che studiamo):

$$f_i = -\frac{d\,\Phi(\mathbf{B})}{dt}$$

Se il circuito è ohmico, a questa corrisponde una **corrente indotta** pari a:

$$I_i = \frac{f_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS$$

Il segno meno è dovuto a Lenz (il suo contributo in questa legge è tutto qui) e non è banale: la forza elettromotrice agisce in modo da opporsi alla variazione *di flusso autoconcatenato* al circuito. Per spiegarlo meglio, prendiamo un circuito e facciamo girare una corrente, che cresce lentamente fino al suo valore massimo; questa genera nello spazio un campo magnetico che varia di intensità, fino a essere costante una volta che la corrente ha raggiunto il suo massimo. Il flusso del campo attraverso la superficie del circuito è variabile nel tempo, quindi si crea una forza elettromotrice indotta e una corrente indotta. Nel nostro caso, poiché la corrente generatrice cresce di intensità, la corrente indotta *circola nel verso opposto*: così facendo, **frena la variazione di flusso**. Al contrario, se la corrente diminuisce dal suo massimo fino allo zero, il flusso anche diminuisce nel tempo, e la corrente indotta *circola nello stesso verso della corrente generatrice*: così facendo, frena la variazione negativa di flusso del campo magnetico.

Prendetevi qualche minuto per rileggere e comprendere l'ultimo paragrafo; per comprenderlo meglio, basta vedere le cose da un altro punto di vista: **se non ci fosse il segno meno, potremmo creare correnti infinite a costo quasi nullo**: la corrente indotta circolerebbe sempre nello stesso verso arrivando in breve tempo a intensità altissime, fino a quando non sciogliamo tutto l'apparato strumentale. In sintesi, senza quel segno meno non esisterebbe tutta la tecnologia che abbiamo oggi.

La legge di Faraday porta a una conseguenza fondamentale, che andiamo adesso a dimostrare: $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ è **una sorgente del campo elettrico**. Partiamo da considerazioni particolari, per poi arrivare al caso più generale.

Quando in un circuito è presente una forza elettromotrice, come abbiamo già detto, possiamo allora parlare anche di *campo elettromotore*; poiché, come vedremo, la forza elettromotrice che agisce sui portatori di carica è la forza di Lorentz, il campo elettromotore è facilmente esprimibile:

$$\mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{F}_L}{q} = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

A questo possono contribuire sia il campo elettrico, che quello magnetico o anche entrambi. Quando c'è il contributo magnetico, qual è la velocità dei portatori di carica da considerare? Questi infatti si muovono nel circuito con la loro velocità di deriva $\mathbf{v}_D$, ma può capitare che il circuito stesso si muova nello spazio con una sua velocità di trascinamento $\mathbf{v}_T$; la velocità totale dei portatori sarà quindi $\mathbf{v} = \mathbf{v}_D + \mathbf{v}_T$. La forza elettromotrice viene calcolata come la circuitazione del campo elettromotore:

$$f_i = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} \rightarrow \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \oint_l (\mathbf{v}_D \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \oint_l (\mathbf{v}_T \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Poiché la velocità di deriva è parallela a $d\mathbf{l}$, il vettore $\mathbf{v}_D \times \mathbf{B} \perp d\mathbf{l}$ è ortogonale all'infinitesimo di circuito, *il loro prodotto scalare è nullo*. In sintesi, nella circuitazione del campo elettromotore, per quanto riguarda il contributo magnetico, *la velocità di deriva non fornisce contributo*:

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \oint_l (\mathbf{v}_T \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Da adesso in poi, allora, quando scriveremo $\mathbf{v}$ indicheremo la velocità di trascinamento del circuito, visto che quella di deriva non contribuisce.

Questo ci da anche un'altra informazione non banale: se il circuito *è fermo*, non ci sono contributi magnetici alla circuitazione del campo elettromotore. In pratica:

$$\oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Questa è uguale alla forza elettromotrice. Ora, se il circuito è fermo e il campo magnetico è costante nel tempo, non accade nulla di strano. Ma se il campo magnetico è dipendente dal tempo, dalla legge di Faraday sappiamo che deve esserci una forza elettromotrice indotta, quindi avremo che **la circuitazione del campo elettrico non è nulla**: in pratica, dovremo riscrivere la terza equazione di Maxwell.

