

# Utente: Dan/Elettromagnetismo/Campo elettromagnetico e onde/Energia, quantità di moto e momento angolare del campo elettromagnetico

## 1 Il teorema di Poynting

Abbiamo visto come è possibile associare al campo elettrico e al campo magnetico un'energia, esprimibile in termini di densità volumica come è noto:

$$U_E = \int_{\tau} \rho_E d\tau = \int_{\tau} \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau \quad U_M = \int_{\tau} \rho_M d\tau = \int_{\tau} \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} d\tau$$

Se in una regione sono presenti i campi, ovvero c'è un campo elettromagnetico, a questo si può associare un'energia che è banalmente la somma dei due contributi, e ci aspettiamo anche che l'energia elettrica venga continuamente convertita in energia magnetica e viceversa. Vediamo di studiare come avviene questo scambio, attraverso una particolare equazione di continuità: osserveremo che non si conserverà più l'energia meccanica, ma a conservarsi sarà la somma dei termini meccanico e elettromagnetico.

Viene storicamente chiamato **teorema di Poynting**, ma non è altro che il teorema dell'energia-lavoro generalizzato al caso elettromagnetico, Poynting è stato "semplicemente" il primo a dimostrarlo. Questo si dimostra analizzando le equazioni di Maxwell: prendiamo un volume limitato  $\tau$  in cui sono presenti  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  non nulli; il volume può essere sia vuoto o in presenza di materiali. Poiché ci sono i due campi, ci sarà una densità di energia totale:

$$\rho = \rho_M + \rho_E = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}$$

A cui associamo ovviamente un'energia totale del campo  $U = \int_{\tau} \rho d\tau$ . Studiamo come varia l'energia nel tempo, supponendo che nel tempo sia costante il volume:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U &= \frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho d\tau = \int_{\tau} \frac{d\rho}{dt} d\tau \\ \int_{\tau} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) d\tau &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{D} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} + \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) d\tau \end{aligned}$$



Supponendo di aver a che fare con mezzi omogenei, isotropi e lineari, possiamo sfruttare le relazioni già note  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  e  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ , e osservare che:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{D}$$

La stessa cosa vale per i campi magnetici; in sintesi, si elimina il fattore  $\frac{1}{2}$  fuori dall'integrale, e otteniamo:

$$\frac{dU}{dt} = \int_{\tau} \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} \right) d\tau$$

A questo punto, sfruttiamo le equazioni di Maxwell, che ci dicono che:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Otteniamo quindi il seguente risultato (saltiamo un passaggio algebrico):

$$\frac{dU}{dt} = \int_{\tau} (-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d\tau + \int_{\tau} \left( (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{E} - (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H} \right) d\tau$$

Osservando che  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H})$ , possiamo riscrivere:

$$\frac{dU}{dt} = \int_{\tau} (-\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d\tau - \int_{\tau} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\tau$$

A questo punto applichiamo il teorema della divergenza al secondo termine (e portiamo il segno meno dall'altra parte) ottenendo:

$$-\frac{dU}{dt} = \int_{\partial\tau} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} + \int_{\tau} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d\tau = \Phi_{\partial\tau}(\mathbf{S}) + \int_{\tau} (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d\tau$$

Dove abbiamo indicato con  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu}$  il **vettore di Poynting**. In sintesi, la variazione di energia in negativo, ovvero *come va l'energia che si perde*, può essere espressa come il flusso di un vettore, il vettore di Poynting, attraverso il bordo del volume più *un termine dissipativo*: se ricordate,  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$  indica l'**effetto Joule**; in questo caso sta a indicare l'energia che il campo elettromagnetico sta trasferendo alla materia.

Quindi, la variazione di energia dipende da un termine dissipativo, che ci indica quanta energia il campo trasferisce alla materia, più un qualcosa che fuoriesce dal volume e che indichiamo col vettore di Poynting (fuoriesce o entra, dipende da come varia l'energia: se l'energia aumenta, il vettore di Poynting entra nel volume, se l'energia diminuisce il vettore esce). Se il volume è vuoto, il termine dissipativo scompare e quindi:

$$-\frac{dU}{dt} = \Phi_{\partial\tau}(\mathbf{S})$$

Questo ci dice che, nel vuoto, **il campo elettromagnetico trasporta energia** in qualche modo, esprimibile attraverso il vettore di Poynting. Globalmente



l'energia deve conservarsi: la somma dell'energia elettromagnetica e meccanica deve essere costante, altrimenti tutti i nostri discorsi perdono senso. Se non c'è materia, il termine elettromagnetico si conserva, perché non c'è materia che possa assorbire energia meccanica tramite l'effetto Joule. In questo caso possiamo esprimere:

$$-\frac{\partial U}{\partial t} = \int_{\tau} -\frac{\partial \Pi}{\partial t} d\tau = \Phi_{\partial\tau}(\mathbf{S}) = \int_{\tau} (\nabla \cdot \mathbf{S}) d\tau$$

