Prova scritta di Istituzioni di Analisi
10/7/2012

Primo modulo:

1.

Sia $X = L^2(-\infty, +\infty)$ e $f_n(x) = x^n e^{-\frac{x^2}{2}}$ , $n = 0, 1, 2, ...$
i) sapendo che le $f_n$ sono linearmente indipendenti in $X$
e, dette $\varphi_n(x)$ le funzioni ottenute applicando alle $f_n$ il procedimento di ortogonalizzazione, dimostrare che $\forall n \geq 0$
$\varphi_n(x) = P_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ , dove $P_n(x)$ e' un polinomio di grado $n$;
ii) dimostrare che $P_n(x)$ e' pari se $n$ e' pari e dispari se $n$ e' dispari.

2.

Sia $X$ uno spazio normato e $A$ un sottoinsieme di $X$ tale che
se $x, y \in A \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in A$.
i) mostrare che se $x, y \in A \Rightarrow \frac{m}{2^n}x + (1 - \frac{m}{2^n})y \in A$, $\forall n \in \mathbb{N}$ , $\forall 0 \leq m \leq 2^n$;
ii) se $A$ e' aperto e $B(x, r) \cup B(y, r) \subseteq A \Rightarrow B(\frac{x+y}{2}, r) \subseteq A$;
iii) sapendo che i razionali diadici sono densi in $[0, 1]$, dimostrare che se $A$ e' aperto, $A$ e' convesso se e solo se $x, y \in A \Rightarrow \frac{x+y}{2} \in A$.

3.

Sia $c_0 = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}: lim_n f(n) = 0\}$.
i) osservare che $l^1 \subseteq c_0 \subseteq l^\infty$;
ii) dimostrare che $\forall x \in l^1$ si ha $\| x \|_\infty \leq \| x \|_1$;
iii) mostrare che $c_0$ non e' denso in $l^\infty$.

Primo e secondo modulo:

4.

Sia $X$ uno spazio di Hilbert e $(x_n) \subseteq X$.
i) trovare un esempio di successione che converge debolmente ma non in norma;
ii) trovare un esempio di successione tale che $\| x_n \| \to \| x \|$ senza che vi sia convergenza in norma;
iii) dimostrare che $x_n \to x \iff x_n \rightharpoonup x$ e $\| x_n \| \to \| x \|$.

conv. debole