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} \neq 0$$

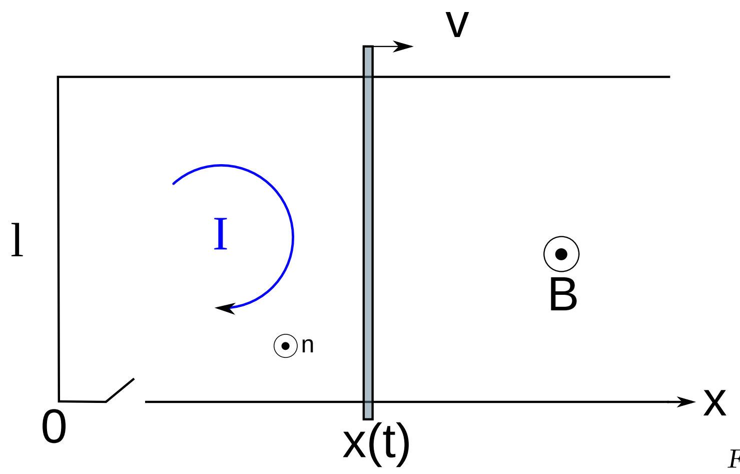

Fig. 8.2

Andiamo a studiare diversi casi. Partiamo dal sistema in figura 8.2: abbiamo un circuito (senza generatore), una spira rettangolare, con un lato lungo l e l'altro lato variabile: c'è infatti una sbarra conduttrice che può scorrere *senza attrito* lungo i fili del circuito. Consideriamo il tutto immerso in un campo $\mathbf{B}$ = cost e uscente dal piano: in questo caso è l'area del circuito a variare. Indicato l'asse $\hat{\mathbf{x}}$ come in figura, il flusso concatenato al circuito è:

$$\Phi(\mathbf{B}) = l\, x(t)\, B$$

Questo dipende dal tempo, e allora vedremo una corrente scorrere nel circuito anche se non vi è un generatore: si genera una forza elettromotrice indotta generata dalla variazione di flusso. La bacchetta si muove con velocità $\mathbf{v}$, possiamo esprimere il flusso come:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, dS = B \int_S dS = B\, l x(t) = B\, l v t$$

Da cui otteniamo direttamente la forza elettromotrice indotta:

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{\partial x(t)}{\partial t} = -Blv$$

Il segno determina il verso della corrente, che sarà $I_i = -\frac{Blv}{R}$ e si avvolge in verso opposto rispetto al verso di percorrenza indicato dalla normale al circuito (che abbiamo preso uscente come il campo).

Si osserva sperimentalmente anche un comportamento strano: poiché non c'è attrito, una volta spinta la sbarretta, questa dovrebbe continuare a muoversi per un tempo indefinito. In realtà, si ferma quasi subito. La resistenza del circuito, infatti, **dissipa energia** per effetto Joule e a pagare è proprio il moto della bacchetta.

Un altro modo per vedere le cose è osservare che la bacchetta *subisce una forza magnetica* data dalla seconda equazione di Laplace diretta verso l'interno della spira (con $\hat{\mathbf{y}}$ indichiamo il versore che punta in alto in figura 8.3):

$$\mathbf{F} = I\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = IlB\, \hat{\mathbf{y}} = -\frac{B^2 l^2}{R} \hat{\mathbf{y}} \sim -\beta \hat{\mathbf{y}}$$

La forza ha la stessa forma di una forza di attrito viscoso, che tende quindi proprio a frenare il moto della sbarretta. Quindi, per muovere la bacchetta, dobbiamo compiere lavoro, altrimenti il processo si ferma subito. Ciò che fa muovere le cariche, come vediamo subito, è la forza di Lorentz: questa, come sappiamo, **non** compie lavoro, ma *può trasferirlo*: fa in questo caso da tramite tra noi, che compiamo lavoro sulla bacchetta, e i portatori di carica che subiscono il lavoro che li fa muovere.