Abbiamo ottenuto un'equazione di continuità per l'energia elettromagnetica:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$$

Quindi, il campo elettromagnetico trasporta energia nel vuoto, che la materia può assorbire; come vedremo, il vettore di Poynting ci fornisce anche la direzione in cui si propaga l'onda elettromagnetica; l'energia viene continuamente convertita da elettrica in magnetica e viceversa. Che ci sia o meno trasporto di energia è un fenomeno separato dalla presenza o meno di un'onda elettromagnetica: anche in casi quasi-stazionari, se sono presenti  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  tali che  $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \neq 0$  ci sarà un trasporto di energia da parte del campo elettromagnetico, anche se questi non si propagano come onde. In tutto ciò non ci siamo dimenticati di fornire le dimensioni del vettore di Poynting; è più facile da determinare se osserviamo che il suo flusso è una potenza, quindi:

$$[\Phi(\mathbf{S})] = \text{W} \quad [\mathbf{S}] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

## 2 Quantità di moto del campo elettromagnetico

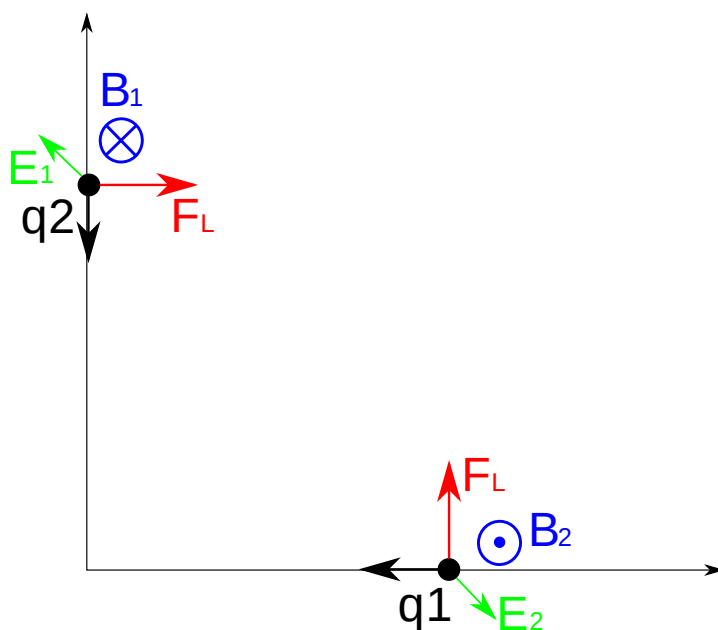


Fig. 9.3.



Consideriamo il sistema in figura 9.3: abbiamo due cariche elettriche, entrambi positive, che si muovono verso l'origine seguendo due assi cartesiani. Poiché si muovono, queste hanno una propria velocità e quindi generano nello spazio un campo magnetico, oltre a percepire una forza di Lorentz. Entrambe generano un campo elettrico *non* coulombiano, perché non sono statiche; vedremo a fine corso che espressione ha questo tipo di campo, per ora ci basta sapere (prendetelo sulla parola) che il campo risulta, istante per istante, radiale con la posizione della particella che si muove. Il campo magnetico che generano le due particelle ha linee di forza circolari, come indicato in figura. Alla fine, le due particelle risentono di una forza di Lorentz, che corrisponde a una variazione della quantità di moto. Detta così, sembrerebbe che un sistema isolato violi la conservazione della quantità di moto. In realtà dobbiamo considerare anche il contributo del campo elettromagnetico: questo infatti trasporta quantità di moto.

La dimostrazione è quasi identica al teorema di Poynting; prendiamo un volume  $\tau$  e calcoliamo la forza che agisce sulle particelle e come questa è legata, in qualche modo, al campo elettromagnetico. Avremo:

$$\mathbf{F} = \int dq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \int_{\tau} \rho d\tau(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = \int_{\tau} d\tau(\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})$$

A questo punto, sfruttiamo le equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\end{aligned}$$

Andando a sostituire:

$$\mathbf{F} = \int_{\tau} d\tau \left( \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right)$$

Esprimiamo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \rightarrow -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} &= \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E})\end{aligned}$$

Riscrivendo la forza:

$$\mathbf{F} = - \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) d\tau + \int_{\tau} d\tau \left( \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \right)$$

A questo punto, aggiungiamo nell'integrale  $\mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B})$ : essendo un termine sempre nullo, non varierà il valore dell'integrale; lo aggiungiamo in modo da ottenere un'espressione simmetrica nei campi elettrici e magnetici:

$$\mathbf{F} + \int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) d\tau = \int_{\tau} d\tau \left( \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \mathbf{D} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \right)$$



Insomma, non una bella espressione. Nel membro a sinistra, possiamo esprimere la forza come variazione della quantità di moto  $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ ; l'espressione  $\int_{\tau} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) d\tau$  ha le dimensioni di una quantità di moto. Allora, definiamo **densità volumica di quantità di moto associata al campo elettromagnetico**:

