Utente:Dan/Elettromagnetismo/ Elettrostatica/Le equazioni di Poisson e Laplace

Abbiamo visto vari modi di risolvere i problemi di elettrostatica, sfruttando il teorema di Gauss e le equazioni di Maxwell. Tuttavia, ad essere rigorosi, quello che abbiamo fatto finora è stato solo "giocare" con cariche, campi e potenziali. Infatti lo studio vero dell'elettrostatica consiste nel risolvere quella che viene chiamata **equazione di Poisson** o, come più spesso accade, **l'equazione di Laplace**.

1 Le equazioni di Poisson e di Laplace

Per ottenerle, partiamo dalle due equazioni di Maxwell nel caso statico. Dalla prima sappiamo che $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, mentre la seconda $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$ ci dice che il campo elettrico *è conservativo* e può essere scritto come il gradiente del suo potenziale, che abbiamo indicato con $\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V$. Unendo queste due equazioni, otteniamo **l'equazione di Poisson**:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} &= 0 \end{aligned}\right\} \boldsymbol{\nabla} \cdot (-\boldsymbol{\nabla} V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \rightarrow \boldsymbol{\nabla}^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

L'operatore $\boldsymbol{\nabla}^2$ è detto **laplaciano**, è un operatore scalare definito come il gradiente per se stesso (prodotto scalare) e vale:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

L'equazione di Poisson può essere quindi scritta esplicitamente:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Questa è **un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine non omogenea** e rappresenta *la vera elettrostatica*, ovvero se risolta, di problema in problema, fornisce la soluzione giusta del potenziale per tutti i problemi dell'elettrostatica. Poiché è del secondo ordine, necessita di due condizioni al contorno. Tuttavia, non è un'equazione differenziale ordinaria, ma *alle derivate parziali*, il che complica non poco le cose.

Tuttavia, spesso ci interessa trovare il potenziale *in regioni di spazio vuote*, ovvero dove $\rho = 0$; il che ha senso: abbiamo una certa distribuzione di carica nello spazio, sparsa randomicamente un po' qua e un po' là, e ci interessa calcolare il potenziale in un punto dello spazio in cui non sono presenti cariche elettriche. In questi casi si passa alla **equazione di Laplace**:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 V = 0$$

La soluzione generale di questa equazione *non è ricavabile*: le equazioni differenziali alle derivate parziali, infatti, non sono come le equazioni differenziali ordinarie. Per un'equazione differenziale del secondo ordine sappiamo che esiste una soluzione generale, dipendente da due costanti, che rappresenta tutte le possibili soluzioni particolari, che poi vengono trovate applicando le condizioni al contorno e ricavando le variabili. Per le equazioni alle derivate parziali, invecee, **non esiste un insieme finito di costanti** che ci permetta di fare ciò: in parole povere, la soluzione generale dipende da **infinite costanti**. Il che potrebbe sembrare ostico, e in realtà lo è, però a noi non interessa la soluzione generale, bensì le proprietà che queste funzioni hanno. Le funzioni che risolvono l'equazione di Laplace sono dette **funzioni armoniche**.

2 L'equazione di Laplace unidimensionale

Per poter studiare bene le proprietà della soluzione all'equazione di Laplace, procediamo per gradi, salendo di volta in volta di dimensioni. Nel caso unidimensionale, l'equazione di Laplace è banale:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

Questa equazione accetta un solo tipo di soluzioni: $V = ax + b$, ovvero delle rette dipendenti da a, b , che si ricavano applicando le condizioni al contorno. Per queste soluzioni abbiamo diverse proprietà:

1. non hanno ne minimi ne massimi: questi valori vengono infatti assunti *agli estremi dell'intervallo di definizione*;
2. vale il teorema della media;
3. la soluzione è unica.

Sull'unicità della soluzione ci soffermeremo poco: nelle appendici c'è la dimostrazione del teorema di esistenza e unicità. Sul fatto che una retta non abbia ne minimi, ne massimi, c'è poco da dire, è banale. Non banale è, invecee, la valenza del *teorema della media*: questo ci dice che, preso un intorno di un punto x che sia $[x-\alpha; x+\alpha]$, il valore del potenziale in x **è pari alla media dei potenziali ai bordi dell'intorno**, ovvero:

$$V(x) = \frac{V(x-\alpha) + V(x+\alpha)}{2}$$

Questo vale per ogni retta, ed è valido per qualsiasi valore di α , e la cosa non è così sorprendente. Tuttavia, lo diventa salendo di dimensioni.

3 L'equazione di Laplace bidimensionale

In due dimensioni, l'equazione di Laplace diventa:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Già in questo caso *la soluzione generale dipende da infinite costanti*, quindi non è ricavabile. Tuttavia, la cosa interessante è che **vengono mantenute tutte le proprietà della soluzione unidimensionale**, e questo vale per qualsiasi dimensione abbia la soluzione. Quindi la funzione che la risolve *non ha ne minimi ne massimi*, ovvero ha solo punti di sella, è unica e vale il teorema della media bidimensionale.