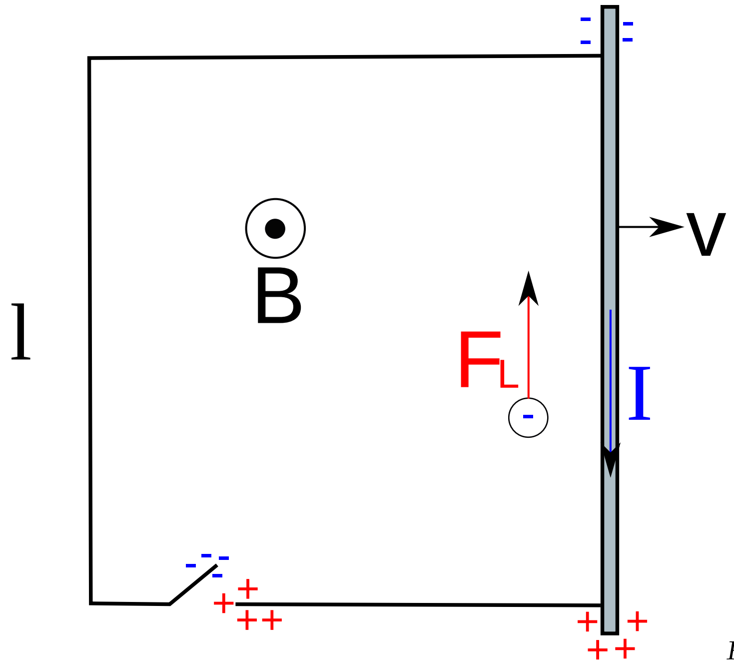

Fig. 8.3

Infatti, procediamo ignorando totalmente l'esistenza della legge di Faraday-Neumann e vediamo come sia proprio la forza di Lorentz a far circolare i portatori di carica nel circuito (riferimenti alla figura 8.3). La bacchetta si muove sempre con velocità **v** e le cariche si muovono con questa velocità di trascinamento: la forza di Lorentz agisce, spostando gli elettroni verso l'alto e i protoni verso il basso. In pratica, si crea un *campo elettrostatico all'interno della bacchetta*; le cariche possono poi scorrere lungo il circuito, andandosi ad accumulare ai capi dell'interruttore che diventa così un **generatore**: una volta chiuso il circuito, le cariche continuano a girare all'impazzata senza una meta, con la corrente I che abbiamo visto prima; quindi, la forza di Lorentz che agisce ha solo contributo magnetico, e possiamo scrivere la forza elettromotrice come:

$$f_i = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = \oint_l (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Esattamente come abbiamo visto prima! Quindi non abbiamo visto nulla di così straordinario: è tutto conseguenza della forza di Lorentz, per cui la legge di Faraday-Neumann non ci illumina così tanto, almeno in questo caso specifico.

