Utente: Dan/Elettromagnetismo/Campo elettromagnetico e onde/La quarta equazione di Maxwell

1 L'elettromagnetismo prima di Maxwell

Per fare il punto della situazione, possiamo dire che tutto quello che abbiamo visto finora è la sintesi di tutto l'elettromagnetismo prima che Maxwell ci mettesse mano, ed 'è riassumibile nelle quattro equazioni differenziali che abbiamo a lungo discusso in tutto il corso:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}
\end{aligned}$$

Sappiamo anche cosa rappresentano fisicamente: la prima e la seconda (le divergenze) ci dicono che esistono sorgenti puntiformi e isolate di campo elettrico, mentre questo non vale per il campo magnetico. Le due leggi sono universali e valide in qualunque contesto, statico, quasi-stazionario o dinamico puro, a patto di porre la carica funzione sia del tempo che della posizione $\rho(\mathbf{r}, t)$. La terza equazione l'abbiamo studiata nel capitolo scorso come conseguenza della legge di Faraday-Neumann, e ci mostra come, in caso statico, il campo elettrico sia conservativo, mentre non lo è nel caso dinamico, dove possono esistere campi elettrici solenoidali generati da campi magnetici variabili nel tempo. La quarta equazione è stata dimostrata da Ampere e risolve il problema della carica sorgente del campo magnetico, individuandolo nella corrente elettrica.

Questo era il panorama generale sugli studi elettrici e magnetici a circa metà del 1800: gli studi erano stati portati avanti per quasi un secolo da diverse personalità che abbiamo già incontrato, come Faraday, Ampere, Franklin, Coulomb e altri. Arrivò poi Maxwell e riordinò tutto in una teoria organica, e qui il suo contributo spicca di più: la quarta equazione, infatti, non è adeguata al caso dinamico.

Quando infatti $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ (ovvero in caso dinamico con sorgenti elettriche dipendenti dal tempo), c'è una sostanziale incongruenza nella quarta equazione: se calcoliamo la divergenza del rotore di $\mathbf{B}$, questa deve essere sempre nulla, ma in questo caso non è proprio vero che lo sia.

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$$

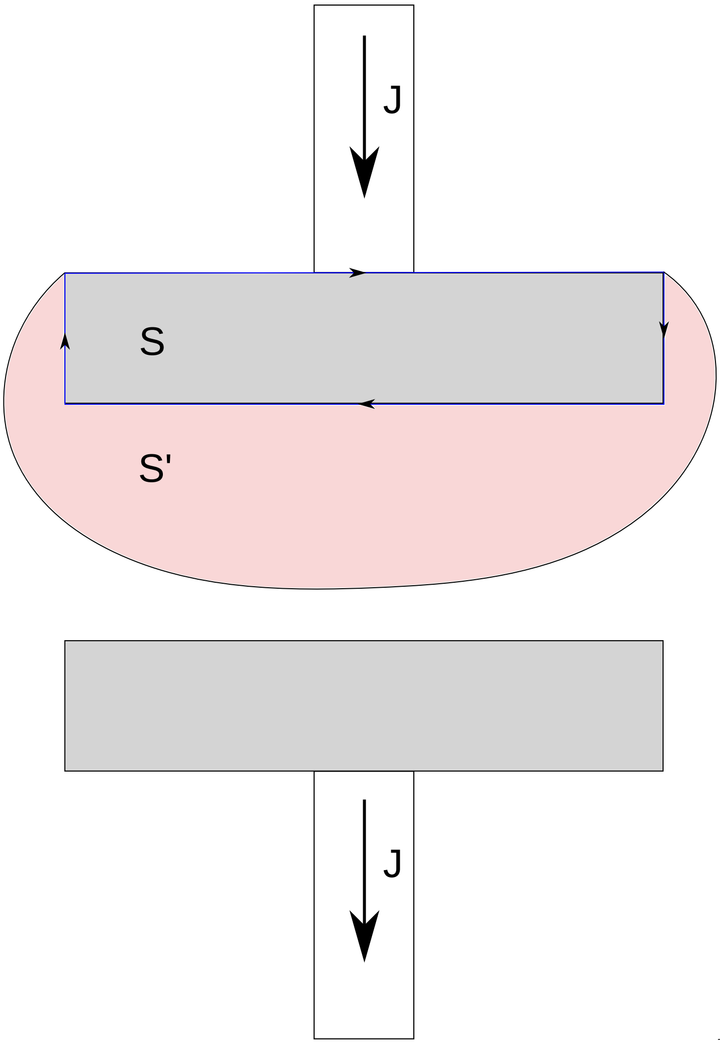

Fig. 9.1.

