

Utente:Dan/Elettromagnetismo/ Elettrostatica nei dielettrici/Polarizzazione dei dielettrici

Procediamo adesso, dopo aver brevemente i dielettrici, a studiarne gli effetti microscopici. Abbiamo già anticipato che gli atomi o le molecole si polarizzano: questo fenomeno può avvenire in due modi differenti.

1 Polarizzazione per deformazione

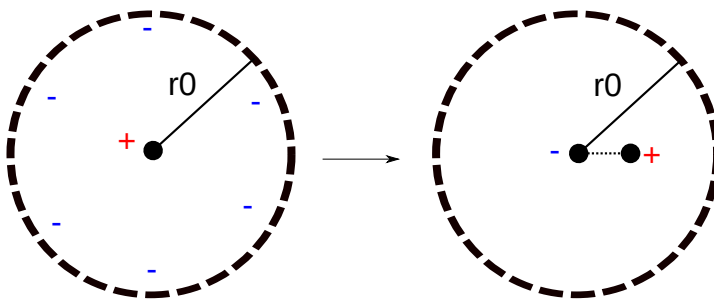


Fig. 4.1: La polarizzazione per deformazione; le cariche positive e negativa dell'atomo si allontanano, creano un piccolo dipolo.

Prendiamo un atomo (numero atomico Z) a simmetria sferica di raggio r_0 (figura 4.1), dove la carica negativa $-Ze$ (elettroni) si distribuisce uniformemente nella sfera, mentre la carica positiva Ze (protoni) sono al centro della sfera, schematizzate come una carica puntiforme. Poiché la carica è equidistribuita *non* sulla sfera, ma sulla superficie (si posiziona il più lontano possibile dalla carica positiva), avremo che **il baricentro della carica negativa è il centro della sfera**. Dall'esterno, quindi, l'atomo risulta complessivamente neutro, cosa che non sorprende. Quindi, se poniamo l'atomo in un campo esterno, questo non dovrebbe avere strani comportamenti, giusto? **No**.

La carica totale è sì nulla, ma comunque sono presenti una carica positiva e una carica negativa, in diversi punti dello spazio: quindi, queste due cariche, soggette al campo esterno risentiranno di due forze uguali in modulo ma contrarie in direzione. Un piccolo appunto: anche se il campo esterno *non fosse uniforme*, poiché gli spostamenti compiuti dagli elettroni sono infinitesimali, questa variazione del campo in funzione dello spazio *non perturba la forma dell'atomo*, che quindi assumiamo restare sferica in qualsiasi campo esterno in cui sia immerso (ovvia-



mente, nella realtà ciò non è vero, ma nella realtà non esistono neanche cariche puntiformi, quindi).

Quindi, in virtù di queste diverse forze risentite dalle cariche, queste *tenderanno ad allontanarsi*: facendo ciò, si presenterà tra loro **una forza di Coulomb attrattiva** che tende a riavvicinarle. Il risultato finale è che le cariche si troveranno spostate, a una certa distanza, e saranno in equilibrio, con la forza attrattiva tra loro uguale e contraria alla forza generata dal campo esterno, ovvero $F_C = F_+$; abbiamo ottenuto **un piccolo dipolo**. Per poter meglio rappresentare questo effetto si pensi al sistema dell'esempio 2.13 (sezione 2.7): lì avevamo due sfere con carica opposta che si sovrapponevano. Ora immaginate che in realtà le due sfere erano già sovrapposte, e noi le abbiamo allontanate dal centro: in questo modo abbiamo creato un piccolo dipolo, con una parte di distribuzione negativa da un lato e una parte di quella positiva dal lato opposto.

Poiché abbiamo precisato che la forma dell'atomo resta sferica, sappiamo scrivere il campo elettrico all'interno di una sfera carica, che vale:

$$\mathbf{E}' = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \mathbf{r} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r_0^3} \mathbf{r}$$

Dall'equilibrio delle forze $F_C = F_+ \rightarrow Ze \cdot E = Ze \cdot E'$, otteniamo che il campo elettrico esterno deve essere uguale a questo campo elettrico interno. Ma nel nostro caso, le cariche si sono spostate a una distanza δ tra loro, che quindi corrisponde a \mathbf{r} . Il campo esterno risulta quindi essere $\mathbf{E} = \mathbf{E}'(\mathbf{r} = \delta) = \frac{Ze\delta}{4\pi\epsilon_0 r_0^3}$; il fattore $Ze\delta = \mathbf{p}$ ha le dimensioni di un momento di dipolo elettrico ed è proprio **il momento di dipolo dell'atomo**, che possiamo quindi esprimere come:

