Utente:Dan/Elettromagnetismo/Elettrostatica nei conduttori/Esercizi sui dipoli

Unitile dire che con i dipoli ci si possono fare tanti esercizi belli e carini. Vediamone alcuni

Esempio (3.1)

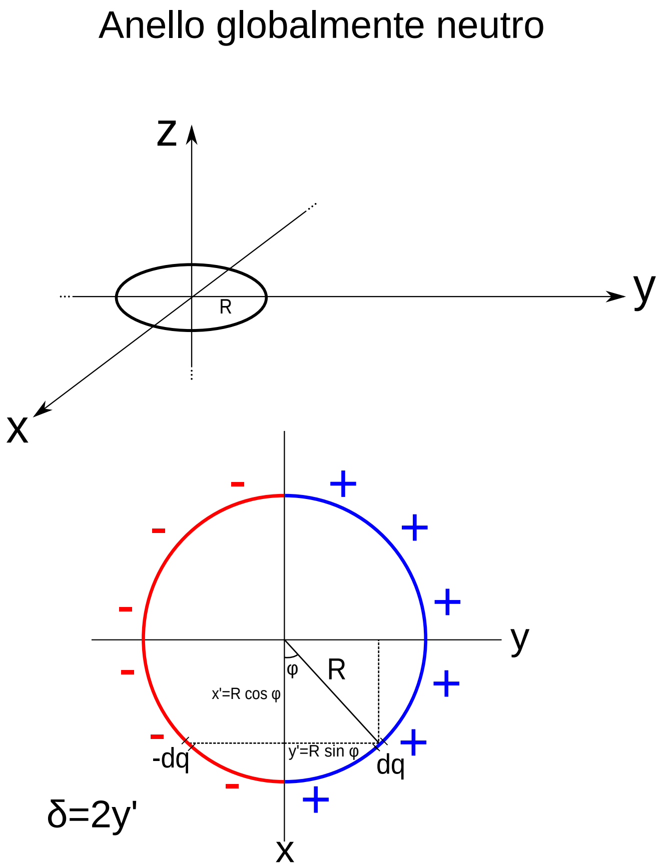

Fig. 3.5: Il modello dell'esempio 3.1

In questo esempio prendiamo come distribuzione di carica un anello carico, con densità di carica lineare variabile pari a $\lambda(\phi) = \lambda_0 \sin(\phi)$, dove ϕ è l'angolo formato dal raggio dell'anello R e l'asse $\hat{\mathbf{x}}$. In figura 3.5 è presentato il modello e una rappresentazione schematica di come si dispongono le cariche sull'anello. L'obiettivo dell'esercizio è calcolare campo elettrico e potenziale generati dall'anello *a grande distanza*, dove potremo utilizzare l'approssimazione di dipolo.

A tutti gli effetti, questo modello **è un dipolo**; da una parte ci sono le cariche positive, dall'altra quelle negative. Ci aspettiamo quindi che il suo momento di dipolo sia orientato parallelo all'asse $\hat{\mathbf{y}}$, e inoltre, per come è definita la densità λ , ci aspettiamo anche che la carica totale sia neutra. Partiamo da questa.

Poiché $Q = \oint \lambda \, dl = \int_0^{2\pi} \lambda(\phi) R \, d\phi = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \sin(\phi) R \, d\phi = 0$, il calcolo dell'integrale è elementare. Andiamo allora a calcolare il suo momento di dipolo. Osservando la figura, notiamo come $\delta = 2y' = 2R \sin \phi$, da cui otteniamo il momento di dipolo:

$$dp = \delta dq = 2R \sin(\phi) \lambda(\phi) dl = 2R \sin(\phi) \lambda_0 \, R \sin(\phi) \, d\phi = 2R^2 \sin^2(\phi) \lambda_0 \, d\phi$$

Integrando su tutto l'anello (**attenzione: l'integrale va da 0 a π , perché il sistema è simmetrico**) otteniamo $p = \lambda_0 \pi R^2$. Per calcolarne le componenti procediamo ognuna per ognuna:

$$\begin{aligned}
&p_z = 0 \text{ siamo sul piano } z = 0 \\
&p_x = \oint \lambda(\phi) x' \, d\phi = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \sin(\phi) R \cos(\phi) R \, d\phi = 0 \\
&p_y = \oint \lambda(\phi) y' \, d\phi = \int_0^{2\pi} \lambda_0 \sin(\phi) R \sin(\phi) R \, d\phi = \lambda_0 \pi R^2
\end{aligned}$$

Come ci aspettavamo, abbiamo ottenuto che il momento di dipolo è diretto parallelamente all'asse y ed è pari a $\mathbf{p} = (0, \lambda_0 \pi R^2, 0)$. Per calcolare potenziale e campo elettrico di dipolo non resta che applicare le formule viste nella sezione 3.1:

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \\
\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right)
\end{aligned}$$

Esempio (3.2)