Ma, dall'equazione di continuità, sappiamo che $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0$ se e solo se $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. In caso dinamico, allora, c'è un'incongruenza matematica nell'espressione della quarta equazione.

Finché le incongruenze sono solo matematiche, si può anche provare a salvare l'equazione operando opportunamente. Se, però, le incongruenze sono anche fisiche, allora l'equazione deve in qualche modo essere "aggiustata". Infatti la quarta equazione è incongruente anche dal punto di vista fisico, ed è osservabile nel caso del condensatore. Consideriamo un condensatore che si carica: nel circuito passa una corrente variabile nel tempo $I(t) = -\frac{f}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$, a cui corrisponde quindi un campo magnetico variabile nel tempo. Prendiamo in considerazione la figura 9.1, in cui vediamo da vicino le armature del condensatore, e applichiamo la formulazione integrale della quarta equazione alla curva Γ che rappresenta il contorno dell'armatura, scegliendo come superficie concatenata la superficie S dell'armatura stessa, avremo:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I^{\text{conc}} = \mu_0 \Phi_S(\mathbf{J}) = \mu_0 \mathbf{J}$$

Ma se scegliamo la superficie S' , questa non ha alcuna corrente concatenata attraverso essa, e quindi $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$! Applicando la stessa formula allo stesso cammino, ma scegliendo due diverse superfici concatenate, otteniamo due risultati diversi, e questo va contro tutta l'analisi vettoriale. In qualche modo, quindi, la quarta equazione non è adeguata.

2 La proposta di Maxwell

Fu qui che venne fuori l'abilità di Maxwell: egli osservò che, ogni volta che esiste un campo elettrico variante nel tempo, come nel caso del condensatore che si carica o scarica, la legge di Ampere non è più valida, e va in qualche modo risolta. La proposta di Maxwell è una soluzione totalmente matematica e teorica, e si dovettero attendere quasi trent'anni quando, nel 1888, Hertz riuscì finalmente a verificare sperimentalmente l'esistenza delle onde elettromagnetiche.

La soluzione proposta di Maxwell ruota attorno a due idee fondamentali: la prima è che $\nabla \times \mathbf{B}$ deve essere, *in ogni caso immaginabile*, un campo solenoidale, e la seconda è quella che tutta la teoria studiata finora non è isolata da questo problema, e quindi la soluzione va cercata anche nelle espressioni già note. A tal proposito, considerò sia la prima equazione che la legge di continuità per risolvere il problema.

Se il rotore del campo magnetico deve essere solenoidale, alla soluzione già nota possiamo aggiungere un altro campo vettore $\mathbf{Z}$ tale che $\nabla \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{Z}) = 0$ sia solenoidale. Se troviamo un campo $\mathbf{Z}$ dipendente dal tempo, risolviamo completamente il problema: in caso statico apparirà solo la corrente a dar contributo, coerentemente con quanto visto in magnetostatica, mentre in caso dinamico la loro somma sarà comunque un campo solenoidale che quindi non "rompe" la matematica.

A questa idea matematica Maxwell aggiunge la fisica fino ad allora nota, ovvero la prima equazione e la legge di continuità. Infatti, data $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ e data l'equazione di continuità, possiamo sostituire:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$$

Osservando che la divergenza non ha nulla a che fare col tempo e possiamo quindi invertire divergenza e derivata temporale, otteniamo un'espressione carina:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0$$

Questo è un campo solenoidale per come è costruito, e quando il campo elettrico non varia nel tempo è la corrente $\mathbf{J}$ a essere solenoidale, riconducendoci al caso statico; è inoltre compatibile con la prima equazione e con la conservazione della carica. La proposta di Maxwell è stata proprio quella di porre $\mathbf{Z} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$, ottenendo così **la quarta equazione di Maxwell generale**:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_s)$$

Dove $\mathbf{J}_s$ si chiama **corrente di spostamento** (perché deriva dal campo spostamento elettrico, ma guarda un po'), ha proprio le dimensioni di una corrente e, come vedremo nel caso esplicito del condensatore, è proprio come se tra le armature passasse una corrente pari a $\mathbf{J}_s$