$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$

Chiamata  $\mathbf{G} = \int_{\tau} \mathbf{g} d\tau$ , il membro a sinistra diventa  $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{p} + \mathbf{G})$ . E il membro a destra? Osserviamo che l'integrando possiamo riscriverlo come segue, ricordando le condizioni tra i campi nei mezzi lineari:

$$\epsilon_0 \left( \mathbf{E}(\nabla \cdot \mathbf{E}) + c^2 \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) - c^2 \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right)$$

Questo diventa un **tensore** (forniamo il calcolo, noioso e matematico, nelle appendici) che indichiamo con  $\tilde{T}$  e si chiama **tensore degli sforzi di Maxwell** e ci indica la quantità di moto trasmessa dall'onda elettromagnetica attraverso l'elemento di superficie. Il tensore è una matrice simmetria tridimensionale  $3 \times 3 \times 3$  le cui componenti sono:

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left\{ E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (E^2 + c^2 B^2) \right\}$$

L'espressione della forza, in virtù di tutto quello detto finora, diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{p} + \mathbf{G}) = \int_{\partial\tau} \tilde{T} \cdot d\mathbf{S}$$

Ad esempio, la componente  $\hat{\mathbf{x}}$  di questa espressione è:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{p} + \mathbf{G})_x = \int_S (T_{xx} dS_x + T_{xy} dS_y + T_{xz} dS_z)$$

Se la materia non assorbe quantità di moto, ovvero ci troviamo nel vuoto, il tensore è nullo  $\tilde{T} = 0$ . Quindi, se consideriamo il tutto in un volume finito  $\tau_0$  in cui sono limitati i campi e integriamo l'espressione su un volume  $\tau > \tau_0$ , sulla superficie di  $\tau$  l'integrale del tensore sarà sempre nullo, quindi avremo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{p} + \mathbf{G}) = 0 \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{G} = \text{cost}$$

A conservarsi è quindi **la quantità di moto totale del sistema**, e non quella meccanica; quello che sembrava quindi una contraddizione alla conservazione della quantità di moto era in realtà un errore nel non considerare il termine elettromagnetico alla quantità di moto.

Se siamo nel vuoto, non avremo un termine meccanico, quindi avremo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{G} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \mathbf{g} d\tau = \int_S \tilde{T} \cdot d\mathbf{S}$$

Applicando il teorema della divergenza al secondo membro, otteniamo **l'equazione di continuità della quantità di moto elettromagnetica nel vuoto**:



$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{T}} = 0$$

In tutte queste espressioni, il prodotto scalare per un tensore è da prendere con le pinze, così come la divergenza.

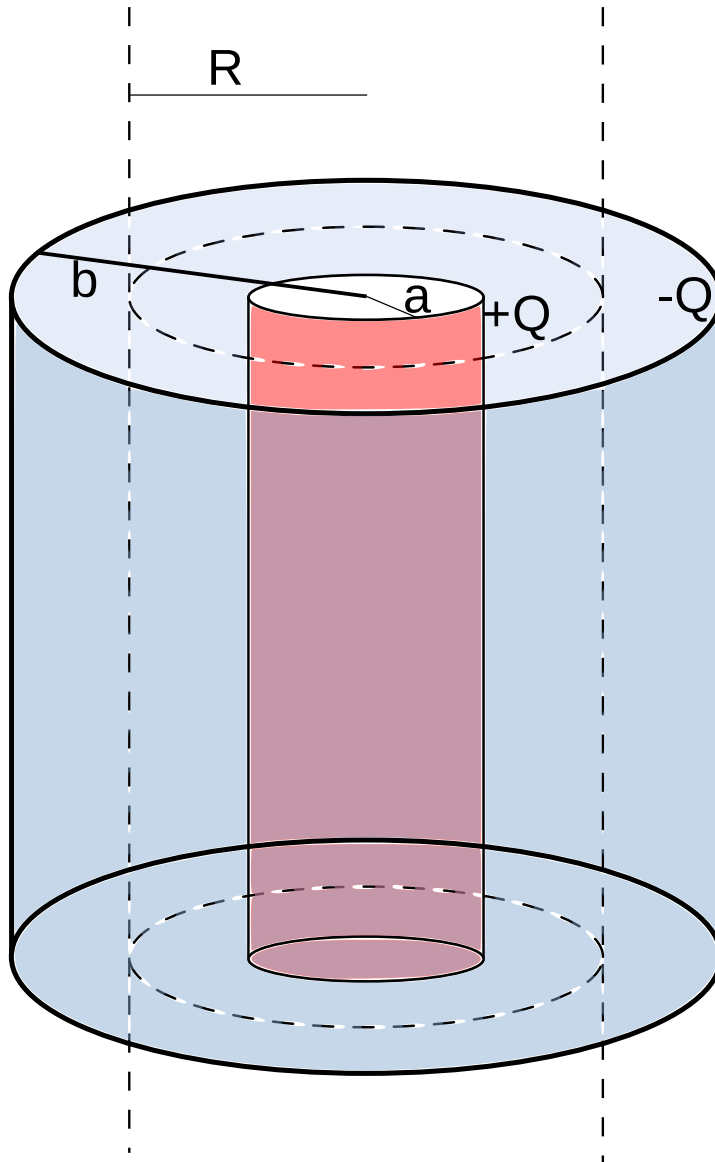
### 3 Conservazione del momento angolare: il non-paradosso di Feynman