In due dimensioni un intorno di un punto può essere considerato una circonferenza; questo vuol dire che, preso un punto dello spazio (x, y) , il valore del potenziale in questo punto equivale alla media del potenziale lungo la circonferenza di raggio R e centrata in quello stesso punto:

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\text{circ}} V dl$$

Come nel caso unidimensionale, questo è valido per ogni valore di R .

4 L'equazione di Laplace tridimensionale

La solfa è la stessa: non possiamo scrivere la soluzione generale ma sappiamo che proprietà deve rispettare. Ed è questo il caso che ci interessa, in quanto il potenziale elettrostatico è una funzione dello spazio; questa non avrà minimi, ne massimi, solo punti di sella, la soluzione è unica e vale il teorema della media che in tre dimensioni viene applicato *sulla superficie sferica* centrata nel punto:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\text{sup. sfera}} V dS$$

5 Equilibrio del campo elettrostatico

Queste proprietà ci danno un'informazione importante: **il potenziale ha solo punti di sella**. Questo vuol dire che **anche l'energia potenziale ha solo punti di sella**; dalla meccanica sappiamo che esiste l'equilibrio statico in presenza di punti di minimo dell'energia potenziale, ma se questa non ne ha, allora non esistono punti di equilibrio statici. Ne concludiamo che **il campo elettrostatico non ha punti di equilibrio stabile**, ovvero che, se spostiamo di poco una carica dalla posizione in cui si trova, *questa si allontanerà indefinitamente*.

Certo, possono esistere configurazioni in cui *sembra presente l'equilibrio*, ma in realtà questo non c'è. Pensate, ad esempio, a due cariche positive uguali posti a una certa distanza e un'altra carica positiva posta tra le due, perfettamente al centro. Questa è in equilibrio, è vero, e se la spostiamo nella direzione che unisce le due cariche tende a tornare al centro. Tuttavia se la spossassimo in tutte le altre direzioni andrebbe via all'infinito, repulsa dalla forza elettrostatica (lo stesso discorso vale per tre cariche ai vertici di un triangolo equilatero: il baricentro è un punto di equilibrio stabile *nel piano in cui si trovano le cariche*, ma se spostiamo la carica lungo una direzione dello spazio che non giaccia sul piano torna a scappare via). Quello che pensavamo essere un equilibrio stabile in realtà lo era *solo in una direzione*, però così è facile vincere, deve essere *per ogni direzione*.

6 Esempio particolare

Esempio (2.14)

Abbiamo detto che non è possibile risolvere l'equazione di Laplace; questo è, in generale, vero: si mette l'equazione dentro un calcolatore e si lascia che il computer faccia il suo lavoro, un classico problema di fisica computazionale. Tuttavia ci sono rari casi in cui si può trovare l'espressione della soluzione, e facciamo un esempio.

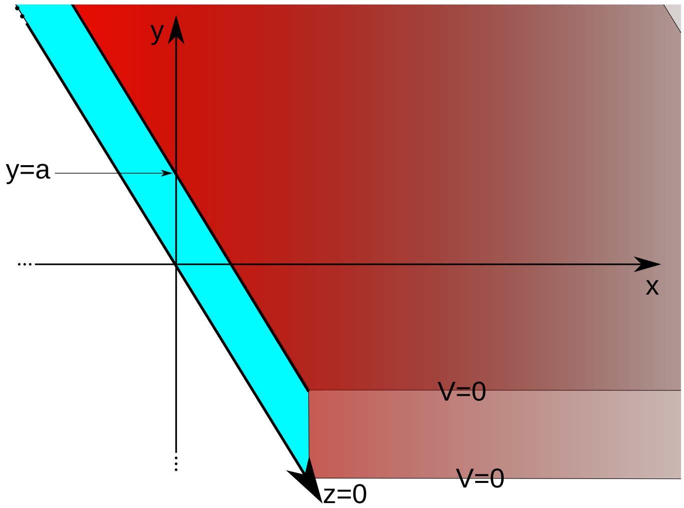

Fig. 2.14: Il sistema di questo esempio

Prendiamo il sistema esposto in figura 2.14: sono presenti due piani di carica (in rosso), entrambi paralleli al piano (x, z) di cui uno a quota $y = 0$ e l'altro a quota $y = a$; questi due piani si estendono poi all'infinito per ogni z e al crescere di x . Supponiamo sia metallici e siano allo stesso potenziale (per i conduttori non è una cosa impossibile), che poniamo $V = 0$. Tra i due piani è disposta una striscia *isolante* (in blu) in cui è presente un potenziale variabile che dipende *solo* da y , che chiamiamo $V_0(y)$, e vogliamo trovare l'espressione di questa funzione sfruttando l'equazione di Laplace. Con questo sistema, abbiamo le seguenti condizioni al contorno (se non vi tornano, osservate meglio la figura o rileggete l'impostazione del sistema):

$$\begin{cases} y = 0 \to V = 0 \\ y = a \to V = 0 \\ x = 0 \to V = V_0(y) \\ x = \infty \to V = 0 \end{cases}$$

