

Corso: Meccanica del punto materiale / Cinematica del punto materiale / Moto armonico

Proiettando il moto circolare uniforme sugli assi cartesiani, è evidente come questo risulti essere la composizione di due moti armonici semplici. La legge oraria di questo particolare *moto vario* è: ^{*}[1]

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

dove:

A = ampiezza

ω = pulsazione

$\omega t + \phi$ = fase del moto

ϕ = fase iniziale

Essendo il moto descritto dalla funzione coseno o seno, ha delle caratteristiche spaziali ben precise:

1. Il coseno è una funzione limitata superiormente e inferiormente, dunque assume dei valori estremi (± 1). Un punto che si muove di moto armonico quindi **oscilla tra due posizioni limite** corrispondenti a $\pm A$
2. La funzione coseno inoltre è periodica, pertanto anche il moto armonico è **un moto periodico**, e cioè:

Definizione (moto periodico)

il moto di un punto si dice periodico quando ad intervalli di tempo regolari il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità.

Per calcolare il periodo di un moto armonico, ovvero il tempo dopo cui il moto si ripete, basta ricordare che il periodo di $\sin x$ è 2π e sfruttare la definizione:

si considerino due istanti, t e $t' = t + T$, con T periodo del moto. Per definizione di moto periodico la posizione del punto in t è uguale alla posizione t' , per cui $x(t) = x(t')$. Essendo il periodo di $\cos \theta$ 2π , deve valere $\omega t + \phi = \omega t' + \phi + 2\pi$, quindi $\omega(t - t') = 2\pi$

Ecco quindi il **periodo**

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



L'inverso del periodo si definisce **frequenza**

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

La frequenza si misura come $[\nu] = [T^{-1}]$ ovvero $\frac{1}{s} = 1Hz = \frac{1\text{ciclo}}{s}$

Periodo e frequenza sono indipendenti dall'ampiezza e dalla fase iniziale, dipendono invece dalla pulsazione ω . In particolare possiamo fare le seguenti considerazioni: più la pulsazione è grande, più il moto è lento (T grande e ν piccolo), più la pulsazione è piccola, più il moto è veloce (T piccolo e ν grande)

Velocità e Accelerazione si ricavano per derivazione dalla legge oraria:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$$

Da qui si ricava che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento con segno negativo:

$$a = -\omega^2 x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{equazione del moto armonico}$$

Questa, definita **equazione del moto armonico**, è la *condizione necessaria e sufficiente affinché un moto sia armonico*. Soffermiamoci sul significato di questa affermazione. Se nello studio di un moto si trova un'accelerazione proporzionale allo spostamento con segno negativo e costante di proporzionalità C , si può immediatamente dedurre che la legge oraria del moto sarà quella di un moto armonico $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, con pulsazione $\omega = \sqrt{C}$. Un ottimo esempio è costituito dal moto di un corpo sottoposto ad una **forza elastica**. Viceversa se si conosce l'equazione di un moto ed essa rappresenta un moto armonico si può dire che l'accelerazione a cui il corpo è sottoposto è della forma $a = -\omega^2 x$.

Sovrapponendo i grafici di posizione, velocità e accelerazione, è possibile notare come questi differiscano tra loro solo per una differenza di fase:

- Posizione e velocità sono in quadratura di fase (cioè sfasate di T/4 quindi di $\pi/2$)
- Posizione e accelerazione in opposizione di fase (cioè sfasate di T/2 e quindi di π)



A e ϕ sono costanti, e una volta note permettono di calcolare le condizioni iniziali ($t=0$):

$$\begin{cases} x_0 = A \sin \Phi \\ v_0 = \omega A \sin \Phi \end{cases}$$

Viceversa tali costanti possono essere ricavate conoscendo le condizioni iniziali x_0 e v_0

[1] è analogo esprimere il moto tramite un $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ o $x(t) = A \cos(\omega t + \phi')$. Infatti usando gli archi associati $\sin(\phi) = \cos(\frac{\pi}{2} - \phi)$ e basta porre $\phi' = \frac{\pi}{2} - \phi$ per avere perfetta equivalenza. Le due funzioni differiscono solo per la fase iniziale.



1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Corso:Meccanica del punto materiale/Cinematica del punto materiale/Moto armonico** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3AMeccanica_del_punto_materiale/Cinematica_del_punto_materiale/Moto_armonico?oldid=47914 *Contributori:* Roopi, Sofia, Toma.luca95, V.e.padulano, FiammettaPagano, J.motta1, Linda, Dan, WikiToBot e Move page script

1.2 Immagini

- **File:A(t).jpg** *Fonte:* <http://pool.wikitolearn.org/images/pool/9/93/A%28t%29.jpg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Diagramma_v(t).jpeg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/6/65/Diagramma_v%28t%29.jpeg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Diagramma_x(t).jpeg** *Fonte:* http://pool.wikitolearn.org/images/pool/c/cf/Diagramma_x%28t%29.jpeg *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

1.3 Licenza dell'opera

- [Project:Copyright Creative Commons Attribution Share Alike 3.0 & GNU FDL]
- [Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0](#)

