Corso:Algebra Anelli (Unimib)/Anelli/Congruenze in un anello

1 Definizione

Definizione (281 Congruenza in un anello)

Una relazione di equivalenza r definita sugli elementi di un anello $(A, +, \cdot)$ si dice *congruenza sull'anello* A se è compatibile sia con la somma che con il prodotto.

In altre parole, una congruenza su un anello ha le seguenti proprietà:

1. r è una congruenza sul gruppo additivo (abeliano) $(A, +)$ e ha come nucleo la classe contenente 0 , cioè $[0]_r$.
2. r è una congruenza sul monoide $(A, \cdot)$.

Poiché per ogni $x \in [0]_r$ $xR0$ e poiché ogni elemento è associato a se stesso, cioè aRa , segue che $axRa * 0$ e $xaR0 * a$, perché r è compatibile rispetto al prodotto. Ma siccome $0 * a = 0$, allora $axR0$ e $xaR0$. Cioè, preso un qualsiasi elemento x associato a zero, allora il prodotto di x con un qualsiasi elemento dell'anello è associato allo zero. In altre parole, la classe $[0]_R$ è "chiusa" rispetto al prodotto sia a sinistra che a destra per un qualsiasi elemento di A .

Osservazione (282)

r è completamente determinata dalla classe $[0]_r$ che si dice *nucleo di* r .

NB: Se considero la classe $[a]_r$ che contiene un generico elemento di A , essa è il laterale del nucleo che contiene questo elemento (rispetto alla somma), cioè $\{i + a : i \in [0]_r\}$.

2 Ideale

L'analisi delle congruenze in un anello conduce alla definizione di ideale.

Definizione (283 Ideale)

Un sottogruppo I del gruppo additivo $(A, +)$ si dice rispettivamente

1. *ideale sinistro*, se $\forall a \in A, \forall i \in I$, $a * i \in I$;
2. *ideale destro*, se $\forall a \in A, \forall i \in I$, $i * a \in I$;
3. *ideale (bilatero)*, dell'anello A se per ogni $i \in I$ e per ogni $a \in A$, $a * i \in I$ e $i * a \in I$.

In un anello commutativo un ideale sinistro è anche destro e quindi bilatero.

Esempio (284)

Considerando $Mat(n, A)$ anello delle matrici quadrate con $n > 1$ e considero l'insieme di tutte le matrici che hanno tutte le colonne nulle tranne una colonna fissata che ha elementi arbitrari: questo soottoinsieme è un sottogruppo del gruppo additivo di $Mat(n, A)$ ed è un ideale sinistro.

Se si prende invece l'insieme che ha tutte le righe nulle tranne una riga arbitraria, si ottiene un ideale destro.

3 Relazione tra nucleo e ideale

Il nucleo di una congruenza di A è un ideale, perché è un sottogruppo del gruppo additivo dell'anello, inoltre per ogni $x \in I$ e per ogni $a \in A$, ax e xa stanno entrambi nel nucleo per l'osservazione precedente.

Inversamente, vale la seguente proposizione:

Proposizione (285)

Sia I un ideale dell'anello A , allora se considero la relazione di equivalenza D_i definita ponendo: $aD_ib \iff \exists i \in It.c.b = i + a$, essa è una congruenza in A avente come nucleo l'ideale I .

(Gli ideali sono tutti e soli i nuclei delle congruenze)

Dimostrazione

Sappiamo che rispetto alla somma $(I, +)$ è un sottogruppo normale del gruppo abeliano $(A, +)$. Dunque D_i è una congruenza di gruppi abeliani e ha come nucleo il sottogruppo I . Resta solo da provare che D_i è compatibile con il prodotto e quindi che è una congruenza sull'anello.

Siano aD_ia' e bD_ib' allora per come D_i è definita esistono elementi $i_1, i_2 \in I$ tali che $a' = i_1 + a$ e $b' = i_2 + b$. Segue che $a'b' = (i_1 + a)(i_2 + b) = i_1 * b + i_2 * a + i_1 * i_2 + ab$. I primi tre elementi sono tutti elementi di I per le proprietà dell'ideale, quindi $abD_ha'b'$.

La S_i coincide con la D_i perché I è normale.

4 Costruzione di ideali

Sia A un anello, $a \in A$, e prendiamo i seguenti sottoinsiemi di A :

1. $$(a)_s = \{y \in At.c.xa = y,\ x \in A\}$$

2. $$(a)_d = \{y \in At.c.ax = y, x \in A\}$$

.

Entrambi gli insiemi contengono lo zero se pongo $x = 0$.

Nota: non è richiesto che un ideale contenga l'unità. Infatti, se un ideale contiene l'unità, allora contiene il prodotto dell'unità per gli altri elementi dell'anello, quindi coinciderebbe con l'intero anello.

Esempio (286)

Nell'insieme $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri pari è un ideale ma non un sottoanello.

