Meccanica classica

26 gennaio 2022

Indice

Capitolo 1

Sistemi Dinamici

1.1 Spazio delle fasi e diagramma di fase

Definizione (Spazio delle fasi)

Sia la funzione:

$$\begin{aligned} \underline{x} : & \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto \underline{x}(t) \end{aligned}$$

Dato un (PC) del tipo:

$$\begin{cases} \ddot{\underline{x}} = F(\underline{x}, \dot{\underline{x}}; t) \\ \underline{x}(t_0) = x_0 \\ \dot{\underline{x}}(t_0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

Si dice **spazio delle fasi** l'insieme di punti che descrivono ogni stato del sistema:

$$\mathcal{F} = \left\{ (\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \ \in \ \mathbb{R}^{2n} : \ t \ \in \ I \subseteq \mathbb{R} \right\}$$

Notiamo subito che (PC) ha un'unica soluzione se F è di classe C^1 per il teorema di esistenza e unicità; questo in sostanza ci dice che conoscendo lo stato iniziale del sistema (posizione e velocità), possiamo determinarne una qualunque evoluzione nel tempo. Un ragionamento del genere ha giustificato tutta la corrente filosofica del "determinismo" pre-quantistica.

Consideriamo adesso l'equazione di conservazione dell'energia meccanica:

$$E_m = T + U, \quad T = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}^2, \quad U = U(x)$$

Se consideriamo il problema di Cauchy di cui sopra, possiamo definire $E_0 = \frac{1}{2} m \dot{\underline{x}}_0^2 + U(\underline{x}_0)$. L'integrale generale $\underline{x}(t)$ deve soddisfare la relazione:

$$
\begin{aligned}
E_0 &= \frac{1}{2} m \underline{\dot{x}}^2 + U(\underline{x}) \\
&\downarrow \\
\underline{\dot{x}}^2 &= 2\left(E_0 - U(\underline{x})\right) \\
&\downarrow \\
\underline{\dot{x}} &= \pm\sqrt{2\left(E_0 - U(\underline{x})\right)}
\end{aligned}
$$

Dove il passaggio dalla prima alla seconda equazione è lecito poichè m è una costante e possiamo fissarla momentaneamente uguale a 1 senza perdere di generalità.

A questo punto lo scopo del corso è di studiare la relazione esistente tra x e $\dot{x}$, che saranno posizione di un punto materiale o corpo e la sua velocità; quindi possiamo considerare la funzione $\underline{x}(t)$ come una variabile libera x e lasciare la dipendenza dal tempo in maniera implicita. L'equazione che dà la velocità dunque diventa:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2\left(E_0 - U(x)\right)}$$

Definizione (diagramma di fase)

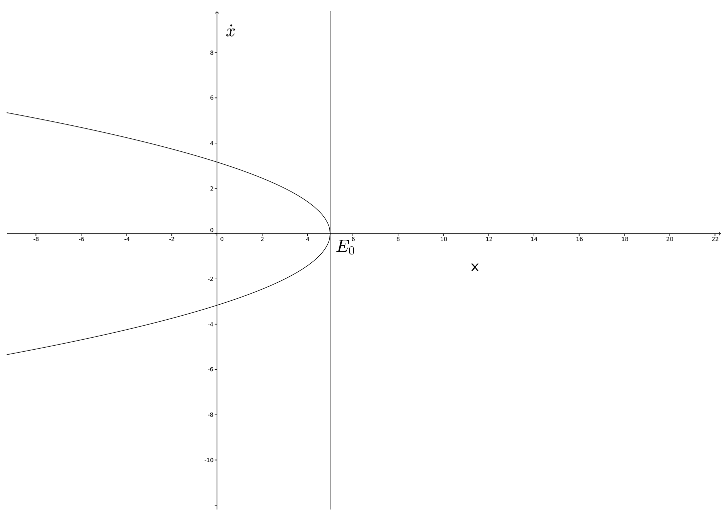
Il grafico formato dai due rami di parabola $\pm\sqrt{2\left(E_0 - U(x)\right)}$ è detto **diagramma di fase**

Esempio

Sia $U(x) = x,\ \ddot{x} = -1$. Il (PC) associato sarà:

$$
\begin{cases}
\ddot{x} = -1 \\
x(0) = x_0 \\
\dot{x}(0) = \dot{x}_0
\end{cases}
$$

Da cui possiamo ottenere un valore per l'energia meccanica iniziale $E_0 = \frac{1}{2}\dot{x}_0^2 + x_0$ e infine un'equazione per la velocità $\dot{x} = \pm\sqrt{2(E_0 - x)}$.