$$\mathbf{p} = 4\pi\epsilon_0 r_0^3 \mathbf{E} = \alpha_d \mathbf{E}$$

Quindi, il nostro atomo ha acquisito un momento di dipolo *nella direzione del campo elettrico esterno*. Precisiamo ora: **non è possibile, nella realtà, creare un campo elettrico così intenso da poter ionizzare la materia**, così precisiamo subito cosa è possibile in teoria e cosa, invece, non lo è in pratica. Osserviamo anche che *la proporzionalità è diretta* $\mathbf{p} \propto \mathbf{E}$, c'è quindi una risposta **lineare** dell'atomo. La costante α_d viene detta **polarizzabilità elettronica del dielettrico per deformazione** (avete mai pensato a chi ha dato i nomi alle cose? In questo caso avrebbe potuto fare nettamente di meglio) e **dipende solo ed esclusivamente dalla geometria del modello**. Questa costante si misura in:

$$\frac{\text{C} \cdot \text{m}}{\frac{\text{V}}{\text{m}}} = \frac{\text{C}}{\text{V}} \text{m}^2 = \text{F} \cdot \text{m}^2 = \text{Farad} \cdot \text{metro quadro}$$

Usando questo modello, possiamo calcolarla come $\alpha_d = 4\pi\epsilon_0 r_0^3$; per l'atomo di idrogeno (con $r_0 = 1 \text{ \AA}$), vale circa $10^{-41} \text{ F} \cdot \text{m}^2$, *che non è lontano dalla realtà*, anzi, è anche abbastanza preciso, visto che l'ordine di grandezza è proprio quello.

Quindi, dal punto di vista microscopico, gli atomi (o le molecole) si polarizzano, acquisendo un momento di dipolo, e poi, macroscopicamente, si sommano tutti quanti ottenendo una polarizzazione totale del dielettrico. Dobbiamo precisare,



però, che *la risposta è lineare solo in questo modello*, ovvero con dielettrici lineari perfetti: questi rispondono in maniera lineare alla deformazione. In sintesi, tutto questo è **una visione microscopica della legge di Hook**: quando andiamo a deformare un materiale, non facciamo altro che allontanare gli elettroni dai loro atomi, e quindi il corpo risponde linearmente (per un sistema lineare e perfetto quale stiamo considerando).

Nelle molecole reali, invece, come ad esempio nell'anidride carbonica, il momento di dipolo *dipende anche dalla direzione del campo esterno*: varia se lo prendiamo perpendicolare o parallelo all'asse della molecola. Quindi il momento che acquisirà la molecola dipende dalle componenti ortogonali o parallele, cioè $\mathbf{p} = \alpha_{\perp} E_{\perp} + \alpha_{\parallel} E_{\parallel}$. Questi valori differiscono tra loro, nel caso dell'anidride carbonica, di un fattore 2 (vale $\alpha_{bot} \sim 20 \cdot 10^{-41}$ e $\alpha_{\parallel} \sim 50 \cdot 10^{-41}$). Nel caso più generale, con molecole particolari, la costante α è in realtà un *tensore*:

$$||\alpha|| = \begin{vmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{vmatrix}$$

Quindi, ad esempio, la componente x del momento di dipolo sarà $p_x = \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z$: in condizioni reali, quindi, la direzione del momento di dipolo cambia in maniera complessa.

2 Polarizzazione per orientamento

La questione è diversa per quelle molecole che *hanno già un momento di dipolo \mathbf{p}_0 intrinseco*, dovuto alla geometria della molecola. In questo caso, la polarizzazione per deformazione è *trascurabile* in quanto c'è un altro termine che domina. Come abbiamo visto nella sezione 3.1, quando immergiamo un dipolo in un campo esterno questo subisce una forza e un momento che tende a farlo ruotare nella direzione del campo. Quindi, quando questi materiali, ad esempio l'acqua, sono immersi in un campo esterno, i piccoli dipoli delle molecole tendono a ruotare nella direzione del campo. Ci aspettiamo, quindi, che alla fine del processo il dipolo totale del dielettrico sia del tipo $\mathbf{p} = n\mathbf{p}_0$. Tuttavia, le cose non sono proprio così banali.

Se infatti non ci fosse un campo esterno, le molecole hanno ognuna un proprio \mathbf{p}_0 diverso dalle altre e, per effetto dovuto all'agitazione termica, questi dipoli avranno direzioni casuali randomizzate dalla temperatura. Il momento medio è quindi nullo, in assenza di campi esterni $\langle \mathbf{p} \rangle = 0$.