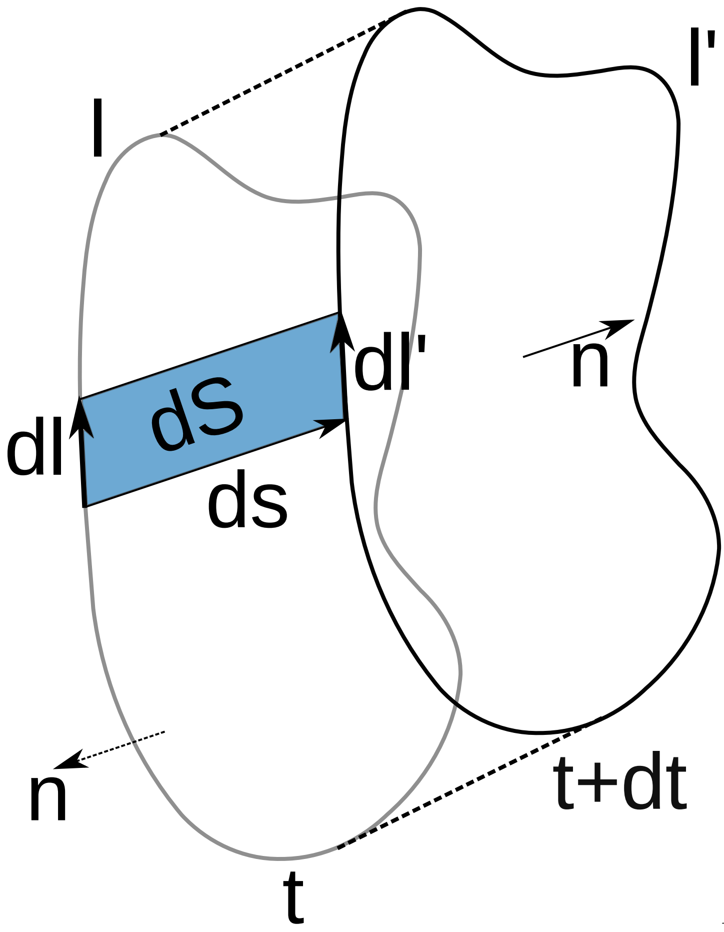

Fig. 8.4

Passiamo a un caso un po' più generale: consideriamo il campo magnetico *non uniforme*, costante nel tempo ma non nello spazio, e il circuito che si muove nello spazio. L'area del circuito può variare, ovvero $l \neq l'$. Facciamo riferimento alla figura 8.4. Il vettore spostamento $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$ è quanto si muove il circuito nel tempo infinitesimo. Consideriamo l'intero volume circondato dal circuito prima e dopo lo spostamento e l'area che li circonda: questa è una superficie chiusa e, per il teorema di Gauss della magnetostatica, il flusso su questa è nullo:

$$\Phi_{l+l'+dS}(\mathbf{B}) = 0 = -\Phi_l + \Phi_{l'} + \Phi_{dS}$$

Il segno meno sta a indicare che, ovviamente, la normale cambia verso; allora possiamo esprimere il flusso attraverso la superficie di contorno, che chiameremo **flusso tagliato**, in termini di variazione di flusso concatenato al circuito stesso:

$$\Phi_{dS} = -(\Phi_{l'} - \Phi_l) = -d\Phi(\mathbf{B})$$

Questo possiamo sostituirlo nella legge di Faraday come $f_i = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{\Phi_{dS}(\mathbf{B})}{dt}$; la comodità sta nel fatto che il flusso tagliato è *molto semplice da calcolare*: l'area dS è infatti il prodotto vettoriale tra l'elementino di circuito e il vettore spostamento, ovvero $dS = d\mathbf{l} \times d\mathbf{s} = (d\mathbf{l} \times \mathbf{v})dt$; esprimendo per intero il flusso tagliato:

$$-\Phi_{dS} = -\int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = -\oint_l \mathbf{B}\cdot(d\mathbf{l}\times\mathbf{v})dt$$

Sostituendo questo alla variazione temporale del flusso concatenato, e ricordando che $\mathbf{B}\cdot(d\mathbf{l}\times\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}$:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot(d\mathbf{l}\times\mathbf{v})dt = \oint_l (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}$$

Osserviamo allora che $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ è il contributo magnetico della forza di Lorentz per unità di carica: in pratica, abbiamo ritrovato che la forza elettromotrice è proprio la forza di Lorentz.

Cambiamo ancora caso e prendiamo allora il nostro circuito fermo, mentre un altro circuito, percorso da corrente, si muove nello spazio, generando un campo magnetico variabile nel tempo sul primo circuito. Questo caso è facilmente riconducibile a quello appena esaminato: cambiando sistema di riferimento tramite una trasformazione di Lorentz, spostandoci in un sistema in cui il circuito in moto risulta fermo, torniamo al caso in cui il campo magnetico è costante nel tempo ma non nello spazio e il circuito si muove nello spazio, che abbiamo appena descritto. Quindi, i due casi sono equivalenti.

