Corso:Calcolo Numerico I1/Esempi di temi d'esame/Tema 11

Esercizio 9.42

Sia data la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita a tratti

$$g(x) = \begin{cases} x^{3/2} + x/2 & x \geq 0 \\ 1/9 - (x + 1/3)^2 & x < 0 \end{cases}$$

e il metodo di punto fisso

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

con x_0 assegnato.

1. Si studi graficamente la convergenza del metodo al variare del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ indicando, eventualmente, anche l'ordine di convergenza.
2. Si calcoli il condizionamento $K(x)$ della funzione g per i valori positivi di x . Si mostri che tale numero di condizionamento è compreso in un intervallo $[a, b]$ indicandone i valori.

Studio della funzione g :

1. Limiti: per $x \to +\infty$, $g \to +\infty$, mentre per $x \to -\infty$, $g \to -\infty$.
2. Intersezioni con gli assi: La funzione passa per il punto $(0, 0)$ e si raccorda con continuità nell'origine.Per x positivi:

   $$x^{3/2} + x/2 = 0$$

   $$x * (x^{1/2} + 1/2) = 0$$

   $$x^{1/2} = -1/2, \text{ non ha soluzione}$$

   Per x negativi:

   $$1/9 - (x + 1/3)^2 = 0$$

   $$1/9 - x^2 - 2/3x - 1/9 = 0$$

   $$x^2 + 2/3x = 0$$

   $$x = 0,\ x = -2/3$$

   quindi la funzione passa anche per il punto $(-2/3, 0)$.

3. Intersezioni con la bisettrice: $P_1 = (0,0)$ è un punto fisso.Per x positive

$$x^{3/2} + x/2 = x$$
$$x^{3/2} - x/2 = 0$$
$$x(x^{1/2} - 1/2) = 0$$
$$x^{1/2} = 1/2$$
$$x = 1/4$$

$P_2 = (1/4, 1/4)$ è un altro punto fisso.Per x negative:

$$-2/3x - x^2 = x$$
$$2/3x + x^2 = -x$$
$$5/3x + x^2 = 0$$
$$x = 0,\ x = -5/3$$

Ottengo anche il punto fisso $P_3 = (-5/3, -5/3)$.

4. Monotonia e concavità:Per x positive:

$$f'(x) = 3/2 * x^{1/2} + 1/2 > 0$$
$$3x^{1/2} > -1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

quindi la funzione è sempre crescente.

$$f''(x) = 3/4 * x^{-1/2} > 0 \iff x > 0$$

quindi la funzione è convessa per x positive.Per x negative:

$$g = -x^2 - 2/3x$$
$$f'(x) = -2 * (x + 1/3) > 0$$
$$x + 1/3 < 0$$
$$x < -1/3$$

Quindi la funzione è crescente per $x < -1/3$.

$$g'' = -2 < 0$$

allora la funzione è sempre concava.

Convergenza del metodo di punto fisso:

1. per $x_0 < -5/3$, ho una successione di iterate decrescente e illimitata.
2. per $-5/3 < x_0 < 0$, la funzione converge a $x = 0$.

$$f'(x) = -2 * (x + 1/3),\ \longrightarrow\ f'(0) = -2/3 < 1$$

e il metodo ha ordine di convergenza 1, dopo un numero finito di passi si ha $0 < x_k < 1/4$, perché l'ordinata del vertice della parabola è minore dell'ordinata del punto fisso $x_k = 1/3$.

3. per $0 < x_0 < 1/4$ ho una successione decrescente di iterate che converge a $P_1 = (0,0)$.

$$g'(x) = 3/2 * x^{1/2} + 1/2, \longrightarrow g'(0) = 1/2 \neq 0$$

quindi l'ordine di convergenza è 1.

4. Per $x_0 > 1/4$, la successione di iterate diverge.

Condizionamento di g *per* x *positive*:

$$K(g) = \frac{x}{|f(x)|} * f'(x)$$
$$K(g) = \frac{x}{x^{3/2} + x/2} * (3/2 * x^{1/2} + 1/2)$$
$$K(g) = \frac{x(3/2 * x^{1/2} + 1/2)}{x^{3/2} + x/2}$$

Semplificando per x :

$$K(g) = \frac{3/2 * x^{1/2} + 1/2}{x^{1/2} + 1/2}$$
$$K(g) = 1 + \frac{1/2 * x^{1/2}}{x^{1/2} + 1/2}$$
$$K'(g)(x) = \frac{(x^{1/2} + 1/2) * 1/4 * x^{-1/2} - 1/2 * x^{1/2} * (1/2 * x^{-1/2})}{(x^{1/2} + 1/2)^2}$$
$$K'(g)(x) \geq 0$$
$$(x^{1/2} + 1/2) * 1/4 * x^{-1/2} - 1/2 * x^{1/2} * (1/2 * x^{-1/2}) \geq 0$$
$$1/4x + 1/8 * x^{-1/2} - 1/4 * x \geq 0$$
$$x^{-1/2} \geq 0 \forall x > 0$$

quindi $K(g)$ è sempre crescente.

$$\lim_{x \to 0} K(g) = \lim_{x \to 0} 1 + \frac{1/2 * x^{1/2}}{x^{1/2} + 1/2} = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1/2 * x^{1/2}}{x^{1/2} + 1/2} = 3/2$$

quindi $K(g) \in (1, 3/2)$.

