Utente: Dan/Elettromagnetismo/Campo elettromagnetico e onde/Potenziali elettodinamici

1 Potenziali in caso dinamico

In elettrostatica avevamo il campo elettrico conservativo $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, che ci ha permesso di poter scrivere il campo elettrico come il gradiente di un campo scalare, che abbiamo chiamato *potenziale elettrostatico* $\mathbf{E} = -\nabla V$. Da questa, poi, unendo la prima e la terza equazione di Maxwell siamo giunti all'equazione di Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

La cui soluzione risolve tutti i problemi dell'elettrostatica. La stessa cosa abbiamo fatto in magnetostatica: avendo il campo magnetico solenoidale $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, abbiamo potuto esprimerlo come il rotore di un campo vettoriale $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ che abbiamo chiamato *potenziale vettore*. Unendo questa e la quarta equazione di Maxwell siamo giunti a scrivere

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Che equivale formalmente a tre equazioni di Poisson lungo i tre assi cartesiani. Anche questa, se risolta, ci permette di risolvere qualsiasi problema di magnetostatica.

Siamo poi passati nel regime dipendente dal tempo, e le cose sono un po' cambiate. Il campo elettrico non è più conservativo, quindi non potremo più esprimerlo in funzione del potenziale elettrico. Tuttavia, possiamo ancora fare qualcosa. Infatti, il campo magnetico resta sempre solenoidale, quindi possiamo sostituirlo con il rotore del potenziale vettore nella terza equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Portando tutto a sinistra e applicando la linearità dell'operatore rotore otteniamo:

$$\nabla \times \left[\mathbf{E} - + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = 0$$

Adesso il campo tra parentesi è sì conservativo: nel caso statico si torna al solo campo elettrico, ma se c'è dipendenza dal tempo va aggiunto un altro termine. In ogni caso, possiamo esprimere questo campo come il gradiente di un potenziale scalare:

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V$$

V è chiamato **potenziale scalare** e, attenzione, **non è uguale al potenziale elettrico**, è un'altra cosa. Con questo ragionamento possiamo allora esprimere *sempre* i campi elettrico e magnetico come funzioni di potenziali:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla V - \dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases}$$

Adesso il campo elettrico $\mathbf{E}$ dipende dal potenziale vettore $\mathbf{A}$, quindi le due equazioni sono accoppiate. La dipendenza temporale comporta qualche complicazione, come notiamo.

2 Gauge di Lorentz

A questo punto, possiamo fare come nel caso statico e unire le relazioni trovate alle restanti leggi di Maxwell. In particolare, sostituendo nella prima $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$ l'espressione del campo elettrico in funzione dei potenziali otterremo:

$$\nabla \cdot \left[-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \frac{\rho}{\epsilon}$$
$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Allo stesso modo possiamo operare per la quarta equazione di Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} =& \mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) =& \mu \mathbf{J} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] \\ =& \mu \mathbf{J} - \mu\epsilon \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Otteniamo allora due equazioni:

$$\left| \begin{array}{l} \nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \dfrac{\partial V}{\partial t} \right) = \mu \mathbf{J} \\ \nabla^2 V + \dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\dfrac{\rho}{\epsilon} \end{array} \right.$$

Queste equazioni differenziali accoppiate ci permettono, una volta trovata la soluzione, di risolvere *qualsiasi* problema, anche il più perverso, di elettrodinamica (imposte ovviamente le condizioni al contorno). C'è ovviamente un problema di fondo che si vede a occhio, ed è che queste fanno abbastanza schifo, almeno in questa forma. Invochiamo ancora una volta, allora, il potere delle trasformazioni di gauge per semplificarci la vita. Abbiamo visto la gauge di Coulomb per il potenziale vettore, ora dovremo scegliere qualcosa di diverso. Sappiamo infatti che, se operiamo una trasformazione al potenziale vettore, il campo magnetico, che è l'osservabile fisicamente, non cambia:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla\phi \\
&\mathbf{B} \to \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla\phi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}
\end{aligned}$$