3 Esempio classico del condensatore

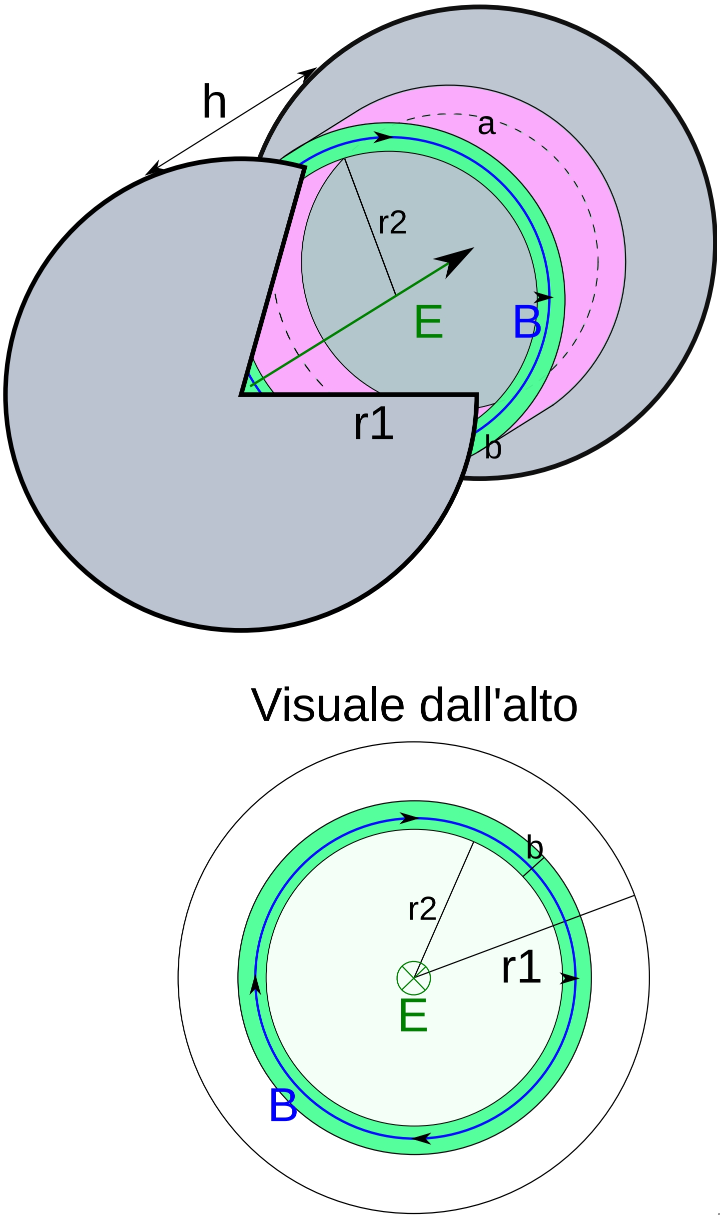

Fig. 9.2.

Vediamo come la quarta equazione di Maxwell risolva completamente i problemi legati al condensatore, rimandando alla prossima sezione le analisi sulle equazioni di Maxwell. Consideriamo un sistema come in figura 9.2: abbiamo un condensatore piano ad armature piane e circolari, di raggio r_1 e distanziate tra loro h ; nel condensatore è inserito un solenoide toroidale di spire rettangolari, con dimensioni a, b ; il solenoide ha raggio r_2 con la condizione che $b << r_2$ e, quindi, abbiamo $b << r_2 < r_1$. Il solenoide ha N spire.

In questa configurazione, semplicemente facendo variare la differenza di potenziale ai capi del condensatore (quindi caricandolo o scaricandolo), avremo un campo elettrico variabile nel tempo e, di conseguenza, si formerà un campo magnetico dipendente dal tempo senza che ci sia una particolare sorgente a generarlo. Il condensatore, di capacità C , è collegato a un circuito con resistenza R_0 e generatore ideale che mantiene una differenza di potenziale pari a f ai suoi capi. Le equazioni seguenti ci danno la carica che si addensa sulle armature del condensatore, la corrente che circola nel circuito e il potenziale ai capi del condensatore in funzione del tempo (posto $\tau = R_0 C$:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \frac{f}{C}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \\ I(t) &= -\frac{f}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ V(t) &= \frac{Q}{C} = f\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{aligned}$$