1.2 Dal grafico dell'energia potenziale al diagramma di fase

Questa pagina è a titolo di esempio per come impostare la risoluzione di un (PC) associato ad un sistema dinamico, a partire dall'energia potenziale.
Sia $U(x) = \frac{\omega^2}{2}x^2$ un'energia potenziale. Il (PC) associato sarà della forma:

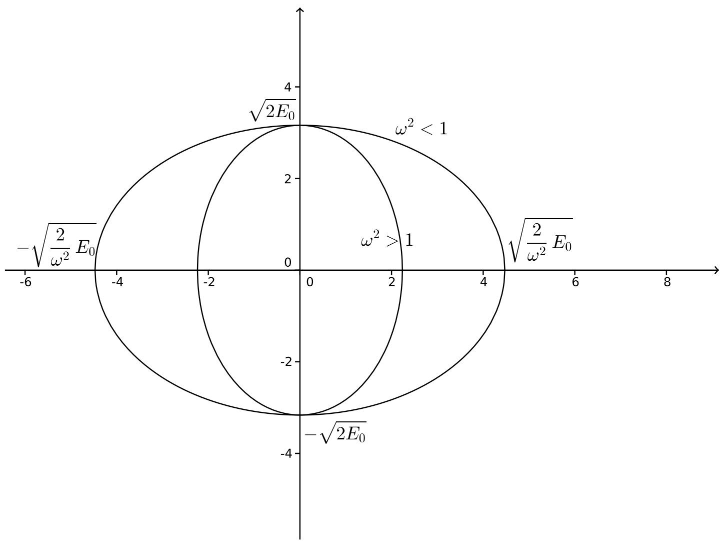
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{d}{dx}U(x) = -m\omega^2 x \longrightarrow \ddot{x} = -\omega^2 x \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Fissato E_0 , le coppie $(x, \dot{x})$ si trovano tramite $\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 = E_0$, dunque si hanno le seguenti:

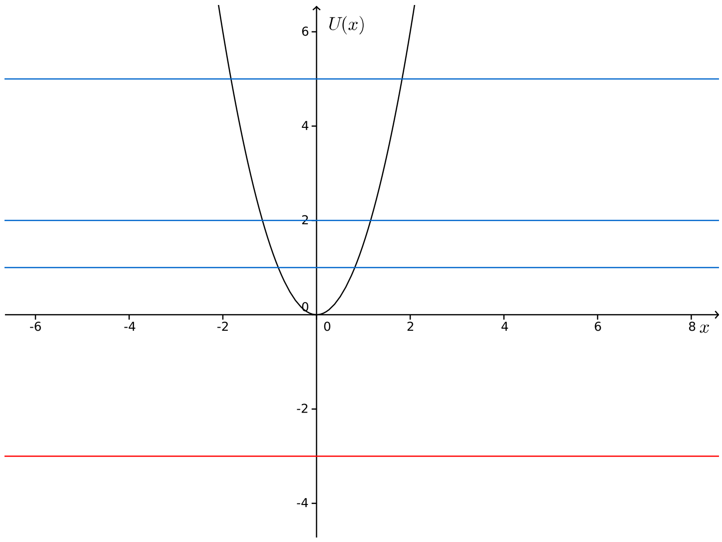
$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{2}{\omega^2}E_0} \ \ se \ \dot{x} = 0 \\ \\ \dot{x} = \pm\sqrt{2E_0} \ \ se \ x = 0 \end{cases}$$

E inoltre, al variare di ω^2 si avranno:

$$\begin{cases} \left|\sqrt{\frac{2}{\omega^2}E_0}\right| < \left|\sqrt{2E_0}\right| \ \ se \ \omega^2 > 1 \\ \\ \left|\sqrt{\frac{2}{\omega^2}E_0}\right| > \left|\sqrt{2E_0}\right| \ \ se \ \omega^2 < 1 \end{cases}$$



Una volta fissato $\omega^2 = 3$, avremo l'energia potenziale $U(x) = \frac{3}{2}x^2$ e il (PC) prima descritto varierà di conseguenza. A questo punto per descrivere tutti i possibili stati del sistema, guardiamo prima al grafico dell'energia potenziale e controlliamo il dominio di esistenza della funzione $\sqrt{2(E_0 - U(x))}$, cioè tutti i valori che soddisfino $E_0 \geq U(x)$.