Allo stesso modo, se operiamo una trasformazione simile anche al potenziale scalare $V \to V - \frac{\partial\phi}{\partial t}$, unendo queste due trasformazioni nell'espressione del campo elettrico:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V + \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi) = \mathbf{E}$$

Quindi, operando le due trasformazioni:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &\to \mathbf{A} + \nabla\phi \\
V &\to V - \frac{\partial\phi}{\partial t}
\end{aligned}$$

I nostri campi osservabili non variano. Ricordiamo ancora una volta che la trattazione con i potenziali è molto comoda e potente nella teoria, ma poi nella pratica, quando si sperimenta sul campo la teoria, gli osservabili restano i campi macroscopici fondamentali $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$: tutto il resto sono solo giochi teorici, comodi, utili e quant'altro, ma sempre vincolati a dover andare d'accordo con i risultati sperimentali.

Quindi, possiamo fare questa trasformazione senza troppi ripensamenti, e ne scegliamo una che ci sia più comoda. Questa scelta viene chiamata **gauge di Lorentz** e si deve a Ludvig Valentin Lorentz, che, sia chiaro, *non è quel Lorentz*, è un altro fisico diverso dal più famoso Hendrik Antoon Lorentz. La sua proposta è quella di prendere il campo ϕ tale che:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

In virtù della trasformazione, questo equivale a dire:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2\phi + \mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

Riordinando le cose, posto $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ otteniamo che il campo ϕ deve soddisfare la condizione:

$$\Box\phi = -\nabla \cdot \mathbf{A} - \mu\epsilon\frac{\partial V}{\partial t}$$

Di questa equazione non ci importa null'altro che l'esistenza della soluzione. Per fortuna qualcuno ha dimostrato che la soluzione esiste, e questo ci da la libertà di poter sfruttare questa trasformazione. Infatti, osservando attentamente la trasformazione e sostituendola nelle equazioni accoppiate scritte prima, otterremo che **le nuove equazioni sono disaccoppiate**:

$$\left|\begin{aligned} &\Box\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \\ &\Box V = -\frac{\rho}{\epsilon} \end{aligned}\right.$$

Ancora una volta, le equazioni sono simmetriche e belle da vedere. Queste ci permettono, davvero, di risolvere qualsiasi problema di elettrodinamica classica. La soluzione a queste equazioni è composta dalla soluzione generale dell'equazione di d'Alambert, l'onda piana, più una soluzione particolare. La soluzione particolare, quando i campi d'interesse sono limitati in un volume finito, presenta quelli che sono noti come **potenziali ritardati**, e hanno la stessa forma del caso statico *con una piccola modifica*:

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_\tau \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_\tau \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'$$

Il nome *ritardati* è presto spiegato: questi potenziali **dipendono dalla posizione che aveva la sorgente prima del tempo in cui li si calcola**, effetto dovuto alla traslazione nello spazio dell'onda elettromagnetica. Tramite questi potenziali si possono risolvere svariati problemi noti, come quello, che vedremo nel capitolo extra, dei campi di una particella in moto.

3 I potenziali anticipati

Stranamente, anche i seguenti potenziali risolvono l'equazione di d'Alambert per entrambi:

$$V(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_\tau \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_\tau \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}d\tau'$$

Questi potenziali vengono spesso chiamati *potenziali anticipati* e rispettano *tutte le condizioni dell'elettrodinamica* di Maxwell, solo che toppano in una condizione fondamentale della fisica, non solo dell'elettrodinamica: **non rispettano il principio di causalità**. Questi sono infatti influenzati dalla posizione *futura* della sorgente: l'effetto precede temporalmente la causa, in contraddizione con il principio di causalità. Tuttavia, che questi potenziali risolvino le equazioni dell'elettrodinamica è comunque interessante: **la teoria presenta una simmetria temporale**, in cui, se si inverte il corso del tempo, le cose continuano a funzionare.

4 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

4.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Campo elettromagnetico e onde/Potenziali elettodinamici** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Campo_elettromagnetico_e_onde/Potenziali_elettodinamici?oldid=43867 *Contributori:* Dan

4.2 Immagini

4.3 Licenza dell'opera