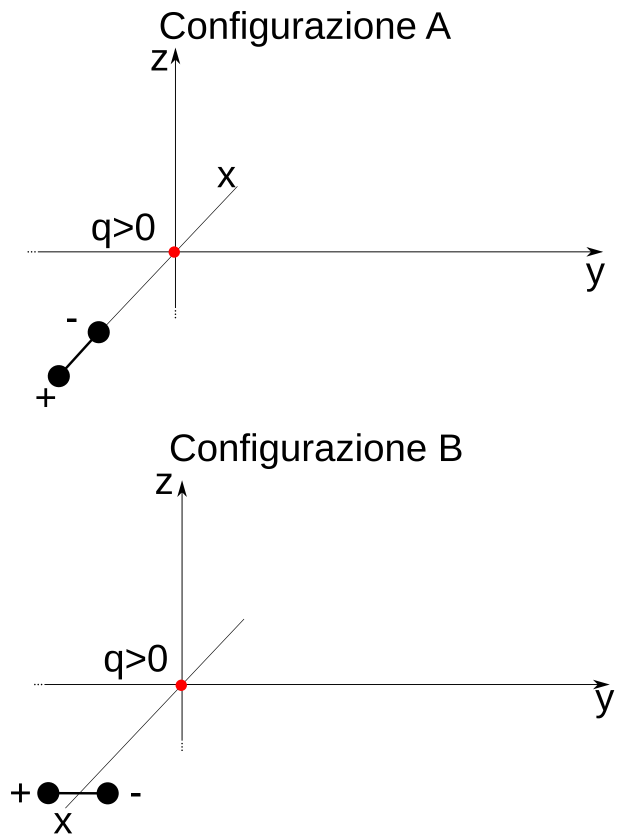

Fig. 3.6: Le due configurazioni del dipolo nell'esempio 3.2

Abbiamo un dipolo posizionato sull'asse $\hat{\mathbf{x}}$ in due configurazioni: configurazione A, il dipolo ha momento parallelo all'asse $\hat{\mathbf{y}}$, ovvero $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{y}}$; configurazione B, il momento di dipolo è parallelo all'asse $\hat{\mathbf{x}}$, ovvero $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{x}}$. Nell'origine è posizionata una carica positiva che genera un campo elettrico; tutto il sistema è posto a quota $z = 0$. Calcoliamo la forza e il momento che subisce il dipolo in entrambe le configurazioni. Fare riferimento alla figura 3.6.

Dalla sezione 3.1 sappiamo che $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E})$ e $\mathbf{M} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}$. Da una prima occhiata, poiché nella configurazione A la carica negativa è più vicina all'origine, possiamo dire che la forza attrarrà il dipolo verso la carica generatrice del campo. Viceversa, nella configurazione B le cariche si trovano alla stessa distanza dall'origine, quindi la forza sarà parallela al momento di dipolo, ovvero diretta lungo $\hat{\mathbf{y}}$. Calcoliamo la forza nella configurazione A:

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}) = \boldsymbol{\nabla}\left(p\hat{\mathbf{y}}\cdot\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{y}{r^3}\right)$$

(questo ricordando che $\hat{\mathbf{y}}\cdot\mathbf{r} = y$). Calcoliamo le componenti:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 2x}{r^5} = -\frac{xy}{r^5}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{y}{r^3} = -3\frac{zy}{r^5}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^3 - y\frac{3}{2}\,2\,2y}{r^6} = \frac{r^2-3y^2}{r^5}$$

Per la configurazione B, i calcoli sono identici, solo variano le componenti x e y ; possiamo quindi scrivere le forze nelle due configurazioni in forma vettoriale:

$$\text{A) } \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}) = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{3xy}{r^5};\frac{r^2-3y}{r^5};-\frac{3zy}{r^5}\right) \to \mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d^3}\hat{\mathbf{x}}$$
$$\text{B) } \mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}) = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r^2-3x}{r^5};-\frac{3xy}{r^5};-\frac{3zx}{r^5}\right) \to \mathbf{F} = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{d^3}\hat{\mathbf{y}}$$

Dove abbiamo indicato con d la distanza dall'origine del punto medio di δ .

Per il calcolo dei momenti, potremmo procedere passo passo calcolando il prodotto vettoriale tra i due, ma basta osservare che nella configurazione B il dipolo è già parallelo all'asse, quindi $\mathbf{p}//\mathbf{E}$ e il loro prodotto vettoriale è nullo, mentre nella configurazione A, mentre la forza spinge il dipolo all'infinito lungo $\hat{\mathbf{y}}$, il momento tenderà a metterlo parallelo al campo, quindi la rotazione avverrà lungo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$. I due momenti sono allora:

$$\text{A)}\quad \mathbf{M} = -pE_x\hat{\mathbf{z}}$$
$$\text{B)}\quad \mathbf{M} = 0$$

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Elettrostatica nei conduttori/Esercizi sui dipoli** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Elettrostatica_nei_conduttori/Esercizi_sui_dipoli?oldid=46152 *Contributori:* Dan

1.2 Immagini

- **File:Anello_dipolo.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/a/a1/Anello_dipolo.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Dipoloesercizio.svg** *Fonte:* http://it.wikitolearn.org/images/it/b/b7/Dipoloesercizio.svg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

1.3 Licenza dell'opera