Se invece il dielettrico è immerso in un campo esterno, questi dipolini tendono a ruotare nella direzione del campo. Tuttavia, la temperatura non è nulla, e quindi continua con i suoi giochetti perversi spostando a caso le molecole (come i gatti con le vostre cose). Se la temperatura è molto alta, questo effetto prevale sul campo esterno, e quindi il momento medio tende ancora ad essere nullo; al contrario, se la temperatura non è alta, il momento medio sarà diverso da zero. Ci troviamo davanti a un fenomeno **prettamente statistico**, in cui il campo esterno tende a far ruotare le molecole in una direzione mentre la temperatura le fa ruotare in una direzione casuale. Dalla distribuzione di Boltzmann sappiamo che *la probabilità di avere una molecola con energia U è pari a*:



$$p(U) = Ae^{-\frac{U}{k_B T}}$$

Dove A è la costante di normalizzazione della distribuzione e U è l'energia elettrostatica di dipolo, che abbiamo calcolato nella sezione 3.1 e vale $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta$. Poiché il dipolo della molecola \mathbf{p}_0 è fisso, così come lo è il campo esterno \mathbf{E} , concludiamo che **l'energia dipende esclusivamente dall'angolo tra la direzione del momento di dipolo e il campo esterno**. Se $\theta = 0$, l'energia risulta minima: è per questo motivo che i dipoli tendono a ruotare nella direzione del campo esterno. La probabilità di energia, quindi, diventa una probabilità di direzione, determinata dall'angolo θ :

$$p(U(\theta)) = Ae^{-\frac{U}{k_B T}} = Ae^{\frac{p_0 E \cos \theta}{k_B T}}$$



Fig. 4.2: L'angolo formato dal momento di dipolo e dal campo elettrico vale nello spazio.

Dalla figura 4.2 osserviamo che l'angolo θ non è un angolo planare, ma è definito su un infinitesimo di angolo solido, in quanto qualsiasi direzione nello spazio formi con la direzione del campo elettrico un angolo θ ha la stessa energia; quindi "l'infinitesimo di energia" vale

$$dp = p(U(\theta))d\Omega = p(U(\theta)) \sin \theta d\theta d\phi$$

Ovviamente questo discorso vale se il sistema è *omogeneo e isotropo*; per questi sistemi vale anche che, per un qualsiasi dipolo con una componente verticale (rispetto alla direzione del campo) ne esiste un altro con la componente verticale opposta, quindi $\langle p \rangle_{\perp} = 0$, sempre per **isotropia**. Da questo ricaviamo che $\langle p \rangle = \langle p \rangle_{\parallel} = \langle p_0 \cos \theta \rangle = p_0 \langle \cos \theta \rangle$, quindi, come ci aspettavamo, per trovare il momento di dipolo medio dobbiamo trovare l'angolo medio che forma con il campo elettrico esterno.

Dalla statistica elementare, data una qualsiasi distribuzione di probabilità per cui vale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, per calcolare il valore medio di una funzione $g(x)$ si calcola $\langle g(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$; quindi, per trovare il momento di dipolo medio, ricordando che la nostra distribuzione è quella di Boltzmann, dobbiamo calcolare il seguente integrale.

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= p_0 \langle \cos \theta \rangle = p_0 \int \cos \theta dp = Ap_0 \int p(U(\theta)) \cos \theta d\Omega = \\ &= Ap_0 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \cos \theta \sin \theta e^{\frac{p_0 E \cos \theta}{k_B T}} \end{aligned}$$



Come abbiamo già detto, A è la costante di normalizzazione e vale $A = \left(\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{\frac{p_0 E \cos\theta}{k_B T}} \right)^{-1}$; quindi, il momento di dipolo medio vale:

$$\langle p \rangle = p_0 \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \cos\theta \sin\theta e^{\frac{p_0 E \cos\theta}{k_B T}}}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{\frac{p_0 E \cos\theta}{k_B T}}}$$

Chiamato $a = \frac{p_0 E}{k_B T}$, operiamo come cambio di variabile $x = \cos\theta$, da cui $dx = -\sin\theta d\theta$; così facendo, il nostro integrale diventa:

$$\langle p \rangle = p_0 \frac{\int_{-1}^1 x e^{ax} dx}{\int_{-1}^1 e^{ax} dx} = p_0 L(a)$$

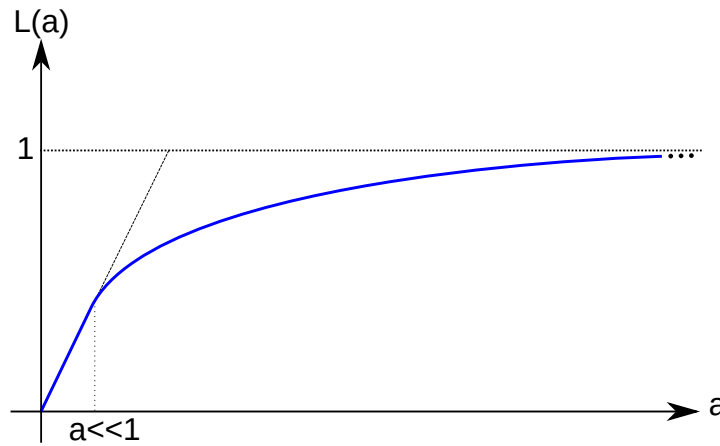


Fig. 4.3: Andamento della funzione di Langevin. Per $a \ll 1$, la funzione è lineare. La funzione è dispari, quindi simmetrica rispetto all'origine; non abbiamo rappresentato il semiasse negativo.