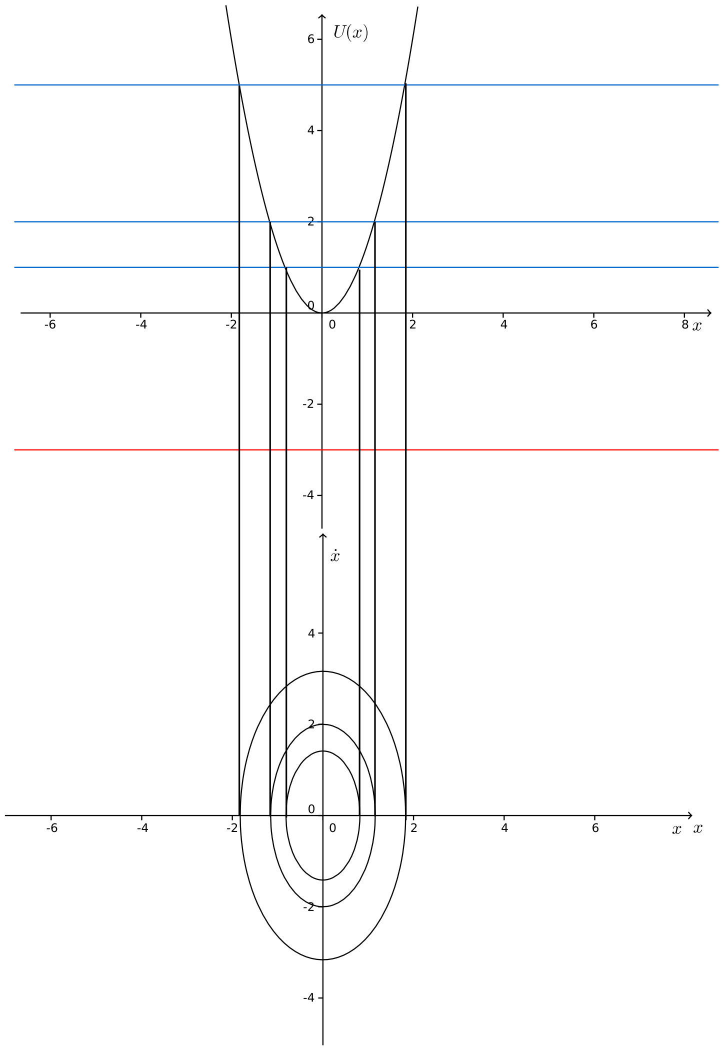


Vediamo in figura quattro rette che corrispondono a valori diversi di E_0 : per quelle colorate in azzurro c'è una porzione di grafico che soddisfa $E_0 \geq U(x)$, in particolare quella sottostante alle rette stesse; per la retta colorata in rosso questo però non vale poichè l'energia potenziale non esiste al di sotto della retta.

Concludiamo dunque che $E_0 \geq 0$ affinchè la descrizione del sistema abbia significato.

A questo punto non ci resta che disegnare i diagrammi di fase associati al sistema: ribadiamo che non andremo a disegnare un solo diagramma di fase, ma più diagrammi uniti nello stesso grafico, a ciascuno dei quali corrisponderà un diverso valore di E_0 .

La tecnica è abbastanza semplice: preso il grafico dell'energia potenziale, che abbiamo visto sopra, si disegnano due assi paralleli sottostanti a quelli attuali, in modo da poter avere un grafico sotto l'altro. Questo è utile poichè le intersezioni tra il grafico dell'energia potenziale e le rette delle energie fissate corrisponderanno nel diagramma di fase ai punti di elongazione massima o minima.


U(x)
6
4
2
0
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
x
-2
-4
ẋ
4
2
0
-6
-4
-2
0
2
4
6
x
x
-2
-4

Capitolo 2

Richiami di Meccanica Newtoniana

2.1 Relatività Galileiana

In generale, un **osservatore** O associa a ogni evento ξ una quaterna ordinata e univocamente determinata di coordinate reali $\begin{pmatrix} t_\xi \\ x_\xi \\ y_\xi \\ z_\xi \end{pmatrix}$, in un sistema di riferimento di cui occupa l'origine.

Dati due eventi ξ_1 e ξ_2 , l'intervallo di tempo che intercorre tra essi viene misurato dall'osservatore come $\Delta t_{1,2} = t_{\xi_2} - t_{\xi_1}$, mentre la distanza spaziale fra i due eventi viene misurata come $\Delta x_{1,2} = x_{\xi_2} - x_{\xi_1}$ e negli spazi normati n-dimensionali si misura come $\Delta x = \| x_1 - x_2 \|$.

Cambio di osservatore

Supponiamo di avere due osservatori O e O' .

L'ipotesi di fondo della relatività galileiana è che lo **spazio-tempo**, ovvero l'insieme di tutti gli eventi, sia uno spazio affine di dimensione 4.

Ricordando che uno **spazio affine** è quello formato dai vettori $S = v_0 + W$ con $W \in V$ sottospazio vettoriale e $v_0 \in V$.

Quindi, uno stesso evento descritto da O con le coordinate $\begin{pmatrix} t_\xi \\ x_\xi \\ y_\xi \\ z_\xi \end{pmatrix}$, viene descritto da O' con le **coordinate affini**: $\begin{pmatrix} t'_\xi \\ x'_\xi \\ y'_\xi \\ z'_\xi \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} t_\xi \\ x_\xi \\ y_\xi \\ z_\xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, con G matrice

4×4 e $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ vettore legato alla traslazione o la rotazione relativa tra i sistemi di riferimento centrati in O e O' .

L'equazione $\begin{pmatrix} t'_\xi \\ x'_\xi \\ y'_\xi \\ z'_\xi \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} t_\xi \\ x_\xi \\ y_\xi \\ z_\xi \end{pmatrix}$ è detta in geometria **equazione del cambio di fase** e in ambito fisico **equazione di cambio d'osservatore**.