Esercizio 9.43

Dato il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ e

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \end{matrix}$$

$\alpha \neq 0$,

1. calcolare $|A|_2$ e traciarne il grafico al variare di a .
2. indicare per quali valori di a il metodo di Jacobi è convergente.
3. Indicare per quali valori di a il metodo di Gauss-Seidel è convergente.
4. Calcolare la fattorizzazione LU della matrice A e le quantità $|L|_\infty$ e $|U|_\infty$ al variare di a .

Calcolo della norma di A :

$$|A|_2 = \rho(A^tA)^{1/2} = \sqrt{\max|\lambda(A^tA)|}$$

In questo caso A è simmetrica, quindi $A^tA = A^2$, $\lambda(A^2) = (\lambda(A))^2$, quindi

$$|A|_2 = \max|\lambda(A)|$$

$$A - \lambda I = \begin{matrix} 1-\lambda & 0 & a \\ 0 & a-\lambda & 0 \\ a & 0 & 1-\lambda \end{matrix}$$

$$p_\lambda = (1-\lambda)(1-\lambda)(a-\lambda) + a^2(\lambda - a) = 0$$

$$p_\lambda = (\lambda - a) * [-(1-\lambda)^2 + a^2] = 0$$

$$p_\lambda = (\lambda - a) * [-1 - \lambda^2 + 2\lambda + a^2] = 0$$

$$\lambda_1 = a$$

$$-1 - \lambda^2 + 2\lambda + a^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - a^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1-a^2)}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 + 4a^2}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 2a}{2} = -1 \pm a$$

$$|A|_2 = \max|\lambda(A)|$$

$$|-1-a| > |a| \iff |-1-a| < -a \vee |-1-a| > a$$

$$|-1-a| < -a \longrightarrow a < -1-a < -a$$

$$-1-a < -a \iff -1 < 0 \forall x$$

$$a < -1-a \longrightarrow a < -1/2$$

$$|-1-a| > a \longrightarrow -1-a < -a \vee -1-a > a$$

$$-1-a > a \longrightarrow a < -1/2$$

Quindi $|-1-a| > |a|$ se $a < -1/2$.

$$|a-1| > |a| \iff |a-1| < -a \vee |a-1| > a$$

$$|a-1| < -a \longrightarrow a < a-1 < -a$$

$$a < a-1 \longrightarrow 0 < -1 \text{non ha soluzioni}$$

$$|a-1| > a \iff a-1 < -a \vee a-1 > a$$

$$a-1 > a \text{ non ha soluzioni}$$

$$a-1 < -a \longrightarrow a < 1/2$$

quindi $|a| > |a-1|$ per $a < 1/2$. In conclusione:

$$|A|_2 = \begin{cases} |a-1| & \iff a < -1/2 \\ |a| & \iff -1/2 < a < 1/2 \\ |-a-1| & \iff a > 1/2 \end{cases}$$

Convergenza del metodo di Jacobi:

$$A + D\lambda = \begin{matrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & \lambda a & 0 \\ a & 0 & \lambda \end{matrix}$$

$$p_\lambda = \lambda * \lambda^2 * a - a(\lambda a^2)$$

$$p_\lambda = a\lambda^3 - a^2\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \pm\sqrt{a}$$

quindi il metodo di Jacobi converge se $|a| < 1$.

Convergenza del metodo di Gauss-Seidel:

$$A + \lambda(D+L) = \begin{matrix} \lambda & 0 & a \\ 0 & a\lambda & 0 \\ a\lambda & 0 & \lambda \end{matrix}$$

$$p_\lambda = \lambda * a\lambda^2 - a^3\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0$$

$$\lambda_3 = a^2$$

quindi la condizione per la convergenza di Gauss-Seidel è ancora $|a| < 1$.

Eliminazione gaussiana:

Passo 1:

$$M_1 = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$A_1 = \begin{matrix} 1 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{matrix}$$

Quindi $A_1 = U$, mentre

$$L = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{matrix}$$

Quindi

$$|L|^{\infty} = \max\{1, 1 + |a|\} = 1 + |a|$$

$$|U|^{\infty} = \max\{1 + |a|, |a|, 1 + |a^2|\}$$

$$|U|^{\infty} = \begin{cases} |a| + 1 & \iff a < -1 \vee a > 1 \\ 1 + |a^2| & \iff -1 < a < 1 \end{cases}$$

1 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

1.1 Testo

- **Corso:Calcolo Numerico I1/Esempi di temi d'esame/Tema 11** *Fonte:* https://it.wikitolearn.org/Corso%3ACalcolo_Numerico_I1/Esempi_di_temi_d'esame/Tema_11?oldid=48517 *Contributori:* Toma.luca95 e Mmontrasio

1.2 Immagini

1.3 Licenza dell'opera