Dove $L(a)$ è la **funzione di Langevin** e vale $L(a) = \left(\coth(a) - \frac{1}{a} \right)$; il calcolo è nelle appendici. Questa funzione, come mostrato in figura 4.3, ha un andamento lineare che va come $\frac{a}{3}$ per valori di a piccoli, cioè $a \ll 1$; poi, tende asintoticamente a 1 quando $a \rightarrow \infty$. Osserviamo che, per $a \rightarrow \infty$, necessitiamo due situazioni: o $E \rightarrow \infty$, oppure $T \rightarrow 0$; per un qualsiasi $T \neq 0$ K, quindi, e per campi piccoli, possiamo approssimare $L(a) \approx \frac{a}{3}$. Nella realtà, infatti, si hanno campi elettrici di un'intensità tale da far essere $a \ll 1$, quindi ricaviamo il momento medio di dipolo:

$$\langle \mathbf{p} \rangle = p_0 \frac{a}{3} = \frac{p_0^2}{3k_B T} \mathbf{E} = \alpha_p \mathbf{E}$$

Anche in questo caso, la dipendenza dal campo esterno è **lineare**: il nostro dielettrico, lo ricordiamo ancora una volta, è lineare perfetto, omogeneo e isotropo. La costante α_p si chiama **polarizzabilità elettronica del dielettrico per orientamento** e, come possiamo osservare, **dipende dalla temperatura**. Per l'acqua a temperatura ambiente, questa costante vale circa $10^{-38}, 10^{-39}$, due ordini di grandezza più grande della costante α_d ; quindi, come avevamo preannunciato, *il termine dominante è la polarizzazione per orientamento*, in quei materiali che presentano un dipolo intrinseco nelle proprie molecole.



3 Polarizzazione macroscopica

Quindi, per raccogliere tutte le idee, un qualsiasi dielettrico si polarizza come

$$\langle \mathbf{p} \rangle = (\alpha_d + \alpha_p) \mathbf{E}$$

Ma, in fin dei conti, α_d , α_p , \mathbf{p}_0 , come li ricaviamo? Nella realtà, sono anche abbastanza complicati da ricavare (si trovano tabulati, è vero, ma così è come barare), ma a noi non interessa minimamente che valore abbiano: ciò che ci interessa è che $\langle \mathbf{p} \rangle \propto \mathbf{E}$.

Per lo studio macroscopico del dielettrico, quindi, introduciamo una grandezza macroscopica che, dato un infinitesimo di volume $d\tau$, ci fornisca *il momento di dipolo posseduto da $d\tau$* , e si chiama **vettore di polarizzazione elettrica \mathbf{P}** ; potremmo definirlo in maniera molto brutta come $\mathbf{P} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\tau}$; il modo più elegante è:

$$\mathbf{P} = n \langle \mathbf{p} \rangle$$

Dove $n = \frac{dN}{d\tau}$ è la **densità di dipolo per unità di volume** (N è il numero di molecole totali). Il vettore di polarizzazione si misura in $\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$. Osserviamo che $\mathbf{P}(x, y, z)$ è un *campo vettoriale* che associa a ogni punto dello spazio un vettore di polarizzazione; questo sarà ovviamente nullo nello spazio dove non c'è il materiale dielettrico, mentre avrà un valore non nullo nei punti del dielettrico stesso.



4 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

4.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Elettrostatica nei dielettrici/Polarizzazione dei dielettrici** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Elettrostatica_nei_dielettrici/Polarizzazione_dei_dielettrici?oldid=46159 *Contributori:* Dan

4.2 Immagini

- **File:Figura4-1.svg** *Fonte:* <http://it.wikitolearn.org/images/it/6/6f/Figura4-1.svg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura4-2.svg** *Fonte:* <http://it.wikitolearn.org/images/it/0/0b/Figura4-2.svg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura4-3.svg** *Fonte:* <http://it.wikitolearn.org/images/it/b/b4/Figura4-3.svg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

4.3 Licenza dell'opera

- [Project:Copyright Creative Commons Attribution Share Alike 3.0 & GNU FDL]
- [Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0](#)