Se il campo elettromagnetico trasporta quantità di moto, ci aspettiamo che trasporti anche momento angolare. Effettivamente, questo accade e, come per la quantità di moto, si definisce una **densità di momento angolare**  $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{g} = \mathbf{r} \times (\mathbf{D} \times \mathbf{B})$  e da questo si definisce il momento angolare trasferito in un volume alla materia come:

$$\mathbf{L} = \int_{\tau} \mathbf{l} d\tau$$

Come per l'energia e per la quantità di moto, questa grandezza è associata al campo elettromagnetico, non all'onda: se ci sono i campi elettrico e magnetico tali che  $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \neq 0$ , allora ci sarà un momento angolare associato al campo elettromagnetico.





tratteggiato.

Fig. 9.4: il solenoide è

Per riuscire a vedere meglio questo, ci affidiamo a un esempio, il *non* paradosso di Feynman. Questo problema viene detto “paradosso” perché nelle Lectures è proposto in un capitolo non appropriato: se fosse stato posto al giusto capitolo, non sarebbe un paradosso, ma un semplice problema. Abbiamo il sistema in figura 9.4: c’è un solenoide (tratteggiato) indefinito percorso da corrente e con grandezza caratteristica  $n = \frac{N}{l}$  nota. All’interno e all’esterno del solenoide ci sono due gusci coassiali col solenoide dielettrici di spessore trascurabile, caricati per strofinio con carica  $+Q$  all’interno e  $-Q$  all’esterno; i due gusci possono ruotare senza attrito attorno al loro asse. Tutto è considerabile ideale, le dimensioni sono come in figura, con  $a < R < b$ .

Nel solenoide scorre corrente finché un meccanismo interno al sistema fa in modo che la corrente vada rapidamente a 0: si osserva che i due gusci iniziano a ruotare in verso opposto: sembrerebbe un paradosso, ma se sappiamo che il campo elettromagnetico trasporta momento angolare, non lo è più.



Infatti sono presenti sia un campo magnetico dovuto al solenoide che un campo elettrico, dovuto alle cariche depositate sui due gusci, e il campo è *elettrostatico*. Conosciamo la forma dei due campi (quella del campo elettrico è identica a quella di un condensatore cilindrico) e valgono:

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} \quad r \in [0, R]$$

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi l r} \hat{\mathbf{r}} \quad r \in [a, b]$$

Avremo un vettore di Poynting  $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} \neq 0$ , e di conseguenza abbiamo una densità di quantità di moto  $\mathbf{g} = \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \epsilon_0 E B (-\hat{\mathbf{t}})$  (solita storia sul versore tangente). Le linee di forza di  $\mathbf{g}$  sono allora delle circonferenze centrate sull'asse del sistema e si avvolgono al contrario rispetto al verso indicato dalla mano destra, e il modulo sarà:

$$\mathbf{g} = \mu_0 \frac{n I Q}{2\pi l r} (-\hat{\mathbf{t}})$$

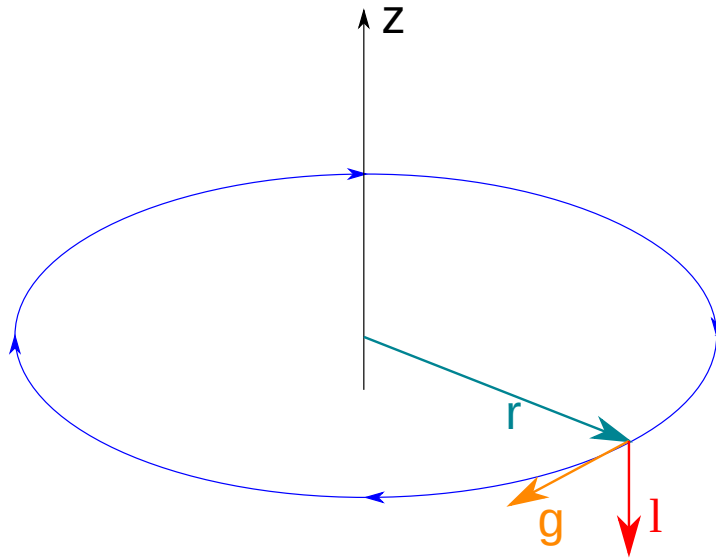


Fig. 9.5.