Prima di descrivere la forma di G , è utile introdurre l'assioma della relatività galileiana e alcune classi di matrici.

l'assolutezza dello spazio-tempo

Assioma (di assolutezza dello spazio-tempo)

Comunque prese due misure del tempo, l'intervallo di tempo è invariante (o assoluto) tra ogni sistema di riferimento, inerziale o non.

In formule: $\Delta t'_{1,2} = G_{00}\Delta t_{1,2} + G_{01}\Delta x_{1,2} + G_{02}\Delta y_{1,2} + G_{03}\Delta z_{1,2}$ con G_{01} , G_{02} e G_{03} che devono valere 0 per le formule di trasformazione di sopra.

Quindi, con la trasformazione affine G , l'equazione del cambio di osservatore diventa in $(t\ 0\ 0\ 0)$:

$$\begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_x & r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ v_y & r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ v_z & r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t \\ v_x \Delta t \\ v_y \Delta t \\ v_z \Delta t \end{pmatrix} .$$

Con gli r_{ij} che formano una **matrice ortogonale** 3×3 , che chiameremo R .

Da questa equazione si ricavano le **trasformazioni di Galileo** tra due sistemi in quiete relativa:

$$\begin{cases} t' = t - t_0 \\ x' = v_x t - x_o \\ y' = v_y t - y_o \\ z' = v_z t - z_o \end{cases}$$

Proprietà della matrice R **Definizione** (di Gruppo Ortogonale)

In uno spazio di tre dimensioni, l'insieme delle matrici del tipo $O(3) = \{M_3(\mathbb{R}) : M^t \times M = 1_3\}$ si chiama "gruppo ortogonale".

Per le proprietà delle matrici risulta implicito che $M^t = M^{-1}$ e anche che $M \times M^t = 1_3$.

R fa parte del **gruppo ortogonale**.

Proposizione

$O(3)$ è un sottogruppo di $GL(3)$, ovvero il "gruppo delle matrici invertibili" 3×3
.

Gli elementi hanno quindi queste proprietà:

1. $|M| \neq 0$
2. $\nVdash_{\nvDash} \in O(3)$
3. $M_1, M_2 \in O(3) \implies M_1 \cdot M_2 \in O(3)$
4. $M \in O(3) \iff M^{-1} \in O(3)$

Dimostrazione

1. Poiché $(M^t \cdot M) = 1_3$ e quindi $|M^t \cdot M| = 1$, allora per il teorema di Binet e dato che $|M^t| = |M|$, possiamo dire che $|M^t||M| = 1$ e $|M|^2 = 1$ e quindi $|M| = \pm 1 \neq 0$.
2. Questo punto è ovvio, per la definizione di $\nVdash$.
3. Voglio dimostrare che $(M_1 M_2)^t M_1 M_2 = \nVdash_{\nvDash}$. Osservo che, per la proprietà associativa, e le proprietà di $O(3)$: $M_2^t(M_1^t M_1)M_2 = M_2^t M_2 = \nVdash_{\nvDash}$
4. Per le proprietà di $O(3)$ deduco che che $1_3 = (M^{-1})^t 1_3 M^{-1}$ e che $1_3 = (M^t)^{-1} 1_3 M^{-1}$. Inoltre, poiché $1_3 = M^t M$, quindi $(M^t)^{-1} M^t M M^{-1} = 1_3$ .Una possibile dimostrazione alternativa al punto quattro della proposizione è la seguente:

Dimostrazione (alternativa al punto 4)

Poiché $MM^t = 1_3$, $(R^t)^t R^t = (R^{-1})^t R^{-1} = 1_3$.

Questa dimostrazione è meno generale della prima, poiché non sempre si avvera la condizione $MM^t = 1_3$, come per esempio nel caso delle trasformazioni di Lorentz.

Osservazione

Dalle forma delle matrici, possiamo osservare come $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_x & r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ v_y & r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ v_z & r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$ sia una matrice invertibile, poiché $|G| = |R| = \pm 1$.

Composizione delle velocità

Considerando tre osservatori O , O' e O'' , per cui valga:

$$\begin{pmatrix}\Delta t'\\ \Delta x'\\ \Delta y'\\ \Delta z'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ v_x & r_{00} & r_{01} & r_{02}\\ v_y & r_{10} & r_{11} & r_{12}\\ v_z & r_{20} & r_{21} & r_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\Delta t\\ \Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}\Delta t''\\ \Delta x''\\ \Delta y''\\ \Delta z''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ v'_x & r'_{00} & r'_{01} & r'_{02}\\ v'_y & r'_{10} & r'_{11} & r'_{12}\\ v'_z & r'_{20} & r'_{21} & r'_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\Delta t'\\ \Delta x'\\ \Delta y'\\ \Delta z'\end{pmatrix}$$