Proposizione (287)

1. $(a)_s$ è un ideale sinistro di A e $(a)_d$ è un ideale destro.
2. Se I_s e I_d sono ideali sinistri o destri dell'anello A contenente a , allora l'ideale $(a)_s \subset I_s$ e $(a)_d \subset I_d$.
3. Sia A un anello commutativo, allora $(a)_s$ coincide con $(a)_d$ e lo indico con (a) (gli ideali sono bilateri).

(a) coincide con l'intero anello se e solo se a è un elemento unitario.

Dimostrazione

1. Consideriamo $x_1 * a, x_2 * a \in (a)_s$. Mostriamo che la loro differenza $x_1 * a - x_2 * a$ sta ancora in $(a)_s$, cioè mostriamo che $(a)_s$ è

un sottogruppo additivo di $(A, +)$.

$$x_1 * a - x_2 * a = (x_1 - x_2) * a \in (a)_s,$$

quindi è un sottogruppo del gruppo abeliano. Prendiamo un qualsiasi elemento di $(a)_s$ della forma $x * a$, allora devo provare che $y(xa)$ sta ancora nell'insieme. Per l'associatività posso scrivere $y(xa) = yxa = (yx)a$ similmente per $(a)_d$. Ho così dimostrato la chiusura rispetto al prodotto con elementi dell'anello.

1. Se $a \in I_s$, siccome I_s è un ideale sinistro, per ogni $x \in A$ anche $xa \in I_s$. Quindi $(a)_s$ è contenuto nell'ideale I_s .

Similmente per I_d .

1. Se $(a)_s = (a)_d = (a)$ è uguale all'intero anello A , allora l'unità 1_A appartiene a (a) , quindi esiste

$\bar{x} \in A$ tale che $1_a = \bar{x} * a = a * \bar{x}$, ovvero a è invertibile rispetto al prodotto. Inversamente supponiamo che a sia unitario. Allora $\forall y \in A$ posso scrivere $y = y * 1_A = y * a^{-1} * a = (ya^{-1}) * a$, cioè y sta nell'ideale generato da a .

In particolare se ho un ideale di un anello ed esso contiene l'unità, allora è l'intero anello.

5 Ideale principale

Definizione (288 Ideale principale)

Si definisce *ideale principale* generato dall'elemento a l'insieme ottenuto moltiplicando a per ogni elemento dell'anello: l'ideale principale è il più piccolo ideale che contiene a .

Se l'anello è commutativo, l'ideale principale generato da a coincide con tutto A se e solo se a è unitario.

Corollario (289)

Se A è un anello commutativo con $|A| > 1$, allora A è un campo se e solo se non ha ideali non banali, cioè diversi dall'ideale nullo (solo zero) e l'intero.

In altre parole, i campi sono anelli che hanno solo ideali banali.

Dimostrazione

Questo deriva dal fatto che siccome ogni elemento $a \in A$ è unitario, allora l'ideale (a) coincide con l'intero anello e non esistono ideali più piccoli che contengono a .

6 Ideali in un dominio

Proposizione (290)

Sia A un dominio (un anello commutativo privo di divisori dello zero). Se considero due elementi $a, b \in A$, allora l'ideale principale generato da a e quello generato da b coincidono se e solo se a differisce da b per un elemento unitario, cioè se $a = ub$.

Dimostrazione

Supponiamo che i due ideali principali coincidano. Allora l'elemento a sta nell'ideale generato da b , quindi $a = x_1 b$, ma anche b appartiene all'ideale generato da a , quindi si può scrivere $b = x_2 * a$. Segue $a = x_1 b = x_1 x_2 * a$. Se $a = 0$ anche $b = 0$ e in questo caso gli elementi differiscono per qualsiasi elemento unitario.

Altrimenti, se $a \neq 0$ valgono le leggi di cancellazione, quindi cancellando a si ottiene $1 = x_1 * x_2$, cioè x_1 e x_2 sono entrambi elementi unitari. In particolare $x_1 \in U$ e $a = ub$.

Inversamente, supponiamo che $a = ub$ con u unitario. Allora a (e quindi (a)) è contenuto in (b) . D'altra parte, u è unitario e ha inverso quindi posso scrivere $b = u^{-1} * a$ e quindi $(a) \supset (b)$. Vale la doppia inclusione e i due ideali coincidono.

Definizione (291 Domini a ideali principali)

Un dominio è detto a ideali principali se ogni ideale è principale.

Esempio (292)

Tra questi domini ci sono il dominio degli interi relativi e il dominio dei polinomi in un'indeterminata x a coefficienti in un campo. C'è un parallelismo tra questi due domini (esistenza di un algoritmo per la divisione).

7 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

7.1 Testo

- **Corso:Algebra Anelli (Unimib)/Anelli/Congruenze in un anello** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AAlgebra_Anelli_(Unimib)/Anelli/Congruenze_in_un_anello?oldid=48164 *Contributori:* Toma.luca95 e Mmontrasio

7.2 Immagini

7.3 Licenza dell'opera