A questo corrisponde quindi una densità di momento angolare che, come possiamo vedere in figura 9.5, ha la direzione dell'asse del sistema ma verso opposto, e sarà quindi  $\mathbf{l} = r g (-\hat{\mathbf{z}})$ . Questo dobbiamo integrarlo sul volume in cui è non nullo: il campo magnetico è non nullo in  $[0, R]$ , mentre il campo elettrico lo è in  $[a, b]$  (intervalli radiali), quindi dovremo integrarlo in un cilindro con intervallo radiale  $[a, R]$ :

$$\mathbf{L}_{EM} = \mathbf{L}_i = \int_{\tau} \mathbf{l} d\tau = \int_a^R -r g 2\pi r l dr \hat{\mathbf{z}} = \frac{\mu_0}{2} n I Q (a^2 - R^2) \hat{\mathbf{z}}$$

Questo è il valore iniziale, quando la corrente è a regime. Lo stato finale sarà quando la corrente è in diminuzione: dovremo considerare il caso in cui la discesa  $\frac{dI}{dt} < 0$  sia molto lenta, perché se fosse un calo repentino di corrente non potremmo trascurare autoinduzione e mutua induzione. A  $I(t)$  variabile corrisponde un  $\mathbf{B}(t)$





variabile, che genera un campo elettrico  $\mathbf{E}'(t)$  solenoidale e ricavabile dalla terza equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \rightarrow \oint_{\Gamma} \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{l} = E 2\pi r = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}(\mu_0 n I(t) \Sigma(r))$$

Dove con  $\Sigma(r)$  abbiamo indicato la superficie del cilindro (quella trasversale alla sua lunghezza); la variazione di flusso vale:

$$-\frac{d\Phi(r)}{dt} = \begin{cases} -\mu_0 n \frac{dI}{dt} \pi R^2 & r > R \\ -\mu_0 n \frac{dI}{dt} \pi r^2 & r < R \end{cases}$$

Il campo così generato dalla variazione del campo magnetico sarà:

$$\mathbf{E}' = \begin{cases} -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{R^2}{r} \frac{dI}{dt} \hat{\mathbf{t}} & r > R \\ -\frac{1}{2} \mu_0 n r \frac{dI}{dt} \hat{\mathbf{t}} & r < R \end{cases}$$

Ogni elemento dei gusci dielettrici risente di una forza elettrica dovuta a questo campo, a cui corrisponde un momento della forza:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(b) &= \mathbf{r} \times (-Q\mathbf{E}'(b)) \rightarrow \mathbf{M}(b) = -bQ\mathbf{E}'(b)(-\hat{\mathbf{z}}) = bQ\frac{1}{2}\mu_0 n \frac{R^2}{b} \frac{dI}{dt} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{M}(a) &= \mathbf{r} \times (Q\mathbf{E}'(a)) \rightarrow \mathbf{M}(a) = aQ\mathbf{E}'(a)(-\hat{\mathbf{z}}) = -aQ\frac{1}{2}\mu_0 n a \frac{dI}{dt} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

A questi corrispondono i momenti angolari dei due gusci:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(b) &= \int_0^t \mathbf{M}(b) dt = \frac{1}{2} Q \mu_0 n R^2 \int_I^0 dI \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{2} \mu_0 n Q R^2 I \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{L}(a) &= \int_0^t \mathbf{M}(a) dt = \frac{1}{2} Q \mu_0 n I a^2 \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Il momento angolare finale, **completamente meccanico**, sarà quindi:

$$\mathbf{L}_M = \mathbf{L}_f = \frac{1}{2} Q \mu_0 n I (a^2 - R^2) \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{L}_i$$