Un caso diverso è invece quando il circuito è fermo e nello spazio è presente un campo magnetico variabile nel tempo $\mathbf{B}(t)$. Consideriamo costante l'area del circuito: la forza elettromotrice sarà:

$$f_i = \oint_l \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{l} = \oint_l (\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

Questo perché la velocità di trascinamento $\mathbf{v}$ del circuito è nulla in quanto è fermo. Poiché stiamo considerando la superficie costante nel tempo, possiamo portare l'operatore di derivata sotto il segno di integrale:

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_S -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

Applicando a quest'uguaglianza il teorema di Stokes, ricaviamo:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

Voi direte: "Eh ma abbiamo considerato l'area costante così si porta la derivata sotto l'integrale, grazie al piffero che viene!" Ebbene, magia delle magie non magiche, la stessa cosa la ricaviamo se consideriamo l'area variabile. Infatti, quando l'area passa da $S(t)$ a $S(t+dt)$, sempre applicando la legge di Faraday avremo:

$$f_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{S(t+dt)} \mathbf{B}(t+dt)\cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t)\cdot d\mathbf{S}\right)$$

Sviluppando in serie $\mathbf{B}(t+dt)$, possiamo esprimerlo come $\mathbf{B}(t+dt) = \mathbf{B}(t) + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}dt$; andando a sostituire nell'espressione precedente ricaveremo:

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\int_{S(t+dt)} \mathbf{B}(t)\cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t)\cdot d\mathbf{S}\right) - \frac{d}{dt}\,dt\int_{S(t+dt)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

Osserviamo che il termine tra parentesi **è il flusso tagliato** dal circuito, che abbiamo calcolato prima come $\oint_l (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}$; sostituendo e operando la stupida derivata che compare, nel limite $dt \to 0$ sostituiamo $S(t+dt) \approx s(t)$, otterremo:

$$f_i = \oint_l (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l} - \int_{S(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$
$$\oint_l \mathbf{E}_i\cdot d\mathbf{l} - \oint_l (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

Poiché vale $\mathbf{E}_i = \mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}$ (perché la forza elettromotrice è la forza di Lorentz), operando algebricamente possiamo esprimere $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i - \mathbf{v}\times\mathbf{B}$. Osservando che appare questa circuitazione nell'espressione precedente, sostituiamo:

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

Ancora una volta, applicando il teorema di Stokes, otteniamo un'importante relazione:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Come vedremo, questa è la **terza equazione di Maxwell nel caso dinamico** e ci dice che la variazione temporale del campo magnetico altro non è che una sorgente del campo elettrico, e lo abbiamo ottenuto semplicemente come conseguenza dell'invarianza relativistica dell'elettrodinamica. Sfruttando questa relazione si possono creare *campi elettrici solenoidali*, alla base del funzionamento dei betatroni (vedremo meglio nella prossima sezione), che sono degli acceleratori di particelle più moderni e facilmente utilizzabili del ciclotrone (il limite del ciclotrone è che bisogna inserire una differenza di potenziale che sia in fase con la particella: questo si ottiene facilmente a basse energie, ma quando la velocità aumenta, per fenomeni quantistici, la differenza di potenziale inserita non sarà più in fase con la particella e, quindi, non si accelera più, ma si rischia di decelerarla).

Detto questo, possiamo finalmente dare il via allo studio dell'**elettromagnetismo** vero e proprio: tutto quello che abbiamo visto finora altro non era che l'anticamera dell'elettrodinamica, che inizia da qui.

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Induzione elettromagnetica/La legge di Faraday-Neumann-Lenz** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Induzione_elettromagnetica/La_legge_di_Faraday-Neumann-Lenz?oldid=46176 *Contributori:* Dan

1.2 Immagini

- **File:Figura8-2ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/6/64/Figura8-2ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura8-3ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/9/91/Figura8-3ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura8-4ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/f/ff/Figura8-4ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

1.3 Licenza dell'opera