Per risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$ procediamo per separazione di variabili; chiamiamo $V(x,y) = f(x)g(y)$, e l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} & g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ & \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ & F(x) + G(y) = 0 \end{aligned}$$

Questo indica che le due funzioni $F(x)$ e $G(y)$, affinché la loro somma sia nulla, devono essere costanti (infatti dipendo da variabili diverse); per come sono definite le due funzioni, abbiamo il seguente sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c_1 \\ \frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = c_2 \end{aligned}\right\} c_1 + c_2 = 0 \to \left| \begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = k^2 f \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -k^2 g \end{aligned}\right.$$

Addirittura, una delle due equazioni è quella di **un oscillatore armonico** (come se non avessimo abbastanza); le soluzioni alle due equazioni sono note:

$$\begin{aligned} g(y) &= C\sin(ky) + D\cos(ky) \\ f(x) &= Ae^{kx} + Be^{-kx} \end{aligned}$$

Da cui, ricordando la definizione del potenziale $V(x,y) = f(x)g(y)$ otteniamo la sua espressione:

$$V(x,y) = \left(Ae^{kx} + Be^{-kx}\right)\left(C\sin(ky) + D\sin(ky)\right)$$

Adesso, applicando le condizioni al contorno per $x = \infty$ e $y = 0$, otteniamo che le costanti $A = D = 0$ si annullano. La funzione del potenziale diventa allora $V(x,y) = e^{-kx}C\sin(ky)$, dove abbiamo portato la costante B in C (una costante vale l'altra, insomma). Applicando anche la condizione che a $y = a$ il potenziale vale $V = 0$, otteniamo $ka = n\pi$ ovvero $k = \frac{n\pi}{a}$. Non resta che applicare l'ultima condizione al contorno per ottenere:

$$C\sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = V_0(y)$$

Ovvero il potenziale ha solo questa forma. La soluzione per separazione di variabili, quindi, è molto limitata, e non ammette altre soluzioni. Tuttavia, un modo per uscirne c'è: basta applicare il **teorema di Fourier** e considerare la variabile C come una *serie di costanti*; in questo modo, il potenziale avrà forma:

$$V_0(y) = \sum_{i=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi}{a}x} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Per determinare i coefficienti si fa la proiezione sulla base del seno della funzione:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n'\pi}{a}y\right) C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) dy = \int_0^y v_0(y) \sin\left(\frac{n'\pi}{a}y\right) dy$$
$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a v_0 \sin\left(\frac{n'\pi}{a}y\right) dy = \frac{4V_0}{\pi n} \quad \text{con } n = 1, 3, 5, 7...$$

Il potenziale assume la forma di una serie *convergente* (in tutti questi passaggi stiamo dando per scontati i calcoli, anche se non lo sono per niente; non è interessante osservare i passaggi matematici quanto discutere la soluzione):

$$V(x,y) = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n\pi}{a}x}}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{a}y\right) = \frac{2V_0}{\pi} \arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi x}{a}\right)}\right]$$

Insomma, la soluzione non era proprio così scontata, nonostante il sistema non sembrasse così complicato. Questo è un chiaro esempio di come i problemi veri di elettrostatica sono molto complicati da risolvere nella realtà, e tutti gli esercizi che si tengono in un normale corso di elettrodinamica sono in realtà dei modelli particolari che semplificano di molto il lavoro matematico necessario. In figura 2.15 l'andamento qualitativo del potenziale in funzione di (x, y) .

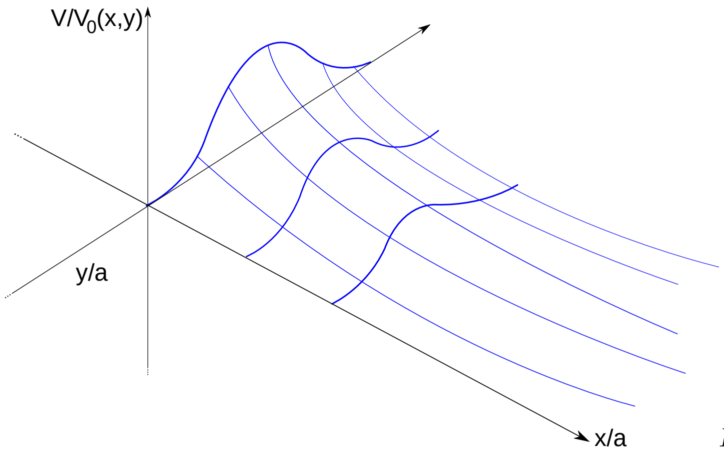

Fig 2.15: andamento qualitativo del pontenziale per l'esempio 2.14.

7 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

7.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Elettrostatica/Le equazioni di Poisson e Laplace** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Elettrostatica/Le_equazioni_di_Poisson_e_Laplace?oldid=46150 *Contributori:* Dan

7.2 Immagini

- **File:EsempioPoisson.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/9/9b/EsempioPoisson.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura2-15ELMbis.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/1/17/Figura2-15ELMbis.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

7.3 Licenza dell'opera