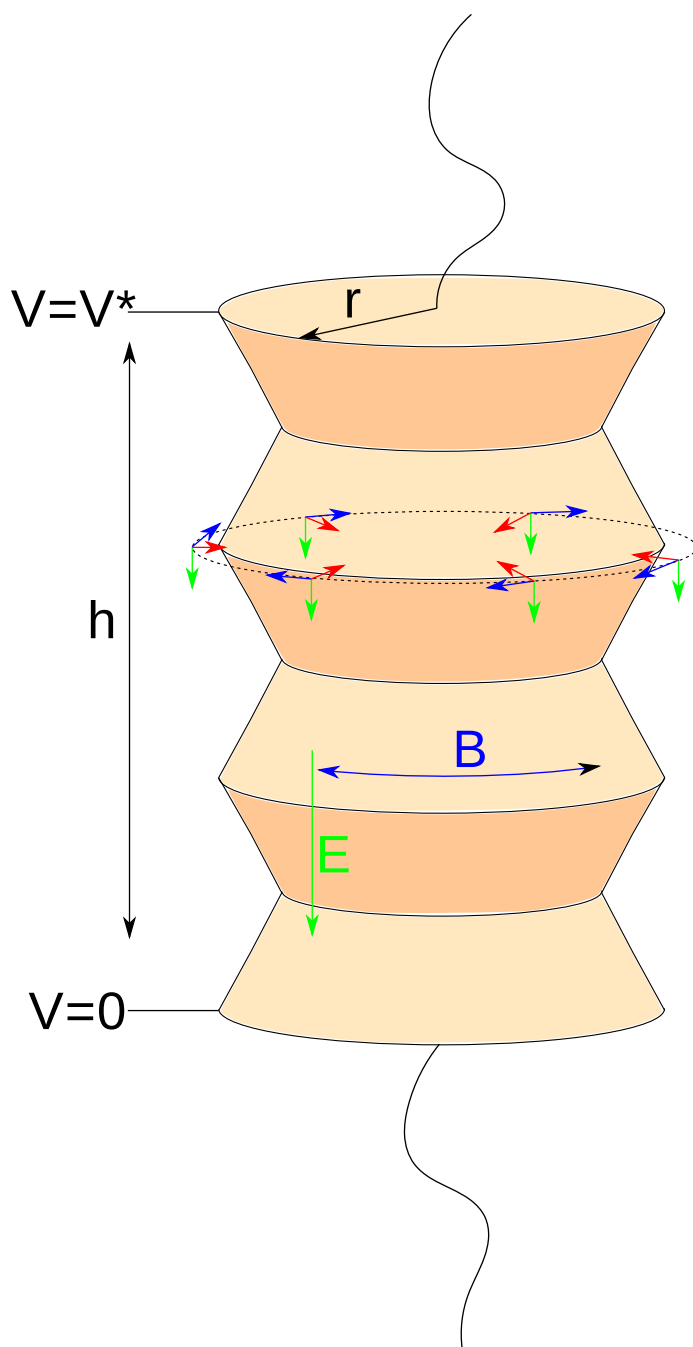
C'è stata una conservazione del momento angolare totale: all'inizio era nullo il momento meccanico, alla fine era nullo il momento elettromagnetico.

## 4 Applicazioni del teorema di Poynting

Vediamo, in tre esempi classici, come possiamo sfruttare il vettore di Poynting per spiegare lo scambio energetico tra campo e materia: studieremo come varia l'energia, e quindi il flusso del vettore di Poynting, nelle resistenze, capacità e induttanze.



## Esempio (9.1)



*Poynting è in rosso.*

*Fig. 9.6: il vettore ci*

Iniziamo dal resistore, in figura 9.6. Consideriamo un cilindro ohmico percorso da corrente, alto  $l$  e di raggio  $r$ ; approssimiamo il campo  $\mathbf{E}$  uniforme nel cilindro, questo implica che i potenziali sono uniformi sulle superfici. Il campo magnetico sarà quello di Bios-Savart:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} (-\hat{\mathbf{t}})$$



Quindi, il vettore di Poynting, come vediamo in figura, sarà entrante nel resistore:

$$\mathbf{S} = \frac{EB}{\mu}(-\hat{\mathbf{r}}) = \frac{IV}{2\pi r l} \hat{\mathbf{r}}$$

In ogni caso, nel resistore avremo sempre i campi elettrico e magnetico posti in modo che il vettore di Poynting sia entrante: questo è concorde col fatto che *le resistenze non restituiscono l'energia accumulata*, ma tutta l'energia che vi fluisce viene dissipata e non è riutilizzabile. Coerentemente, se calcoliamo il flusso di  $\mathbf{S}$  attraverso la superficie  $\Sigma$  del resistore, otterremo (il vettore è sempre ortogonale alla superficie laterale del cilindro):

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{S}) = 2\pi r l \frac{IV}{2\pi r l} = IV = RI^2$$

Abbiamo ritrovato ciò che abbiamo sempre saputo.