Da queste uguaglianze, otteniamo che:

$$\begin{pmatrix}\Delta t''\\ \Delta x''\\ \Delta y''\\ \Delta z''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ v'_x & r'_{00} & r'_{01} & r'_{02}\\ v'_y & r'_{10} & r'_{11} & r'_{12}\\ v'_z & r'_{20} & r'_{21} & r'_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ v_x & r_{00} & r_{01} & r_{02}\\ v_y & r_{10} & r_{11} & r_{12}\\ v_z & r_{20} & r_{21} & r_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\Delta t\\ \Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ w_x & s_{00} & s_{01} & s_{02}\\ w_y & s_{10} & s_{11} & s_{12}\\ w_z & s_{20} & s_{21} & s_{22}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\Delta t\\ \Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix}$$

Per cui risulta

$$\begin{cases} w_x = v'_x + r'_{00}v_x + r'_{01}v_y + r'_{02}v_z \\ w_y = v'_y + r'_{10}v_x + r'_{11}v_y + r'_{02}v_z \\ w_y = v'_z + r'_{20}v_x + r'_{21}v_y + r'_{22}v_z \end{cases}$$

che sono le **formule di composizione delle velocità** tra O e O' derivate da quelle di O e O'' .

Osservazione

Queste operazioni di composizione e l'invertibilità delle matrici, dimostrano algebricamente che l'**inerzialità** di un sistema di riferimento rispetto ad un altro è una **relazione di equivalenza** (simmetrica, riflessiva e transitiva). Questo, insieme all'assolutezza dello spazio-tempo permettono di dimostrare che due sistemi di riferimento inerziali sono tra di loro indistinguibili rispetto a qualsiasi trasformazione meccanica e non esistono sistemi di riferimento assoluti.

2.1.1 Invariante Relativistico (excursus)

Al contrario di Galileo, per cui vale l'assioma di assolutezza dello spazio tempo, Hendrik Lorentz ha sviluppato sul finire del XIX secolo delle trasformazioni per cui l'invariante è la quantità $\Delta S^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$, chiamato **invariante relativistico** o **scalare di Lorentz**, con c velocità della luce, fattore che moltiplicato Δt lo rende un intervallo spaziale.

Questo risultato si ottiene dal prodotto $\begin{pmatrix}c\Delta t & \Delta x & \Delta y & \Delta z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & r_{01} & r_{02}\\ 0 & r_{10} & -1 & r_{12}\\ 0 & r_{20} & r_{21} & -1\end{pmatrix} \cdot$

$$\begin{pmatrix}c\Delta t\\ \Delta x\\ \Delta y\\ \Delta z\end{pmatrix} = c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)$$

La matrice al centro è chiamata η .

Lo spazio-tempo matiene la sua struttura affine anche con queste trasformazioni, oltre che con quelle di Galileo, infatti, considerata un'altra quaterna di coordinate $\begin{pmatrix} c\Delta t' & \Delta x' & \Delta y' & \Delta z' \end{pmatrix}$ vale l'uguaglianza $\begin{pmatrix} c\Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \Lambda \cdot \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$, con Λ matrice.

Da questa uguaglianza, si ottiene che $\begin{pmatrix} c\Delta t & \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{pmatrix} \cdot \Lambda^t \cdot \eta \cdot \Lambda \cdot \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} c\Delta t & \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{pmatrix} \cdot \eta \cdot \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$

Da cui si ottiene la **forma matriciale delle trasformazioni di Lorentz**: $\Lambda^t \cdot \eta \cdot \Lambda = \eta$. Una trasformazione è di Lorentz, se e solo se è descrivibile con una matrice Λ che rispetti questa equazione.

Conoscendo ΔS^2 è possibile ricavare la forma della matrice Λ , con metodi che vanno oltre questo specifico corso.

L'uso nella relatività ristretta Einstein fece uso, nella formulazione della **relatività speciale**, di una trasformazione di Lorentz in due dimensioni, poiché questa permetteva di mantenere il valore di c costante.

La matrice Λ associata alla trasformazione di Einstein è: $\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$.

Si dimostra che questa matrice è di Lorentz, poiché $\Lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 \\ 0 & \gamma^2(\beta^2-1) \end{pmatrix}$ e poiché, per definizione, $\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$. Quindi $\begin{pmatrix} \gamma^2(1-\beta^2) & 0 \\ 0 & \gamma^2(\beta^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.2 Principia di Newton

principia di Newton, o **principi della dinamica**, sono degli assiomi enunciati da Sir Isaac Newton e sui quali ha fondato lo studio della dinamica dei corpi.

Primo principio: il principio d'inerzia

Il **principio di inerzia (o di Galileo)**, afferma che un punto isolato si muove di moto rettilineo uniforme.

Siccome, per il principio di relatività galileiana gli intervalli di tempo sono indipendenti dal sistema di riferimento, considerando un punto materiale descritto da due diversi sistemi di riferimento P e P' , con le loro storie

$\begin{pmatrix} t & x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix}$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{dx(t)}{dt} & \frac{dy(t)}{dt} & \frac{dz(t)}{dt} \end{pmatrix}$

e $\begin{pmatrix} t' & x'(t) & y'(t) & z'(t) \end{pmatrix}$, $v' = \begin{pmatrix} \frac{dx'(t)}{dt'} & \frac{dy'(t)}{dt'} & \frac{dz'(t)}{dt'} \end{pmatrix}$,

posso scrivere $\underline{v}' = \begin{pmatrix} \frac{dx'(t)}{dt} & \frac{dy'(t)}{dt} & \frac{dz'(t)}{dt} \end{pmatrix}$.

