Utente: Dan/Elettromagnetismo/Extra/Le equazioni di Jefimenko

Le equazioni di Jefimenko, a volte note come *campi di Jefimenko*, sono delle espressioni dei campi elettrici e magnetici ricavati direttamente dai potenziali ritardati, applicando la definizione. Stranamente sono stati pubblicati molto recentemente, nel 1966, cento anni dopo la pubblicazione del trattato di Maxwell. Questo è anche dovuto al fatto che non siano di grande utilità questi campi: è spesso più semplice ricavarsi i potenziali e poi derivarli piuttosto che applicare direttamente questi.

Dati i potenziali ritardati nel vuoto:

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\tau \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t-\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{c}\right)}{|\Delta\mathbf{r}|}d\tau'$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_=}{4\pi}\int_\tau \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t-\frac{|\Delta\mathbf{r}|}{c}\right)}{|\Delta\mathbf{r}|}d\tau'$$

Ricaviamo i campi come:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$
$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$$

Partiamo dal calcolare il gradiente del potenziale scalare. Questo sarà:

$$\boldsymbol{\nabla}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\tau \left[(\boldsymbol{\nabla}\rho)\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|} + \rho\,\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|}\right)\right]d\tau$$

Procediamo passo passo. Calcoliamo:

$$\boldsymbol{\nabla}\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\left(t - \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{c}\right) = -\dot{\rho}\frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla}(|\Delta\mathbf{r}|)$$

D'altro canto, $\boldsymbol{\nabla}(|\Delta\mathbf{r}|) = \hat{\Delta\mathbf{r}}$, e $\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\Delta\mathbf{r}|}\right) = -\frac{\hat{\Delta\mathbf{r}}}{|\Delta\mathbf{r}|^2}$. Quindi:

$$\boldsymbol{\nabla}V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\tau \left[-\frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\hat{\Delta\mathbf{r}}}{|\Delta\mathbf{r}|} - \frac{\rho}{|\Delta\mathbf{r}|^2}\hat{\Delta\mathbf{r}}\right]d\tau'$$

Banalmente, la derivata temporale del potenziale vettore:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \frac{\dot{J}}{|\Delta \mathbf{r}|} d\tau'$$

Quindi il campo elettrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_\tau \left[\left(\frac{\dot{\rho}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{c}\right)}{c|\Delta \mathbf{r}|} + \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{c}\right)}{|\Delta \mathbf{r}|^2}\right)\hat{\Delta \mathbf{r}} - \frac{\dot{\mathbf{J}}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{c}\right)}{c^2|\Delta \mathbf{r}|}\right] d\tau'$$

Per il campo magnetico dovremo calcolare il rotore del potenziale vettore:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \times \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|}\right)\right) d\tau'$$

Dove abbiamo usato:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (f\mathbf{v}) = f\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\nabla} f \times \mathbf{v} = f\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\nabla} f$$
$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\mathbf{J}}{|\Delta \mathbf{r}|}\right) = \frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \times \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|}\right)$$

Il rotore della densità di corrente è:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{J} = \left(\frac{\partial J_z}{\partial y} - \frac{\partial J_y}{\partial z}, \frac{\partial J_x}{\partial z} - \frac{\partial J_z}{\partial x}, \frac{\partial J_y}{\partial x} - \frac{\partial J_x}{\partial y}\right)$$

Questo è brutto. Però possiamo migliorarla un po', ad esempio:

$$\frac{\partial J_z}{\partial y} = \frac{\partial J_z}{\partial t}\frac{\partial\left(t - \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{c}\right)}{\partial y} = -\dot{J}_z \frac{1}{c}\frac{\partial(|\Delta \mathbf{r}|)}{\partial y}$$

La componente $\hat{\mathbf{x}}$ del rotore può essere scritta come:

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{J})_x = -\frac{1}{c}\left(\dot{J}_z\frac{\partial(|\Delta \mathbf{r}|)}{\partial y} - \dot{J}_y\frac{\partial(|\Delta \mathbf{r}|)}{\partial z}\right)$$

In conclusione (se non vi fidate, rifate i calcoli) $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{J} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{J}} \times \hat{\Delta \mathbf{r}}$. Il primo termine è fatto, che faticaccia.

Il secondo termine è per fortuna noto, $\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\Delta \mathbf{r}|}\right) = -\frac{\hat{\Delta \mathbf{r}}}{|\Delta \mathbf{r}|^2}$. Quindi, otteniamo anche il campo magnetico di Jefimenko:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\tau \left(\frac{1}{c}\frac{\dot{\mathbf{J}}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{c}\right)}{|\Delta \mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{c}\right)}{|\Delta \mathbf{r}|^2}\right) \times \hat{\Delta \mathbf{r}}\, d\tau'$$

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Extra/Le equazioni di Jefimenko** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Extra/Le_equazioni_di_Jefimenko?oldid=46190 *Contributori:* Dan

1.2 Immagini

1.3 Licenza dell'opera