**Esempio** (9.2)

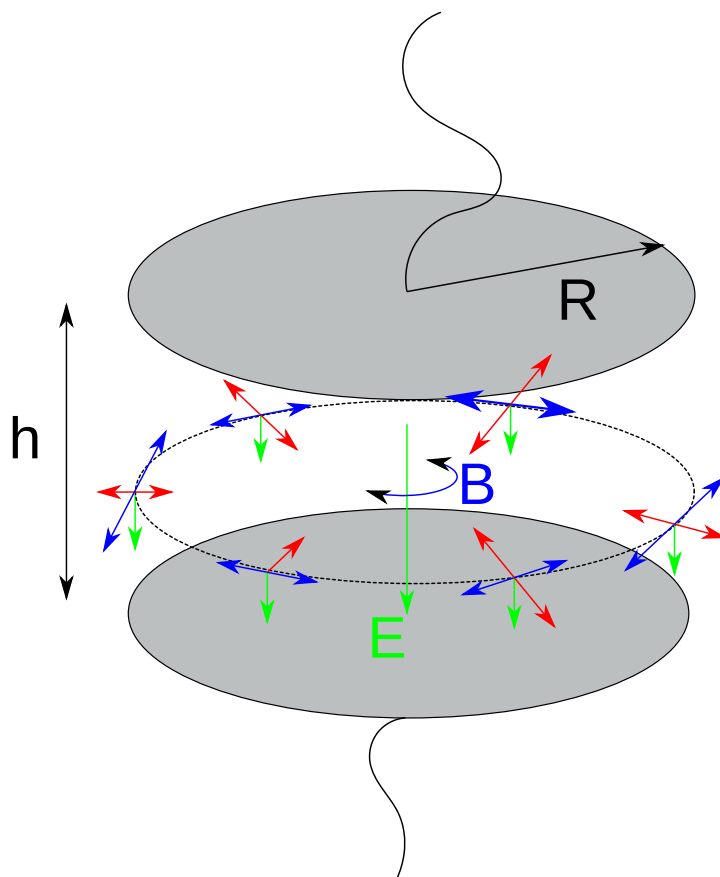


Fig. 9.7: il vettore di Poynting è in rosso. Sono rappresentati sia il caso in cui si carica, che quando si scarica.

Vediamo ora il caso del condensatore, in figura 9.7: un condensatore piano, ad armature circolari con raggio  $R$  e a distanza  $h$  tra loro. Il condensatore è collegato a un circuito generico e ci aspettiamo che, a seconda che si stia caricando o scaricando, vari il verso del vettore di Poynting. Considereremo il caso più generale possibile, per poi applicarlo a un caso noto.



Avremo una carica che si addensa sulle armature  $Q(t)$ , a cui corrisponde un potenziale  $V(t)$  e quindi un campo elettrico variabile  $E(t) = \frac{V(t)}{h}$ . Si genera quindi un campo magnetico che possiamo ricavare dalla quarta equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ora, abbiamo due possibilità: la derivata temporale del campo elettrico può essere positiva o negativa, a seconda che il condensatore si stia caricando o scaricando. Il segno della derivata ci fornisce il verso in cui il campo magnetico percorre le circonferenze (le sue linee di forza): di conseguenza, varierà il verso del vettore di Poynting. Infatti:

1. se  $\mathbf{B}$  è antiorario,  $\mathbf{S}$  esce radialmente dal condensatore e si sta scaricando;
2. se  $\mathbf{B}$  è orario,  $\mathbf{S}$  entra radialmente nel condensatore e si sta caricando.

In generale avremo quindi:

$$\mathbf{S} = \pm \frac{EB}{\mu_0} \hat{\mathbf{r}}$$

Per calcolare il campo magnetico sfruttiamo il teorema della circuitazione di Ampere:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 \Phi(J_s) = \mu_0 \pi r^2 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{r}{2} \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \hat{\mathbf{t}}$$

Quindi il vettore di Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = -\epsilon_0 \frac{r}{2} E \frac{\partial E}{\partial t} \hat{\mathbf{r}}$$

Il segno è contenuto, sia nell'espressione del campo magnetico che del vettore di Poynting, nella derivata temporale del campo elettrico. Per verificare che le cose tornino, integriamo sulla superficie laterale del condensatore e poi sul tempo, così otterremo l'energia che fluisce nell'istante di tempo attraverso l'unità di superficie; il flusso sarà banalmente:

$$\Phi_{\Sigma}(\mathbf{S}) = S(R) \Sigma = -\epsilon_0 \frac{R}{2} E \frac{\partial E}{\partial t} 2\pi R h = -\epsilon_0 h \pi R^2 \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}$$

Dove abbiamo esplicitato  $E \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial E^2}{\partial t}$

Quindi, per ottenere l'energia, basterà integrare sul tempo:

$$U = \int_0^t \Phi(\mathbf{S}) dt = -\frac{\epsilon_0}{2} \pi h R^2 (E^2(t) - E^2(t)) = \frac{\epsilon_0}{2} \Sigma h (E_i^2 - E_f^2)$$



Questa è l'espressione generale; se consideriamo il caso particolare della scarica del condensatore, avremo:

$$\left| \begin{array}{l} t = 0 \rightarrow V = V_0 \quad E(0) = E_i = \frac{V_0}{h} \\ t = \infty \rightarrow V = 0 \quad E(\infty) = E_f = 0 \end{array} \right.$$

Andando a sostituire, otterremo:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \Sigma h \frac{V_0^2}{h^2} = \frac{1}{2} CV_0^2$$

Concordemente con la teoria.