Quindi, le trasformazioni galileiane che legano le due descrizioni possono scriversi (omettendo il tempo, in quanto assoluto) come:

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ v_y t \\ v_z t \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, quindi derivando entrambi i membri dell'equazione rispetto al tempo, si ottiene:

$\begin{pmatrix} \frac{dx'}{dt} \\ \frac{dy'}{dt} \\ \frac{dz'}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + R \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{v}_x t \\ \dot{v}_y t \\ \dot{v}_z t \end{pmatrix} + \frac{dR}{dt} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dove i primi due vettori nel lato destro dell'equazione sono delle costanti indipendenti dal tempo e le ultime due sono termini legate ad un' eventuale rotazione relativa tra i sistemi di riferimento (ma perché i due osservatori siano inerziali tra loro, devono valere 0).

Quest'equazione è una diversa dimostrazione di come le velocità si sommino in modo affine tra osservatori inerziali.

Secondo principio: il principio di di proporzionalità

Il **principio di proporzionalità** definisce il rapporto tra la derivata seconda della posizione di un punto e la risultante delle forze a cui è soggetto, che hanno quindi come medio proporzionale la **massa** (invariante secondo Newton, per eredità di Galileo). In formule:

$\underline{\ddot{x}} = \frac{F}{m}$ (è importante osservare che la forza è un vettore)

Quindi, secondo due osservatori su sistemi di riferimento diversi, uno stesso evento sarà descritto come:

$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$.

Terzo principio: il principio di azione-reazione

Il **principio di azione-reazione** dice che ogni forza $\underline{F_{21}}$ che viene applicata da un corpo O_1 su un un altro corpo O_2 è sempre associata ad una forza $\underline{F_{12}}$ di modulo uguale e verso opposto, diretta come a congiungente tra i due corpi.

In formule $\underline{F_{21}} = -\underline{F_{12}}$ e $\underline{F_{21}} \simeq \underline{x_1} - \underline{x_2}$

Osservazione

In meccanica classica, un punto materiale non può *auto-interagire*, ovvero non può applicare su di sé una forza e subirne gli effetti in moto. Una condizione del genere contraddirebbe il primo principio della dinamica.

In formule: $\begin{cases} m\ddot{x}_1 = \underline{F_{21}} + \underline{F_{11}} = \underline{F_{21}} \\ m\ddot{x}_2 = \underline{F_{12}} + \underline{F_{22}} = \underline{F_{12}} \end{cases}$

Modulo della forza

Poiché la forza reciproca fra due forze agisce sulla loro congiungente, possiamo esprimerla in funzione del suo modulo ϕ : $\underline{F_{12}} = \frac{\underline{x}-\underline{y}}{\left\|\underline{x}-\underline{y}\right\|}\phi$

Quindi il sistema il sistema delle forze diventa $\begin{cases} m\ddot{x}_1 = \frac{\underline{x}-\underline{y}}{\left\|\underline{x}-\underline{y}\right\|}\phi \\ m\ddot{x}_2 = \frac{\underline{y}-\underline{x}}{\left\|\underline{x}-\underline{y}\right\|}\phi \end{cases}$.

Ora, supponendo in generale che la forza sia un funzione temporale, possiamo scrivere: $\phi = \phi(\underline{x}, \underline{y}, t)$.

Questo, però, insieme all'*omogeneità del tempo* $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0\right)$, ci permette di scrivere $\phi = \phi(\underline{x}, \underline{y})$ e per *l'omogeneità dello spazio* possiamo scrivere $\phi = \phi(\underline{x} - \underline{y})$. Infine, considerando *l'isotropia dello spazio*, ovvero l'invarianza rispetto a qualsiasi direzione, possiamo scrivere $\phi = \phi(\left\|\underline{x} - \underline{y}\right\|)$.

Osservazione

Se la forza dipendesse anche dalla velocità dei punti (come nel caso dell'attrito viscoso), potremmo scrivere $\phi = \phi(\underline{x} - \underline{y}, \underline{\dot{x}} - \underline{\dot{y}})$ e per *l'isotropia dello spazio* potremmo definire il modulo della forza in funzione di tre coordinate indipendenti dalla rotazione, dalla rotazione, dal tempo e dalla rotazione. Quindi: $\phi = \phi(\left\|\underline{x} - \underline{y}\right\|, \left\|\underline{\dot{x}} - \underline{\dot{y}}\right\|, (\underline{x} - \underline{y})(\underline{\dot{x}} - \underline{\dot{y}}))$.