Dall'ultima ricaviamo il campo elettrico che si genera nel condensatore, pari a $E(t) = \frac{V(t)}{h}$. Il campo magnetico che si genera risolve la quarta equazione di Maxwell $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. Per come abbiamo posizionato il nostro solenoide, **il campo magnetico che si genera è tutto al suo interno**. Questo è un esperimento che può essere realizzato in laboratorio e ci chiediamo di calcolare il rapporto:

$$\frac{q}{Q(t \to \infty)}$$

Dove q è la carica che circola nel solenoide misurata da un galvanometro balistico e $Q(\infty)$ è la carica sulle armature del condensatore nel limite del tempo che tende a infinito. Tutto questo è misurabile sperimentalmente.

Abbiamo allora un potenziale che cresce nel tempo $V(t)$, di conseguenza anche $E(t)$ cresce nel tempo. La derivata temporale del campo elettrico è quindi positiva e *ha lo stesso verso del campo*, di conseguenza il campo magnetico che si genera ha linee di forza circolari percorse nel verso dato dalla mano destra rispetto al campo elettrico. Al contrario, se il condensatore si scaricasse, la derivata temporale del campo elettrico sarebbe negativa, avrebbe verso opposto rispetto al campo elettrico e quindi il campo magnetico circola in direzione opposta rispetto a come farebbe se il campo elettrico aumentasse (nell'immagine consideriamo che il campo aumenti, quindi il condensatore si sta caricando).

All'interno del condensatore $\mathbf{E}$ è uniforme nello spazio per definizione di condensatore, quindi lo è anche la sua derivata rispetto al tempo. Applichiamo, per ricavare $\mathbf{B}$, il teorema della circuitazione di Ampere lungo una curva Γ che è una circonferenza di raggio variabile e otteniamo:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_\Gamma B dl = B(r)\, 2\pi r = \mu_0 I^{\text{conc}} = \mu_0\, J_s \pi r^2$$

Ricaviamo da questa il campo magnetico nel solenoide:

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0}{2} J_s r\, \hat{\mathbf{t}} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} r \frac{\partial E}{\partial t}\, \hat{\mathbf{t}}$$

Per poter calcolare la carica q , dobbiamo applicare la legge di Felici, in cui abbiamo bisogno di calcolare il flusso iniziale e finale del campo magnetico attraverso il soelnoide, che è:

$$\Phi_{\text{sol}}(\mathbf{B}) = N \int_{\text{spira}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = N B(S)\, ab = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{2} r_2 N\, ab\, \frac{\partial E}{\partial t}$$

Da questa ricaviamo facilmente la carica applicando la legge di Felici:

$$q = \frac{1}{R_0} \frac{N\, ab\, \mu_0 \epsilon_0\, r_2}{2} \left(\left.\frac{\partial E}{\partial t}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial E}{\partial t}\right|_{t=\infty} \right)$$

A questo punto dobbiamo calcolare la derivata temporale del campo elettrico e calcolarne il valore a tempo iniziale e tempo infinito:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{f}{h} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{f}{h R_0 C} e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow \begin{cases} t = 0 \;\; E(0) = \dfrac{f}{h R_0 C} \\ t = \infty \;\; E(\infty) = 0 \end{cases}$$

Otteniamo la carica q misurata dal galvanometro:

$$q = \frac{N\, ab\, \mu_0 \epsilon_0\, r_2}{2 h R_0 C} \frac{f}{C}$$

Osservando che $Q(\infty) = fC$, otteniamo quello che richiede l'esercizio:

$$\frac{q}{Q(\infty)} = \frac{N\, ab\, \mu_0 \epsilon_0\, r_2}{2 h R_0 C^2}$$

Sperimentalmente, è verificata questa dipendenza e, quindi, è verificata la quarta equazione di Maxwell.

4 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

4.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Campo elettromagnetico e onde/La quarta equazione di Maxwell** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Campo_elettromagnetico_e_onde/La_quarta_equazione_di_Maxwell?oldid=46181 *Contributori:* Dan

4.2 Immagini

- **File:Figura9-1ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/2/28/Figura9-1ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura9-2ELM.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/3/30/Figura9-2ELM.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

4.3 Licenza dell'opera