**Esempio (9.3)**

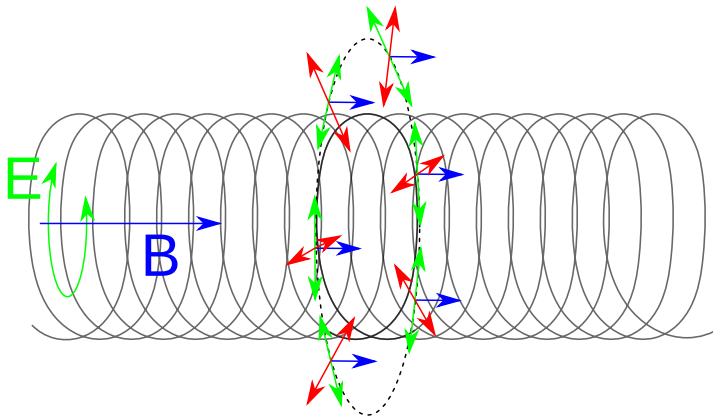


Fig. 9.8: il vettore di Poynting è in rosso. Sono rappresentati sia il caso in cui si carica, che quando si scarica.

In figura 9.8 abbiamo un solenoide ideale, vogliamo fare anche qui lo stesso studio fatto col condensatore. Consideriamo il solenoide percorso da corrente che varia nel tempo fino a diventare nulla, conosciamo il suo campo magnetico  $\mathbf{B}(t) = \mu_0 n I(t) \hat{\mathbf{x}}$  e quindi avremo un campo elettrico solenoidale datoci dalla terza equazione di Maxwell. Anche qui, come nel caso del condensatore, avremo che il vettore di Poynting sarà radiale, entrante o uscente a seconda del segno della derivata temporale del campo magnetico. Avremo anche in questo caso, allora:

$$\mathbf{S} = \pm \frac{EB}{\mu_0} \hat{\mathbf{r}}$$

Attenzione! In questo caso, avremo i segni inversi, perché nella terza equazione di Maxwell compare un segno meno:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Quindi:

1. se la corrente aumenta,  $\frac{\partial B}{\partial t} > 0$  e otterremo che il vettore di Poynting sarà uscente dal solenoide;



2. se la corrente diminuisce,  $\frac{\partial B}{\partial t} < 0$  e il vettore di Poynting sarà entrante.

Il campo elettrico si calcola applicando la forma integrale della terza equazione:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

Otterremo  $\mathbf{E}(r) = -\frac{1}{2}r \frac{\partial B}{\partial t} \hat{\mathbf{t}}$ . Il vettore di Poynting sarà:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = -\frac{r}{2\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial t} \hat{\mathbf{r}}$$

Come nel caso del condensatore, ne calcoliamo il flusso e lo integriamo nel tempo:

$$\Phi(\mathbf{S}) = 2\pi r l \left( -\frac{r}{2\mu_0} B \frac{\partial B}{\partial t} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\pi l r^2}{\mu_0} \frac{\partial B^2}{\partial t}$$

Allora l'energia sarà:

$$U = \int_0^t \Phi(\mathbf{S}) dt = -\frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \pi l r^2 (B^2(t) - B^2(0))$$

Nel nostro caso, per  $t \rightarrow \infty$  il campo  $B \rightarrow 0$ , quindi avremo:

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \pi l r^2 \mu_0^2 n^2 I^2 = \frac{1}{2} \Sigma \frac{N^2}{l} I^2 = \frac{1}{2} L I^2$$

Tutta la teoria che abbiamo visto finora, quindi, ha senso. Meno male.



## 5 Fonti per testo e immagini; autori; licenze

### 5.1 Testo

- **Utente:Dan/Elettromagnetismo/Campo elettromagnetico e onde/Energia, quantità di moto e momento angolare del campo elettromagnetico** *Fonte:* [https://it.wikiversity.org/wiki/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Campo\\_elettromagnetico\\_e\\_onda/Energia%2C\\_quantit%C3%A0\\_di\\_moto\\_e\\_momento\\_angolare\\_del\\_campo\\_elettromagnetico?oldid=46183](https://it.wikiversity.org/wiki/Utente%3ADan/Elettromagnetismo/Campo_elettromagnetico_e_onda/Energia%2C_quantit%C3%A0_di_moto_e_momento_angolare_del_campo_elettromagnetico?oldid=46183) *Contributori:* Dan

### 5.2 Immagini

- **File:Figura9-3ELM.svg** *Fonte:* <http://it.wikiversity.org/wiki/File:Figura9-3ELM.svg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura9-4ELM.svg** *Fonte:* <http://it.wikiversity.org/wiki/File:Figura9-4ELM.svg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura9-5ELM.svg** *Fonte:* <http://it.wikiversity.org/wiki/File:Figura9-5ELM.svg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura9-6ELM.svg** *Fonte:* <http://it.wikiversity.org/wiki/File:Figura9-6ELM.svg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura9-7ELM.svg** *Fonte:* <http://it.wikiversity.org/wiki/File:Figura9-7ELM.svg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?
- **File:Figura9-8ELM.svg** *Fonte:* <http://it.wikiversity.org/wiki/File:Figura9-8ELM.svg> *Licenza:* ? *Contributori:* ? *Artista originale:* ?

### 5.3 Licenza dell'opera

- [Project:Copyright Creative Commons Attribution Share Alike 3.0 & GNU FDL]
- Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0