Forze e Potenziale

Definizione (Potenziale)

Una forza si dice *ammettere potenziale* se $\exists U : \underline{F} = -\nabla U$.

Questa definizione non è immediatamente estendibile a più dimensioni: perché un campo vettoriale ammetta un potenziale scalare è necessario che il suo rotore sia nullo. Deve essere quindi $(\nabla \times F) = 0$.

Per esempio, su $\mathbb{R}^3$, per ogni componente della forza $F = (F_1, F_2, F_3)$ questo corrisponde alla condizione seguente, che deriva dal *teorema di Schwartz* (per esempio su F_3):

$F_3 = -\frac{\partial U}{\partial x_3} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \equiv 0$.

2.3 Sistemi di Punti Materiali

concetti espressi dai principia di Newton possono essere ampliati anche a sistemi di n punti materiali (liberi).

Grandezze globali

Un sistema può essere descritto mediante delle quantità derivate dalla somma delle proprietà dei singoli punti che lo formano.

- La **massa del sistema** si calcola come $M = \sum_k^n m_k$
- Il **momento lineare** del sistema si calcola come $\underline{p} = \sum_k^n m_k \underline{\dot{x}_k}$
- Il **momento angolare** del sistema (rispetto al polo θ)si calcola come $\underline{L_\theta} = \sum_k^n (\underline{x_k} - \theta) \times m_k \underline{\dot{x}_k}$
- Il **centro di massa** del sistema $G = \frac{\sum_k^n m_k \underline{x_k}}{M}$

Proprietà globali

Un assioma utilizzato di Newton è il **principio di sovrapposizione**, per cui se ho un sistema di n elementi, gli effetti delle forze esercitate su di un punto sono tutte le forze che gli vengono applicate dagli altri punti.

Quindi: $\begin{cases} m\ddot{x}_1 = \underline{F_{21}} + \underline{F_{31}} + \cdots + \underline{F_{n1}} \\ m\ddot{x}_2 = \underline{F_{12}} + \underline{F_{23}} + \cdots + \underline{F_{n2}} \\ \ldots \\ m\ddot{x}_n = \underline{F_{n1}} + \underline{F_{n2}} + \cdots + \underline{F_{n(n-1)}} \end{cases}$

Altre due proprietà fondamentali sono invece le due *equazioni cardinali della dinamica*

Teorema (Prima equazione cardinale della dinamica)

Il moto del centro di massa di un sistema dipende solo dalle forze esterne al sistema:

$\frac{d}{dt}\underline{p}^{tot} = \sum_k^n \underline{F_k}^{ext}$

Dimostrazione

Per la definizione dell'impulso possiamo scrivere $\frac{d}{dt}\underline{p}^{tot} = \sum_k^n \underline{F_k}^{tot} = \sum_k^n \left(\underline{F_k}^{ext} + \underline{F_k}^{int}\right)$

Per il terzo principio della dinamica, possiamo osservare come tutte le forze interne siano a coppie uguali e opposte e quindi la loro somma è nulla. Da cui la tesi.

Osservazione

Per un sistema soggetto a una somma di forze esterne nulla, $\frac{d}{dt}\underline{p}^{tot} = 0$, quindi il centro di massa del sistema si muove di moto rettilineo uniforme

Prima di introdurre la *seconda equazione cardinale* e la sua dimostrazione, è utile ricordare questa proprietà dei prodotti tra vettori:

Lemma

$\frac{d}{dt} = (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{\dot{A}} \times \underline{B} + \underline{A} \times \underline{\dot{B}}$ e $\frac{d}{dt} = (\underline{A} \cdot \underline{B}) = \underline{\dot{A}} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{\dot{B}}$

Teorema (Seconda equazione cardinale della dinamica)

Il momento angolare del sistema dipende dalla velocità del polo e dalla somma dei momenti rispetto al polo dei singoli punti:

$\frac{d}{dt}\underline{L}^{tot} = -\underline{\dot{\theta}} \times \underline{p}^{tot} + \sum_k^n \left((\underline{x_k} - \underline{\theta}) \times \underline{F_k}^{ext} \right)$

Dimostrazione

Considero $\frac{d}{dt}\left((\underline{x_k} - \underline{\theta}) \times \ m_k \underline{\dot{x}} \right) = m_k \frac{d}{dt}\left((\underline{x_k} - \underline{\theta}) \times \underline{\dot{x}} \right)$

Per il lemma precedente, posso scrivere $\frac{d}{dt}\left((\underline{x_k} - \underline{\theta}) \times \ m_k \underline{\dot{x}} \right) = m_k \left(\underline{\dot{x_k}} \times \underline{\dot{x_k}} - \underline{\dot{\theta}} \times \underline{\dot{x_k}} + (\underline{x_k} - \underline{\theta}) \times \underline{\ddot{x_k}} \right)$
$-\underline{\dot{\theta}} \times m_k \underline{\dot{x_k}} + (\underline{x_k} - \underline{\theta}) \times m_k \underline{\ddot{x_k}}$ Portando la formula ad una somma di contributi (che ricordiamo essere una grandezza additiva), otteniamo la tesi, poiché:
$-\sum_k^n \left(\underline{\dot{\theta}} \times m_k \underline{\dot{x_k}} \right) = -\sum_k^n \left(\underline{\dot{\theta}} \times \underline{p_k} \right)$ e $\sum_k^n \left((\underline{x_k} - \underline{\theta}) \times m_k \underline{\ddot{x_k}} \right) = \sum_{k,j}^n \left((\underline{x_k} - \underline{\theta}) \times \underline{F_{kj}}^{int} \right) +$
$\sum_k^n \left((\underline{x_k} - \underline{\theta}) \times \underline{F_k}^{ext} \right))$

Con $\sum_{k,j}^n \left((\underline{x_k} - \underline{\theta}) \times \underline{F_{kj}}^{int} \right) = \sum_{k,j}^n \left(\underline{x_k} \times \underline{F_{kj}}^{int} \right) - \underline{\theta} \times \sum_{k,j}^n \underline{F_{kj}}^{int}$.

Quest'uguaglianza è identicamente uguale a 0 poiché il secondo termine della parte destra è nullo per la dimostrazione precedente e il primo termine della parte destra può essere riscritto come:

$\sum_{k,j}^n \left(\underline{x_k} \times \underline{F_{kj}}^{int} \right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k,j}^n \left(\underline{x_k} \times \underline{F_{kj}}^{int} \right) + \sum_{k,j}^n \left(\underline{x_k} \times \underline{F_{kj}}^{int} \right) \right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k,j}^n \left(\underline{x_k} \times \underline{F_{kj}}^{int} \right) + \sum_{k,j}^n \left(\right. \right.$
Dove la terza parte dell'uguaglianza ha subito solo un cambio di variabile rispetto alla seconda.

Ora, per il terzo principio della dinamica:

$\sum_{k,j}^n \left(\underline{x_k} \times \underline{F_{kj}}^{int} \right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k,j}^n \left(\underline{x_k} \times \underline{F_{kj}}^{int} \right) - \sum_{k,j}^n \left(\underline{x_j} \times \underline{F_{kj}}^{int} \right) \right) = \frac{1}{2}\sum_{k,j}^n \left((\underline{x_k} - \underline{x_j}) \times \underline{F_{kj}}^{int} \right)$

e $\frac{1}{2}\sum_{k,j}^n \left((\underline{x_k} - \underline{x_j}) \times \underline{F_{kj}}^{int} \right) = \frac{1}{2}\sum_{k,j}^n \left((\underline{x_k} - \underline{x_j}) \times \frac{(\underline{x_k} - \underline{x_j})}{\left\| (\underline{x_k} - \underline{x_j}) \right\|} \phi \left\| (\underline{x_k} - \underline{x_j}) \right\| \right) =$
0 .

Capitolo 3

Fonti per testo e immagini; autori; licenze

3.1 Testo

- **Corso:Meccanica classica/Sistemi Dinamici/Spazio delle fasi e diagramma di fase** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_classica/Sistemi_Dinamici/Spazio_delle_fasi_e_diagramma_di_fase?oldid=47819 *Contributori:* Sofia, Toma.luca95, V.e.padulano, WikiToBot e Move page script
- **Corso:Meccanica classica/Sistemi Dinamici/Dal grafico dell'energia potenziale al diagramma di fase** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_classica/Sistemi_Dinamici/Dal_grafico_dell'energia_potenziale_al_diagramma_di_fase?oldid=50168 *Contributori:* Valsdav, V.e.padulano, WikiToBot, Move page script e Rp60
- **Corso:Meccanica classica/Richiami di Meccanica Newtoniana/Relatività Galileiana** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_classica/Richiami_di_Meccanica_Newtoniana/Relativit%C3%A0_Galileiana?oldid=49688 *Contributori:* Toma.luca95, Irene, ScimmiaSpaziale, Rp60 e Anonimo: 1
- **Corso:Meccanica classica/Richiami di Meccanica Newtoniana/Principia di Newton** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_classica/Richiami_di_Meccanica_Newtoniana/Principia_di_Newton?oldid=49693 *Contributori:* ScimmiaSpaziale, Rp60 e Anonimo: 2
- **Corso:Meccanica classica/Richiami di Meccanica Newtoniana/Sistemi di Punti Materiali** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_classica/Richiami_di_Meccanica_Newtoniana/Sistemi_di_Punti_Materiali?oldid=49715 *Contributori:* ScimmiaSpaziale e Rp60

3.2 Immagini

- **File:Dyn_sys_1.svg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/9/9a/Dyn_sys_1.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Dyn_sys_2.svg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/0/02/Dyn_sys_2.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Dyn_sys_4.svg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/b/b4/Dyn_sys_4.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Mech_1.svg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/1/1a/Mech_1.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

3.3 Licenza dell'opera

- [Project:Copyright Creative Commons Attribution Share Alike 3.0 & GNU FDL]